Digitized by Google

FONDO PROVINCIA

5477

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

Palchetto

Num.° d' ordine 104

NAZIONALE
B. Prov.
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
1
2288
NAPOLI

Digitized by Google

B. Prov.
I
2288

Digitized by Google

Digitized by Google

608499

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE
MATHÉMATIQUES;

Par M. l'Abbé DE LA CAILLE, *de l'Académie Royale des Sciences, de celles de Pétersbourg, de Berlin, de Stockholm, de Gottingue, et de l'Institut de Bologne; Professeur de Mathématiques au Collége Mazarin.*

CINQUIÈME ÉDITION,

Avec de nouveaux Élémens d'Algèbre, de Géométrie, de Trigonométrie rectiligne et sphérique, de Sections coniques, de plusieurs autres Courbes, des Lieux géométriques, de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral, par M. l'Abbé MARIE;

SUIVIES DE NOTES ET ADDITIONS,

PAR M. LABEY,

Professeur de Mathématiques pures et Examinateur des Candidats pour l'Ecole Impériale Polytechnique.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

ANNÉE 1811.

Digitized by Google

PRÉFACE.

Les Élémens d'Arithmétique, d'Algèbre, de Géométrie, de Trigonométrie Rectiligne, et de Trigonométrie Sphérique forment la première partie de cet Ouvrage. La seconde contient un abrégé des Sections Coniques, de plusieurs autres courbes, et des lieux géométriques. Elle est terminée par les Élémens du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral.

Pour faire entrer ces diverses matières dans un seul volume, il a fallu les presser un peu, et supprimer assez souvent des opérations intermédiaires dans le courant des calculs. Il en est résulté le double avantage, de renfermer entre des limites assez étroites toutes les parties élémentaires des Mathématiques pures, et d'offrir aux lecteurs une suite de difficultés propres à exercer leurs forces, et à provoquer leur ardeur.

Cette lutte continuelle produit les meilleurs effets pour les jeunes-gens destinés à faire des progrès rapides dans les Mathématiques. Rien ne les flatte, rien ne les anime comme le plaisir de vaincre ces difficultés. Rien aussi ne leur donne plus de facilité pour les calculs, et plus d'énergie pour la résolution des problêmes.

Voulant leur procurer ces avantages, M. *l'Abbé de la Caille*, dont la mémoire est si justement célèbre,

Digitized by Google

rédigea ses leçons de Mathématiques d'après ce plan. Je m'y suis conformé dans les différentes éditions que j'ai données de son Ouvrage.

J'ai mis en petit caractère, ce qui m'a paru moins utile ou moins aisé. On pourra donc se borner à ce qui est en gros caractère, quand on voudra n'apprendre que les premiers Élémens des Mathématiques. Si on veut pousser plus loin cette étude, il faut ne lire d'abord que ce qui est en gros caractères, après quoi on reprendra dans une seconde lecture tout le fil de ces leçons.

Digitized by Google

TABLE
DES MATIÈRES.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE, pag. 1
Des Règles de l'Arithmétique, 4
De l'Addition, Ibid.
De la Soustraction, 6
De la Multiplication, 8
De la Division, 15
Premier cas de la Division, 16
Second cas de la Division, 18
Troisième cas de la Division, 20

DES FRACTIONS.

De la nature des Fractions en général, de leur valeur et de leur comparaison, 25
Du Calcul des Fractions; et d'abord de quelques opérations préliminaires, 27
De l'Addition des Fractions, 32
De la Soustraction des Fractions, Ibid.
De la Multiplication des Fractions, 33
De la Division des Fractions, 34
DES FRACTIONS DÉCIMALES, 36
De l'Addition, Soustraction, Multiplication et Division des Fractions Décimales, 38
De la transformation et de l'utilité des Décimales, 43
De quelques autres Fractions, 47

ÉLÉMENS D'ALGÈBRE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES, 55
De l'Addition algébrique, 60
De la Soustraction algébrique, Ibid.
De la Multiplication algébrique, 61
De la Division algébrique, 65
De la formation des Puissances, 72
De la manière d'exprimer et de calculer toutes sortes de puissances, par le moyen de leurs exposans, 79
De l'extraction des racines, et en particulier de la racine quarrée, 84
De l'extraction de la Racine cubique, 94
Deux méthodes pour extraire par approximation les Racines d'un degré quelconque, 96

APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA RÉSOLUTION DE QUELQUES PROBLÊMES, 102
Résolution des Equations du premier degré, 103
Résolution des Equations du second degré, 117
DES RAPPORTS ET DES PROPORTIONS, 125
Des Proportions arithmétiques, 128
Des Proportions géométriques, 136
DE LA RÈGLE DE TROIS, ET DE QUELQUES AUTRES RÈGLES QUI EN DÉPENDENT, 149
Règle de Compagnie, 152
Règle d'Alliage, 154
Règle de fausse position, 157
Règle d'intérêt, 161
Quelques notions sur les Séries, 165
De la sommation des Séries, 169
De la méthode inverse des Séries, 174

DES LOGARITHMES. 177

Des propriétés des Logarithmes en général, 181
Du Calcul des Logarithmes par les Séries, 183
De l'usage des Logarithmes dans la résolution de plusieurs équations, 186
INTRODUCTION A LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DES DEGRÉS SUPÉRIEURS, 188
Méthode de transformer les équations, et d'en faire évanouir le second terme, 201
Du calcul des Quantités radicales, 202
Méthode pour extraire les racines des quantités en partie rationnelles et en partie incommensurables, 206
Résolution des Equations du troisième degré, 209
Résolution des Equations du quatrième degré, 213
Des équations plus élevées que celles du quatrième degré, 217
Méthode générale pour en trouver les facteurs d'un degré quelconque, 218
Méthode pour trouver les Racines par approximation, 219
Méthode pour trouver les racines égales, 221
Des Problêmes indéterminés du premier degré, 222

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE. 231

PREMIÈRE PARTIE.

Des Lignes, 232
Des Angles, 234
Des Lignes perpendiculaires, 236
Des Lignes perpendiculaires considérées dans le Cercle, 238
Des Tangentes, 240
Des Lignes parallèles, 241
De la mesure des Angles, 243
DES FIGURES, 244

Du Triangle, 245
De la similitude et de l'égalité des Triangles, 247
Des autres Polygones et de leurs principales propriétés, 250
Des Polygones symmétriques, 252
Des Polygones réguliers, 253
Des Lignes proportionnelles, 256
Des Lignes proportionnelles considérées dans le cercle, 261
Solutions de quelques Problêmes sur les Lignes proportionnelles, 264
Construction géométrique des Equations déterminées du premier et du second degré, 266
Des Figures semblables, 271

SECONDE PARTIE.

Des Surfaces, 272
De la comparaison des Surfaces, 277
Des Surfaces planes, 283
Des Lignes droites coupées par des Plans parallèles, 286
TROISIÈME PARTIE DES ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, 287
De la mesure des surfaces des Solides, 291
De la mesure des Solides, 294
APPLICATION DES PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE ET D'ALGÈBRE AU CALCUL DES SINUS ET A LA TRIGONOMÉTRIE, 301
Du calcul des Sinus, *Ibid.*
Du calcul des tables de Sinus par les séries, 311
Méthode d'approximation pour trouver la Quadrature du cercle, 316
Résolution des Equations du troisième degré dans le cas irréductible, par les Sinus, 318
Résolution des Triangles rectilignes, 319
Table pour la résolution des Triangles rectangles, 320
RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHERIQUES, 325
Principes et proportions pour la résolution des Triangles sphériques, 331
Application des Principes et des proportions qui précèdent, 334
Table pour la résolution de tous les cas possibles dans un triangle sphérique *ABC*, rectangle en *A*, 335
Résolution des Triangles sphériques-obliquangles, 339
Quelques applications de la Trigonométrie sphérique, 344

TRAITÉ ANALYTIQUE

DES SECTIONS CONIQUES.

Notions préliminaires sur l'usage de l'Algèbre dans la description des Courbes. 348
Origine des Sections coniques, et leur équation générale, 354
De la Parabole, 356
De l'Ellipse, 359
De l'Hyperbole, 365
De la quadrature des Sections coniques, 372

De quelques autres courbes, 378
Des lieux géométriques, 386
Résolution des Problèmes indéterminés du second degré, 392
Résolution des Problèmes déterminés qui ne passent pas le quatrième degré, 396

ÉLÉMENS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL, 403

Règles du calcul différentiel, 407
Des différentielles secondes, troisièmes, etc. 410
Des différentielles logarithmiques et exponentielles, 411
Des différentielles des quantités affectées de sinus, de cosinus, etc. 413
Application du calcul différentiel à la théorie des courbes, 416
Des Développées. 420
Des points d'inflexion, et de la méthode de *maximis* et *minimis*, 426
Des fractions dont le Numérateur et le Dénominateur se réduisent à zéro dans certains cas, 432
Quelques autres applications du Calcul différentiel, 434

ÉLÉMENS DU CALCUL INTÉGRAL, 445

Des quantités susceptibles d'une intégration exacte, 446
Méthode pour ramener l'intégration de plusieurs différentielles binomes à celle d'autres différentielles connues, 448
De l'intégration des Fractions différentielles rationnelles, 452
Méthode pour intégrer par Séries, 458
De l'intégration des différentielles logarithmiques et exponentielles, 463
De l'intégration des Quantités différentielles où il entre des Sinus, des Cosinus, etc. 467
De l'intégration des Différentielles à plusieurs variables, 472
Applications du Calcul intégral, 476
De la quadrature des Courbes, *Ibid.*
De la rectification des Courbes, 480
De la mesure des solidités, 484
Des surfaces courbes des solides de révolution, 485
De la Méthode inverse des Tangentes, et des Equations différentielles, 487
Résultats des Solutions de quelques Problèmes énoncés dans le cours de l'Ouvrage, 494
Notes et Additions, 497

FIN DE LA TABLE.

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE MATHÉMATIQUES.

1. On comprend sous le nom de *Mathématiques*, les Sciences qui ont pour objet les Nombres, l'Etendue, le Mouvement, la Lumière, et en général tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution.

2. Mais chacune de ces Sciences a une dénomination particulière, suivant la nature de l'objet qu'elle contemple. La Science des Nombres, par exemple, s'appelle *Arithmétique*. Celle qui a pour objet la connaissance des dimensions de l'Etendue, s'appelle *Géométrie*. La Science du Mouvement s'appelle *Mécanique*. Celle qui traite de la Lumière, s'appelle *Optique*, et ainsi des autres.

3. L'Arithmétique sert de fondement aux autres parties des Mathématiques. Elle est d'ailleurs d'un usage si universel dans la société, qu'il faut au moins savoir en pratiquer les premières règles.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUES.

4. Tous les hommes ont une idée distincte de l'*Unité*. La vue d'un objet quelconque suffit pour faire naître cette idée.

Celle de la *Pluralité* n'est pas moins facile à acquérir. Il suffit de voir deux ou plusieurs objets qui se ressemblent.

5. Mais toute pluralité étant le résultat des unités particulières qui concourent à la former, on dut bientôt sentir la nécessité d'imaginer un moyen de distinguer telle ou telle pluralité de toute autre.

6. Trois hommes, par exemple, quatre hommes, cent hommes rassemblés ne pouvaient pas être désignés de la même manière. Il semblait donc indispensable d'avoir recours à autant de signes différens qu'il pouvait y avoir de *nombres*.

7. Cependant la moindre réflexion dut faire prévoir l'inconvénient qu'aurait entraîné cette multitude innombrable de signes. On renonça donc à ce moyen, et par un procédé aussi simple qu'ingénieux, on vint à bout d'exprimer toutes sortes de nombres par la simple combinaison des dix *chiffres* si connus

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
Zéro,	Un,	Deux,	Trois,	Quatre,	Cinq,	Six,	Sept,	Huit,	Neuf.

8. Le premier ne signifie rien quand il est seul; mais par une convention généralement adoptée, zéro placé à la droite d'un autre chiffre, lui donne une valeur dix fois plus grande. Ainsi, pour exprimer dix ou une unité de *dixaine*, on écrit 10; pour exprimer vingt, ou deux *dixaines*, on écrit 20; et successivement trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix, s'écrivent 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

9. Les autres chiffres ont la même propriété que le zéro; c'est-à-dire, que *tout chiffre placé à la droite d'un autre, le rend dix fois plus grand.*

Une *unité simple* peut donc devenir une unité de *dixaine*, une unité de *centaine*, une unité de *mille*, etc., en mettant un, deux, trois zéros ou tels autres chiffres qu'on voudra, à la droite du chiffre 1.

Un 5, un 4 et un 6 placés de cette manière, 546, sont donc une expression abrégée du nombre *cinq cent quarante-six*.

10. Trois chiffres ainsi disposés à la suite l'un de l'autre, forment ce que l'on appelle la *Tranche* des unités. Trois autres chiffres mis sur la même ligne que ceux-ci, vers la gauche, comme on le voit dans cet

exemple, 921546, forment la tranche des mille. On prononce ainsi : *neuf cent vingt-un mille cinq cent quarante-six*. La tranche des *Millions* vient ensuite, puis celle des *Billions*, celle des *Trillions*, et ainsi des autres.

11. Elles sont composées de trois chiffres, dont le premier à droite marque toujours des unités du même ordre que la tranche. Ainsi dans la première tranche, ce sont des unités simples; dans la seconde, ce sont des unités de mille; dans la troisième, des unités de million, etc.

Le second chiffre de chaque tranche marque des dixaines en général : ces dixaines prennent le nom de la tranche où elles se trouvent. Il en est de même pour les centaines, que le troisième chiffre de chaque tranche désigne toujours.

12. Avec cette remarque et un peu d'exercice, il n'y a pas de nombre déjà écrit en chiffres, que l'on n'apprenne bien vîte à prononcer : il n'y en a pas non plus de prononcé ou d'écrit *en toutes lettres*, que l'on ne sache bientôt mettre en chiffres. On peut s'exercer sur les exemples suivans, dont on trouvera les résultats à la fin du livre, afin que chacun puisse les comparer avec les siens.

Soit donc proposé, 1°. d'assigner la valeur des nombres

A	B	C	D	E
75....	893....	1111....	67509....	10200701.

Soit proposé, 2°. d'exprimer en chiffres les nombres

F	G	H
trois cent deux...	huit mille un...	quinze mille seize...

I	K
cinquante millions mille...	vingt-deux billions quatre millions soixante-dix-neuf.

Passons maintenant aux règles de l'Arithmétique. On en compte quatre principales, l'Addition, la Soustraction, la Multiplication et la Division.

DES RÈGLES DE L'ARITHMÉTIQUE.

13. Puisque les nombres sont susceptibles d'augmentation ou de diminution, il est clair qu'on peut les assujétir à deux sortes d'opérations; l'une par laquelle on les augmente, ce qui s'appelle faire une *Addition*; l'autre par laquelle on les diminue, ce qu'on appelle *Soustraction*. Toutes les autres opérations de l'Arithmétique dépendent plus ou moins de ces deux opérations fondamentales, comme on le verra par la suite.

14. On distingue deux sortes de Nombres, *les entiers* et *les fractionnaires*. Les premiers sont ceux qui contiennent l'*unité* sans reste, tels que deux, sept, mille, etc.; les autres ne contiennent que des parties de l'unité, par exemple, un tiers, un vingtième, etc. Or il est clair que ces deux espèces de Nombres étant également susceptibles d'accroissement ou de diminution, on peut les soumettre aux mêmes règles. Voyons d'abord celles que l'on doit suivre pour les Nombres entiers.

Si ces nombres ne passent pas dix, auquel cas on les appelle *nombres simples*, on n'a pas besoin de règles pour les calculer, parcequ'on opère alors très-facilement. Mais lorsqu'il s'agit de nombres *composés*, il faut avoir recours à certaines opérations qui n'ont été inventées que pour suppléer au peu d'étendue de notre esprit: or les plus élémentaires de ces opérations sont d'une extrême facilité, comme on va le voir.

De l'Addition.

15. L'Addition sert à trouver la *somme* de plusieurs nombres donnés. Par exemple, 5, 7 et 4 ajoutés ensemble, font 16; et pour abréger le discours, on écrit $5+7+4=16$. (Le signe $+$ est le signe consacré pour l'Addition : on prononce *plus*; le signe $=$ signifie qu'il y a égalité : on prononce *égale*).

Lorsque les nombres à ajouter sont composés de plusieurs chiffres; par exemple, lorsqu'on cherche la somme de 432 et 363, voici la règle qu'il faut suivre.

1°. « Écrivez ces nombres l'un au-dessous de l'autre, ensorte que les unités soient sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, etc ».

2°. « Tirez un trait au-dessous ; et allant de droite à gauche, prenez la somme des unités ; si elle ne passe pas 9, écrivez-la sous la colonne des unités ; si elle surpasse 9, n'écrivez que les unités, et réservez les dixaines pour les ajouter à la colonne suivante ».

3°. « Prenez de même la somme des dixaines, des centaines, etc., et écrivez-la successivement au-dessous de la colonne correspondante ». Ainsi dans la première colonne je dis : $2+3=5$, j'écris 5 au-dessous.

Dans la seconde, $3+6=9$.
Dans la troisième, $4+3=7$,
j'écris 7, et j'ai la somme cherchée, 795.

$$\begin{array}{r} 432 \\ 363 \\ \hline 795 \end{array}$$

Si l'on propose d'ajouter ces trois nombres, 6078, 9198, 483, je les écris l'un sous l'autre suivant la règle, et je dis : $8+8=16$, $+3=19$; c'est-à-dire, la somme de la première colonne est 19, ou 1 dixaine et 9 unités ; je n'écris que 9 au-dessous de la colonne des unités, et je tiendrai compte de la dixaine dans la somme de la colonne suivante.

$$\begin{array}{r} 6078 \\ 9198 \\ 483 \\ \hline 15759 \end{array}$$

Je dis donc, $1+7=8$, $+9=17$, $+8=25$; par la même raison, je n'écris que 5 sous la seconde colonne, et je retiens les deux dixaines pour la colonne suivante.

Après quoi je dis, $2+0=2$, $+1=3$, $+4=7$; je pose 7.

Enfin $6+9=15$; et parceque c'est la dernière colonne, j'écris 15 tout de suite. Ainsi la somme cherchée est 15759.

Voici quelques Additions à faire :

L	M	N
5783	77756	10376786
4328	3388	789632
5987	9763	589
8521	90257	73
____	____	____

16. On voit bien qu'en ajoutant successivement toutes

les parties des Nombres donnés, on doit trouver la somme totale. Ainsi cette règle est infaillible.

Tout infaillible qu'elle est, cependant il n'est pas rare de se tromper en la pratiquant. Il est donc à propos de la vérifier en recommençant l'opération; ce que l'on peut faire en prenant la somme des colonnes de bas en haut.

Comme les erreurs qui échappent dans le cours des opérations numériques, proviennent souvent de la confusion des colonnes ou des chiffres mal faits, on ne saurait prendre trop tôt l'habitude de bien séparer les colonnes, et de donner aux chiffres une forme bien distincte. Cette double précaution fait éviter beaucoup de fautes.

Il faut prendre garde aussi à une autre cause d'erreur; on oublie quelquefois d'ajouter à la colonne suivante ce que l'on a retenu sur celle qui précède.

De la Soustraction.

17. La Soustraction sert à trouver la *différence* de deux quantités données. Or cette différence est toujours égale à ce qui reste de l'une de ces quantités, quand on en a retranché l'autre.

On la trouve sans calcul dans les nombres simples. Il est clair, par exemple, que si on ôte 2 de 5, il reste 3, et qu'ainsi 3 est la différence qu'il y a entre 2 et 5. Cette opération s'exprime ainsi en abrégé, $5-2=3$ (ce signe — signifie *moins*); de même $9-4=5$, et $8-7=1$.

18. Règle pour la Soustraction des nombres composés: « Pour soustraire un nombre d'un autre, mettez le plus petit au-dessous du plus grand, comme dans l'Addition, et tirez un trait au-dessous; puis écrivez successivement sous chaque colonne les excès des unités, dixaines, centaines, etc. du nombre supérieur sur les unités, dixaines, centaines, etc. du nombre inférieur, et vous aurez l'excès total ou la différence entre ces deux nombres ».

Ainsi pour soustraire le nombre 243 du nombre 695, je les écris d'abord comme vous le voyez..... je dis ensuite, 5 — 3 = 2, que je pose sous la colonne des unités : 9 — 4 = 5, que j'écris sous la colonne des dixaines : 6 — 2 = 4, que je pose au rang des centaines. La différence cherchée est donc 452.

$$\begin{array}{r} 695 \\ \underline{243} \\ 452 \end{array}$$

Il est clair en effet qu'en prenant successivement toutes les différences partielles, on doit avoir pour résultat la différence totale : et c'est là tout le fondement de cette règle.

19. Lorsque le chiffre inférieur est plus grand que le chiffre qui lui correspond dans le nombre supérieur, il faut ajouter à ce chiffre correspondant une dixaine prise sur le chiffre qui le suit à gauche, puis écrire l'excès du chiffre supérieur, ainsi augmenté, sur l'inférieur; et se souvenir que par là on a diminué d'une unité le chiffre supérieur suivant.

Pour ôter 38 de 64, par exemple, je dis, 4 — 8, cela ne se peut. Je détache une unité du 6, que je transporte sur la colonne des unités simples, où elle vaut dix, et ajoutant ces dix unités aux quatre autres, je dis, 14 — 8 = 6, que je pose au rang des unités : puis 5 — 3 = 2. la différence est donc 26.

Par une opération semblable, on trouverait que Newton a vécu 84 ans. Né en 1643, il est mort en 1727.

20. Si le chiffre qui suit à gauche était un *zéro*, ou s'il était suivi lui-même d'autres *zéros*, on irait de proche en proche, jusqu'à ce qu'on eût trouvé un chiffre dont on pût détacher une unité. Par la décomposition de cette unité, tous les zéros précédens deviendraient des 9, et il resterait une dixaine pour l'ajouter au chiffre plus petit que le chiffre inférieur.

Si l'on voulait, par exemple, soustraire 18 de 200, on dirait, 0 — 8, cela ne se peut. Ainsi il faudrait détacher une unité de 2, que l'on décomposerait en dix dixaines; et de ces dix dixaines, on en laisserait 9 à la place du second zéro. La

$$\begin{array}{r} 200 \\ \underline{18} \\ 182 \end{array}$$

dixaine, transportée sur le premier, rendrait possible la soustraction de 8, et on dirait 10 — 8 = 2, 9 — 1 = 8, 1 — 0 = 1 ; resterait donc 182.

Un homme qui devait 3000#, en a payé 1296 ; que lui reste-t-il à payer ?..... 3000
0 — 6, cela ne se peut. Je détache une unité du 1296
3. Cette unité vaut 1000 = 990 + 10. Je dis 1704
donc, 10 — 6 = 4...9 — 9 = 0...9 — 2 = 7...
2 — 1 = 1. Il lui reste donc 1704# à payer.

21. Lorsque le chiffre supérieur n'est pas assez grand, on peut, sans avoir recours à ceux qui le suivent, lui ajouter une dixaine ; mais alors, pour compenser ce que l'on a ajouté au nombre supérieur, il faut supposer que le chiffre suivant du nombre inférieur est augmenté d'une unité. On voit bien que cela revient au même.

Voici quelques autres exemples :

	6000		1798		6532		6002		150001
	4000		1653		5421		4573		76385
O	___	P	___	Q	___	R	___	S	___

22. « Quand une Soustraction est bien faite, il faut nécessairement que le reste ajouté au nombre soustrait, soit égal au nombre dont on avait à le soustraire ». Car un tout quelconque doit être égal à ses parties prises ensemble : et c'est de là que l'on a déduit un moyen prompt et facile de vérifier les Soustractions. Ajoutez donc le reste au plus petit nombre, et voyez si leur somme est égale au plus grand des deux nombres.

De la Multiplication.

23. On se sert de la Multiplication pour trouver sans beaucoup de calcul, la somme d'un nombre que l'on veut ajouter plusieurs fois à lui-même Pour trouver, par exemple, la somme de 12 ajouté neuf fois, il faudrait écrire neuf fois 12, et en chercher la somme, ce qui serait assez long ; par la Multiplication, on trouve tout de suite que 9 fois 12 font 108.

Dans cet exemple, on appelle 12 *le Multiplicande*, 9 *le Multiplicateur*, et 108 *le Produit* En général le multiplicande et le multiplicateur s'appellent les *racines* ou les *facteurs* du produit.

24. « Le produit est donc la somme du multiplicande pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur : » ou, ce qui est la même chose, le produit contient autant de fois le multiplicande, que le multiplicateur contient l'unité.

25. Si au lieu d'écrire neuf fois 12 en colonne, pour en prendre la somme, on écrivait douze fois 9, il est clair qu'on trouverait la même somme 108; d'où il suit que « lorsqu'on a deux nombres à multiplier, on peut indifféremment prendre celui qu'on voudra pour multiplicande; l'autre sera le multiplicateur; le produit sera le même ».

26. On n'a pas besoin de règles pour la Multiplication des nombres simples; on voit facilement que le produit de 2 multiplié par 3, est 6; ce qui s'exprime ainsi, 2×3, ou $2.3 = 6$ (le signe $\times$, ou le point mis entre deux nombres, signifie *multiplié par*); de même $3 \times 4 = 12$, $7.5 = 35$, etc. Il faut se rendre très-familiers les produits des nombres simples, si l'on veut pratiquer sûrement et promptement la Multiplication.

Voici les moins aisés de ces produits :

$3 \times 3 = 9$	$4 \times 3 = 12$	$5 \times 3 = 15$	$6 \times 3 = 18$
$3 \times 4 = 12$	$4 \times 4 = 16$	$5 \times 4 = 20$	$6 \times 4 = 24$
$3 \times 5 = 15$	$4 \times 5 = 20$	$5 \times 5 = 25$	$6 \times 5 = 30$
$3 \times 6 = 18$	$4 \times 6 = 24$	$5 \times 6 = 30$	$6 \times 6 = 36$
$3 \times 7 = 21$	$4 \times 7 = 28$	$5 \times 7 = 35$	$6 \times 7 = 42$
$3 \times 8 = 24$	$4 \times 8 = 32$	$5 \times 8 = 40$	$6 \times 8 = 48$
$3 \times 9 = 27$	$4 \times 9 = 36$	$5 \times 9 = 45$	$6 \times 9 = 54$

$7 \times 3 = 21$	$8 \times 3 = 24$	$9 \times 3 = 27$
$7 \times 4 = 28$	$8 \times 4 = 32$	$9 \times 4 = 36$
$7 \times 5 = 35$	$8 \times 5 = 40$	$9 \times 5 = 45$
$7 \times 6 = 42$	$8 \times 6 = 48$	$9 \times 6 = 54$
$7 \times 7 = 49$	$8 \times 7 = 56$	$9 \times 7 = 63$
$7 \times 3 = 56$	$8 \times 8 = 64$	$9 \times 8 = 72$
$7 \times 9 = 63$	$8 \times 9 = 72$	$9 \times 9 = 81$

27. Lorsqu'on a deux nombres composés, comme 32 et 24, à multiplier l'un par l'autre, il faut 1°. poser celui que l'on aura choisi pour multiplicateur (c'est ordinairement le plus petit) au-dessous du multiplicande, comme dans l'Addition : ainsi je pose 24 sous 32.

2°. Il faut écrire au-dessous en allant de droite à gauche, le produit de chaque chiffre du multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur. Ainsi j'écris d'abord le produit de chaque chiffre du multiplicande, par les unités du multiplicateur, en disant, $2 \times 4 = 8$, je pose 8....$3 \times 4 = 12$, je pose 12.

$$\begin{array}{r} 32 \\ 24 \\ \hline 128 \\ 64 \\ \hline 768 \end{array}$$

Après cela, j'écris aussi de droite à gauche, en commençant par la colonne des dixaines, le produit des chiffres du multiplicande par les dixaines du multiplicateur, et je dis, $2 \times 2 = 4$, je pose 4 au rang des dixaines...$3 \times 2 = 6$, je pose 6.

3°. Il faut prendre la somme de ces deux produits; ce qui donnera 768 pour produit total.

28. Pour concevoir cette opération, on peut, en la faisant, raisonner ainsi : Le produit de 32 par 24 est évidemment égal aux dixaines et aux unités de 32, prises autant de fois qu'il y a d'unités dans 24; c'est-à-dire, prises 4 fois, et 2 dixaines de fois. Il faut donc dire d'abord : les unités du multiplicande prises 4 fois, produisent 8 unités que j'écris. Ensuite les 3 dixaines du multiplicande prises 4 fois, produisent 12 dixaines; j'écris 12 sur la gauche du 8. Ainsi les 3 dixaines et les 2 unités de 32 prises 4 fois, produisent 128 unités.

Passant maintenant aux deux dixaines du multiplicateur, je dis : les 2 unités du multiplicande prises 2 dixaines de fois produisent 4 dixaines. J'écris 4 dans la seconde colonne à gauche, ou, ce qui revient au même, j'écris 4 dans la colonne du multiplicateur actuel, parceque 4 exprime des dixaines, et qu'ainsi il doit être dans la colonne des dixaines. Enfin je dis, les 3 dixaines du multiplicande prises 2 dixaines de fois, produisent 6 dixaines de dixaines, c'est-à-dire, 6 centaines; j'écris 6 après 4, afin qu'il se trouve dans le rang des centaines. Donc les 3 dixaines et les 2 unités du multiplicande prises 2 dixaines de fois, produisent 64 dixaines, ou 6 centaines et 4 dixaines. J'ajoute ce produit à celui

que j'ai trouvé plus haut, afin d'avoir le produit de toutes les parties du multiplicande par toutes celles du multiplicateur. Ce produit total est donc 768.

Soit proposé de multiplier 564 par 249. Je commence par écrire ces deux nombres l'un sous l'autre; puis je multiplie tout le multiplicande 564 par les 9 unités du multiplicateur, en disant, $4 \times 9 = 36$, je pose 6 et retiens 3. ...$6 \times 9 = 54$; mais à cause de 3 que je viens de retenir, je dis, $54 + 3 = 57$, je pose 7 et retiens 5.....$5 \times 9 = 45$: or $45 + 5$ que j'ai retenu $= 50$; je pose 50 tout de suite, parcequ'il n'y a plus rien à multiplier par ce premier chiffre 9.

```
  564
  249
 5076
2256
1128
140436
```

Je passe ensuite aux 4 dixaines du multiplicateur, par lesquelles je multiplie 564, en disant, $4 \times 4 = 16$; je pose 6 au rang des dixaines, et retiens 1...$6 \times 4 = 24$, $+ 1 = 25$, je pose 5 et retiens 2...$5 \times 4 = 20$, $+ 2 = 22$, j'écris 22.

Enfin je multiplie 564 par les 2 centaines du multiplicateur, disant à l'ordinaire, $4 \times 2 = 8$, je pose 8 au rang des centaines...$6 \times 2 = 12$, je pose 2 et retiens 1...$5 \times 2 = 10$, $+ 1 = 11$, je pose 11.

Je prends la somme de ces différens produits, et j'ai 140436 pour produit total.

29. Lorsqu'il y a un ou plusieurs zéros à la fin de l'un ou des deux nombres donnés, on abrège l'opération, en ne multipliant que les autres chiffres, et mettant à la suite de leur produit autant de zéros qu'il y en a, soit à la fin du multiplicande, soit à la fin du multiplicateur.

Par exemple, pour multiplier 120 par 120, on mettra deux zéros à la suite de 144, produit de 12 par 12, et on aura 14400 pour produit. Car il est bien évident que des dixaines multipliées par des dixaines, produisent des centaines. Or ce sont 12 dixaines que l'on a ici à multiplier par 12 dixaines. Leur produit doit donc être 144 centaines $= 14400$. On trouverait de même que $406000 \times 10700 = 4\,344\,200\,000$.

Voici quelques exemples de Multiplications toutes faites :

466	1 000 000	53687
1002	1 000	908
932	1 000 000 000	429496
46600		4831830
466932		48747796
5874		886633
685		777
29370		6206431
46992		6206431
35244		6206431
4023690		688913841

En voici quelques autres à faire :

3020804	55554444	987654321
570504	88979765	123456789
T	U	X

Pour connaître si l'on ne s'est pas trompé dans la Multiplication, on peut, en attendant que l'on sache la division, changer l'ordre des nombres donnés, c'est-à dire, du multiplicateur faire le multiplicande, et réciproquement ; car on doit trouver le même produit.

30. On peut aussi se servir de ce qu'on appelle la preuve par 9. C'est une opération ingénieuse et prompte, qu'il est bon de savoir. Voici en quoi elle consiste.

1°. Ajoutez les chiffres du multiplicande, comme s'ils exprimaient tous des unités simples, et de leur somme retranchez 9 aussi souvent que faire se pourra. Ou il ne vous restera rien après cette soustraction, ou il vous restera un nombre moindre que 9. Dans le premier cas, écrivez zéro. Dans le second, écrivez le chiffre qui vous reste.

2°. Faites de même pour les chiffres du multiplicateur, et vous aurez un second reste que vous pourrez écrire au-dessous du premier.

3°. Multiplie z ces deux restes, et de leur produit

retranchez 9 aussi souvent que vous le pourrez. Vous aurez un troisième reste, que vous mettrez à côté des deux premiers.

4°. Ajoutez les chiffres du produit, comme ceux des deux facteurs, retranchez de leur somme tous les 9 qu'elle contient, et mettez le quatrième reste au-dessous du précédent.

Si la multiplication que vous voulez vérifier est bonne, ce dernier reste doit être le même que l'avant-dernier.

Je voudrais savoir, par exemple, si 97350 est le véritable produit de 354 par 275.

J'ajoute les chiffres du multiplicande, en disant $3+5+4=12$; j'en ôte 9: reste 3 que je mets en réserve.

$$\begin{array}{c|c} 3 & 6 \\ \hline 5 & 6 \end{array}$$

J'écris au-dessous le reste 5 provenant des chiffres du multiplicateur.

Je multiplie le premier reste 3 par le second reste 5, et du produit 15 j'ôte 9 : reste 6 que j'écris à côté du 3.

Enfin j'ajoute de même les chiffres du produit 97350, et je trouve qu'après en avoir retranché deux fois 9, il reste 6, comme dans la dernière soustraction. D'où je conclus que l'opération est bonne. Et voici sur quoi est fondée cette conclusion.

31. Si j'ôte de 10, de 100, de 1000, etc. tous les 9 qui y sont contenus, il est évident qu'il restera toujours 1. En faisant la même opération sur 20, sur 200, sur 2000, etc., on trouvera constamment 2 pour reste. En général « tout nombre exprimé par un chiffre suivi d'un ou de plusieurs zéros, donnera toujours ce chiffre pour reste, après la suppression des 9 que ce nombre contient ».

Or il n'est aucun nombre que l'on ne puisse décomposer, aux seules unités près, en nombres entiers et *décimaux*. Le multiplicande 354, par exemple, peut se décomposer en $300+50+4$. On trouvera donc le même reste, après avoir ôté les 9 de la somme de $3+5+4$, ajoutés comme unités simples, que si on les avait ôtés successivement de $300+50+4$. Il en est de même

pour le multiplicateur 275; et c'est là le fondement des deux premières parties de la règle.

Cela posé, je remarque qu'en multipliant un nombre dans lequel 9 est contenu un certain nombre de fois sans reste, par un autre nombre qui contienne aussi 9 sans reste, le produit doit pareillement le contenir sans reste.

Si donc 354 le contient avec un reste 3, et si 275 le contient avec un reste 5, leur produit doit évidemment le contenir avec un reste 15. Supprimant donc le 9 contenu dans le reste 15, il doit rester 6; et c'est effectivement ce qui est resté après avoir ôté tous les 9 de 97350.

Voilà le fondement de la quatrième partie de la règle. Voici celui de la troisième.

« Pour savoir ce qui reste du produit de deux nombres quelconques, après la suppression de tous les 9, il n'y a qu'à multiplier le reste du multiplicande par celui du multiplicateur, et soustraire de ce produit les 9 qu'il contient. Le reste sera toujours celui que l'on cherche ».

On peut le démontrer généralement de cette manière. Soit le multiplicande $= 9B + m$; et le multiplicateur $= 9C + n$, B et C expriment le nombre de fois que les deux facteurs contiennent 9 (m et n représentent les deux restes). Le produit sera $81\,BC + 9Cm + 9Bn + mn$: Or les trois premiers termes de ce produit sont évidemment divisibles sans reste par 9. Si le quatrième l'est aussi, tout le produit l'est de même. S'il provient un reste de la division de mn par 9, ce reste sera celui que l'on cherche. Donc pour savoir, etc.

Appliquons cette méthode à un autre exemple.

Je suppose que l'on ait trouvé 265325592 pour produit de 65464×5053, et qu'on veuille le vérifier. Le premier reste est 7; le second est 3; leur produit est 21; son reste est 3; celui du produit total est 3 aussi. L'opération est donc bonne.

$$\begin{array}{c|c} 7 & 3 \\ \hline 3 & 3 \end{array}$$

32. Observez, 1°. que pour abréger on peut soustraire les 9 à mesure qu'on en trouve dans le cours de l'addition des chiffres.

2°. Que 3 pourrait servir ainsi que 9.

3°. Qu'il y a deux erreurs à éviter. L'une qui con-

siste dans la transposition des chiffres du produit total, comme si au lieu d'écrire 97350, on écrivait 79350, ou 57903, ou etc. L'autre, qui est de mettre dans ce produit des zéros au lieu des 9, ou d'oublier les 9, et de ne rien mettre à leur place. Car alors le résultat de la vérification serait le même; et cependant les produits seraient bien différens. Mais des erreurs difficiles à commettre, ne doivent pas empêcher de se servir d'une règle aussi expéditive. Au reste, la division tend directement à vérifier la multiplication.

De la Division.

33. La Division sert à trouver combien de fois un nombre est contenu dans un autre; et comme il ne peut y être contenu qu'autant de fois qu'il peut en être soustrait, la division est un moyen abrégé de faire ces soustractions.

Ainsi, pour savoir combien 12 contient de fois 4, la manière la plus naturelle est d'ôter 4 de 12; reste 8: ensuite 4 de 8; reste 4: enfin 4 de 4; reste zéro: d'où l'on voit que la quantité 12 est épuisée, après que 4 en a été retranché 3 fois, et qu'ainsi 12 contient 4 précisément 3 fois. Mais cette méthode serait trop longue, si les nombres étaient fort grands. On a donc imaginé un moyen de trouver en peu de temps combien de fois une quantité appelée *le Dividende*, contient une autre quantité appelée *le Diviseur*. On appelle *Quotient* le nombre qui exprime combien de fois le dividende contient le diviseur.

Dans cet exemple 12 est le dividende, 4 le diviseur, et 3 le quotient.

34. Il suit clairement de ces notions, 1°. « Que le dividende contient autant de fois le diviseur, que le quotient contient l'unité ».

35. 2°. Que le diviseur pris autant de fois que le quotient contient l'unité, doit être égal au dividende (car alors c'est remettre le diviseur autant de fois qu'on l'a ôté, ce qui doit rétablir le dividende), ou, ce qui est la même chose, « le produit du diviseur par le quotient est égal au dividende ».

Donc, « pour savoir si un quotient est exact, il faut le multiplier par le diviseur, et en comparer le produit avec le dividende ».

Or on peut regarder le dividende comme le produit d'une multiplication, dont le diviseur et le quotient sont les facteurs. Ainsi, diviser le dividende par le diviseur pour avoir un quotient, c'est la même chose que de diviser un produit par un de ses facteurs, pour trouver l'autre facteur.

Donc, « quand on connaît un produit et un facteur de ce produit, il faut, pour trouver l'autre facteur, diviser le produit par le facteur connu ».

36. Cela posé, parcourons les différens cas de la division. Il y en a trois; le premier a lieu lorsque le dividende et le diviseur sont l'un et l'autre des nombres simples, comme si on proposait de diviser 8 par 4.

Le second, lorsque le dividende est un nombre composé, et que le diviseur est un nombre simple; 7953, par exemple, à diviser par 3.

Le troisième cas est le plus ordinaire, c'est quand le dividende et le diviseur sont tous deux des nombres composés; par exemple, 147475 à diviser par 262.

Premier cas de la Division.

37. Lorsque le dividende et le diviseur sont des nombres simples, on n'a pas besoin de règles pour trouver le quotient. Par exemple, on voit tout de suite que le quotient de 8 divisé par 4, est 2.

Pour abréger, on écrit le diviseur immédiatement au-dessous du dividende, et on les sépare par un trait, qui signifie *divisé par :* ainsi $\frac{8}{4}=2$ signifie que 8 divisé par 4 égale 2. De même $\frac{9}{3}=3$.

Quand on ne trouve pas un quotient exact (comme si on voulait diviser 9 par 4, où l'on voit que 9 contient 4 plus de 2 fois, mais moins de 3 fois, et qu'ainsi le quotient véritable est entre 2 et 3): « alors on écrit pour quotient le plus petit des deux nombres entre lesquels le vrai quotient doit se trouver : on multiplie ce nombre par

par le diviseur, on retranche du dividende le produit de cette multiplication, l'on a un reste qu'on écrit à côté du quotient, en mettant le diviseur au-dessous de ce reste, dont on le sépare par un trait ».

Par exemple, il faut dire, 9 contient 4 deux fois et plus, mais non pas trois fois : j'écris donc 2 pour quotient, et je dis, $2 \times 4 = 8$, ensuite $9 - 8 = 1$, et j'ai $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$; ce qui signifie que 9 divisé par 4, a 2 pour quotient, et qu'il reste encore une des unités de 9 à partager en quatre parties. De même $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2} \ldots \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \ldots \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$.

38. Remarques. I. La division consiste en trois opérations. 1°. « On divise le dividende par le diviseur, pour avoir un quotient; 2°. on multiplie le diviseur par le quotient pour avoir un produit; 3°. on ôte ce produit du dividende pour avoir un reste ».

II. Si le diviseur est plus grand que le dividende, comme s'il fallait diviser 4 par 7, alors on se contente d'écrire $\frac{4}{7}$ comme un reste de division, et cette expression représente le quotient.

III. Une quantité qui peut se diviser exactement et sans reste par une autre, est *multiple* de cette autre quantité. Ainsi 8 est multiple de 4 et de 2... 12 est multiple de 6, de 4, de 3 et de 2. Tout nombre est multiple de l'unité; mais 8 n'est pas multiple de 7, ni de 6, ni de 5, ni de 3. De même 11 n'est multiple d'aucun nombre entier plus grand que 1.

IV. Tout nombre entier qui n'est multiple d'aucun autre nombre entier plus grand que l'unité, s'appelle *nombre premier*. On trouve dans différens Auteurs des Tables de ces nombres. Voici ceux qui sont moindres que 500 :

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293.

307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397.

401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499.

On peut voir dans le cinquième volume des *Mémoires de Mathématiques et de Physique*, présentés à l'Académie royale des Sciences (page 485), la méthode que M. Rallier des Ourmes a donnée pour trouver les nombres premiers. Cette méthode est fort simple, quoique indirecte.

Le célèbre Jean Bernoulli en avait déjà indiqué une autre (T. I, page 90 de ses Ouvrages). Elle est fondée sur la propriété commune à tous les nombres premiers, excepté 2 et 3, de ne différer que d'une unité, de 6 ou de ses multiples; ce qui n'est pas réciproque.

On a imprimé depuis peu à Berlin, des Tables qui contiennent tous les nombres premiers, depuis 1 jusqu'à 102000.

Second cas de la Division.

39. « Lorsque le dividende est un nombre composé, et que le diviseur est un nombre simple : » 1°. Je cherche combien de fois le diviseur est contenu dans le premier chiffre du dividende, en allant de gauche à droite.

2°. J'écris le chiffre qui exprime le nombre de fois, et par ce chiffre je multiplie le diviseur que l'on place ordinairement sur la droite du dividende.

3°. Je soustrais ce produit du premier chiffre du dividende, et j'abaisse le second chiffre à côté du reste, s'il y en a. Après quoi je recommence les mêmes opérations, jusqu'à ce que je sois parvenu à diviser successivement tous les chiffres du dividende.

Ainsi pour diviser 7953 par 3, j'écrirai d'abord le diviseur à côté du dividende, comme on le voit ici.

Ensuite je dirai : en 7 combien de fois 3? 2 fois. J'écris 2 au quotient. Je multiplie 3 par 2, et je soustrais le produit 6, de 7; il me reste 1, à côté duquel j'abaisse 9.

Je dis ensuite : en 19 combien de fois 3? 6 fois. Je mets 6 au quotient. Je multiplie 3 par 6, et je soustrais le produit 18, de 19. Il me reste encore 1, qui, ajouté au chiffre suivant 5, fait 15.

```
7953 | 3
.... | 2651
6
--
19
18
--
 15
 15
 --
 03
  3
  -
  0
```

Le même procédé dans cette troisième division, me

fait trouver 5 pour quotient, 15 pour produit, 0 pour reste.

J'abaisse le 3, et je divise comme à l'ordinaire. Le quotient est 1, le produit 3, le reste 0. D'où je conclus que 3 est contenu 2651 fois exactement dans 7953. Pour m'en assurer, je multiplie 2651 par 3; je retrouve le dividende : l'opération est donc bonne.

Dans un cas aussi simple, on a plutôt fait de prendre sur chaque chiffre du dividende la partie désignée par le diviseur. On aurait pu dire, par exemple, le tiers de 7 est 2 avec un reste. Ce reste est 1, qui, ajouté à 9, fait 19. Le tiers de 19 est 6. Le tiers de 15 est 5. Celui de 3 est 1. Donc 2651 est le tiers cherché de 7953.

Voici quelques autres exemples de cette abréviation :

$$\frac{12538}{2} = 6269; \frac{8764}{5} = 1752\,\tfrac{4}{5}; \frac{97593}{7} = 13941\,\tfrac{6}{7}.$$

40. Remarques. I. On commence la division par la gauche, afin que s'il y a des restes dans les premiers chiffres, on puisse les joindre aux chiffres suivans. En commençant par la droite, on serait presque toujours obligé de revenir sur ses pas.

II. Si le premier chiffre du dividende est plus petit que le diviseur, il faut chercher combien de fois celui-ci est contenu dans les deux premiers du dividende.

III. Lorsqu'après une soustraction il ne reste rien, et que le chiffre abaissé est moindre que le diviseur, il faut mettre zéro au quotient, et abaisser le chiffre suivant, s'il y en a. On met zéro au quotient, pour conserver la valeur respective des chiffres.

IV. Quand après une soustraction, il se trouve un reste, ce reste doit toujours être plus petit que le diviseur. S'il lui était même égal, c'est qu'alors le chiffre mis en dernier lieu au quotient, serait trop petit d'une unité. Il faut donc interrompre le cours d'une division, aussitôt que l'on trouve un reste qui n'est pas plus petit que le diviseur.

V. A mesure que l'on abaisse un chiffre, il est à propos de le marquer par un point : cela sert à reconnaître chaque fois où l'on en est, et de combien de chiffres le quotient doit être composé.

VI. On ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient; parceque l'arithmétique dont nous nous servons est décimale.

Troisième cas de la Division.

41. Si le dividende et le diviseur sont des nombres composés, si on a, par exemple, 147475 à diviser par 362, on commencera par écrire ces deux nombres, comme on le voit ici. . . . . 147475 } 362

puis on cherchera combien de fois le diviseur 362 est contenu dans le dividende 147475, ce que l'on fera par parties.

On dira donc d'abord : les trois premiers chiffres 147 du dividende ne contiennent pas les trois chiffres du diviseur (abstraction faite de la valeur relative de 147, qui, dans l'exemple présent, exprime des mille, pendant que 362 n'exprime que des unités). Il faut donc prendre les quatre premiers chiffres 1474 du dividende, et chercher combien de fois 362 y est contenu. Il y est 4 fois et plus, ce que je trouve en cherchant seulement combien de fois les deux premiers chiffres 14 du dividende contiennent 3, premier chiffre du diviseur. Je multiplie le diviseur 362 par le quotient trouvé 4, pour savoir si le produit 1448 est plus petit que 1474. Je mets donc 4 au quotient. Je soustrais ensuite 1448 de 1474; il me reste 26, et la première partie de la division est faite.

J'abaisse à côté du reste 26 le cinquième chiffre 7 que je marque d'un point, et le second membre de la division consiste à diviser 267 par 362 : la division n'est pas possible, parceque 267 ne contient pas même une fois 362 ; je pose donc zéro au quotient, et la seconde partie de la division est faite.

Ensuite j'abaisse à côté de 267 le dernier chiffre 5, et le troisième membre de la division consiste à diviser 2675 par 362. Je dis donc, en 26 combien de fois 3 ? 8 fois ; je multiplie 362 par 8, et je trouve le produit 2896, lequel étant plus grand que le dividende 2675, me fait connaître que 8 est trop grand. Je le diminue

donc d'une unité, et après avoir multiplié 362 par 7, je vois que le produit 2534 peut être soustrait de 2675. Soustraction faite, il reste 141; et parcequ'il n'y a plus de chiffres à abaisser, la division est finie. Ainsi le quotient est $407 + \frac{141}{362}$. Voyez le détail du calcul dans l'exemple ci-joint.

```
147475{362
  ....{407 141/362
1448
 2675
 2534
  141
```

Autre exemple. On demande le quotient de 790758 divisé par 394?

Je prends 790 pour premier membre de division, et après avoir mis un point sous le 0, je demande combien de fois 7 contient 3. Il le contient deux fois avec un reste: mais avant de mettre 2 au quotient, je multiplie 394 par 2, afin de voir si le produit pourra se soustraire de 790. Je trouve que le résultat de cette multiplication ne donne que 788: ainsi je mets 2 au quotient.

Puis je soustrais 788 de 790; il reste 2, à côté duquel j'abaisse le quatrième chiffre 7, et j'ai 27 à diviser par 394. La division ne peut se faire, et je mets 0 au quotient.

J'abaisse un nouveau chiffre; ce qui me donne 275, nombre plus faible encore que le diviseur 394. Je pose donc un second 0 au quotient.

Abaissant enfin le 8, je cherche combien de fois 2758 contient 394, ou plutôt combien de fois 27 contient 3. Au premier aspect, il semble que l'on doit mettre 9 au quotient: mais si l'on essaie de multiplier 394 par 9, on trouvera 3546, qui ne peut être soustrait de 2758.

En multipliant de même 394 par 8, on trouvera 3152, nombre encore trop fort: mais en ne multipliant le diviseur que par 7, le produit 2758 pourra se soustraire du dernier membre de division, et il ne restera rien. Le quotient demandé est donc 2007, sans reste.

42. « La preuve de l'exactitude de ces opérations se fait en ajoutant le dernier reste de la division au produit du diviseur par le quotient ». Leur somme doit

égaler le dividende. Car s'il est vrai, par exemple, que 362 soit contenu 407 fois dans 147475, avec le reste 141, ne faut-il pas nécessairement que $362 \times 407 + 141 = 147475$?

43. On peut aussi s'assurer qu'une division est exacte en supprimant les 9 contenus, 1°. dans le diviseur; 2°. dans le quotient; 3°. dans le produit de leurs restes; 4°. dans le dividende. Car après ces soustractions, les deux derniers restes doivent être égaux comme dans la multiplication.

Observez seulement que lorsque la division n'a pu se faire sans reste, il faut ajouter les chiffres de ce reste comme des unités simples, au produit du reste du diviseur par celui du quotient, et ôter de cette somme tous les 9 qu'elle contient.

Vérifions l'avant-dernier quotient par cette méthode. Le reste du diviseur 362 est 2; celui du quotient 407 est 2 aussi. Leur produit est 4. Le reste 141 donne 6, que j'ajoute à 4. La somme est 10; j'en ôte 9; reste 1, qui doit rester aussi du dividende 147475, si l'opération est bonne; c'est effectivement ce qui reste.

$$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

44. Remarques. I. Au lieu de demander combien de fois tout le diviseur est contenu dans tout le dividende, on demande seulement combien de fois le premier chiffre à gauche du diviseur est contenu dans le premier, ou dans les deux premiers chiffres à gauche du dividende. C'est que le produit de ce premier chiffre du diviseur par le quotient, décide communément du nombre de fois que tout le diviseur est contenu dans le dividende.

II. Je dis *communément*; car il arrive assez souvent que ce produit peut être soustrait du premier ou des deux premiers chiffres du dividende, et que lorsqu'on vient à comparer le produit total du diviseur par le même quotient, avec la partie correspondante du dividende, la soustraction n'est plus possible.

III. Cela arrive surtout, lorsque le second chiffre du diviseur est au-dessus de 5. Mais alors on regarde ce que le produit de ce second chiffre par celui que l'on veut

mettre au quotient, ferait refluer d'unités sur le produit du premier chiffre par ce même quotient, et on reconnaît aussitôt le chiffre qu'il convient d'employer.

IV. Quand le dividende et le diviseur sont terminés par des zéros, on peut effacer le même nombre de zéros dans l'un et dans l'autre, et faire le reste de la division suivant les règles précédentes. Ainsi ayant à diviser 417000 par 2500, je divise seulement 4170 par 25, et le quotient est 166 $\frac{20}{25}$. Pour diviser 43495000 par 2850000, je divise seulement 43495 par 2850; et j'ai 15 $\frac{745}{2850}$. De même le quotient de 100000 divisé par 1700 est 58 $\frac{14}{17}$.

V. Quand le diviseur seul est terminé par des zéros, on abrège la division, en séparant à la fin du dividende autant de chiffres qu'il y a de zéros à la fin du diviseur; on divise ensuite les autres par les chiffres restans du diviseur; on joint le reste de la division, s'il s'en trouve, à la gauche des chiffres qu'on a séparés; et on en fait une fraction : par exemple, ayant à diviser 238873 par 3600, je divise 2388 par 36, je trouve le quotient 66 et un reste 12 : je dis donc que le quotient cherché est 66 $\frac{1273}{3600}$. Le quotient de 324755 divisé par 300, est 1082 $\frac{155}{300}$. Le quotient de 843554 divisé par 1000, est 843 $\frac{554}{1000}$.

VI. On a dû voir par ce qui précède, que la division est l'opération inverse de la multiplication, et que par-conséquent ces deux règles peuvent se servir mutuellement de preuve.

VII. Ainsi pour apprendre en peu de temps la pratique de la division, commencez par multiplier un nombre par un autre. Divisez ensuite leur produit par l'un des deux (par le plus grand ordinairement, pour avoir plus tôt fait) : vous trouverez toujours l'autre pour quotient, sans reste. Vous saurez donc à chaque fois quel chiffre il faut mettre au quotient, et par là vous acquerrez promptement la facilité de diviser tous les autres nombres.

VIII. Lorsqu'on a pris au hasard un dividende et un diviseur, il y a tout le diviseur moins 1 contre 1 à parier, que la division ne se fera pas sans reste.

IX. Le quotient doit avoir autant de chiffres qu'il y a de membres de division : or le nombre de ces membres est toujours déterminé par celui des points que l'on met sous chacun de leurs derniers chiffres.

On peut donc, dès le premier membre de la division, savoir le nombre de chiffres que le quotient doit avoir.

Voici maintenant quelques Divisions toutes faites :

```
46728 { 21
 .....{ 2225
42
 47
 42
  52
  42
  108
  105
   (3)
```

```
72312146 { 8369
     .... { 8640
66952
 53601
 50214
  33874
  33476
   (3986)
```

```
823945687089 { 8247685671
           .. {          99
74229171039
 81653976699
 74229171039
 (7424805660)
```

En voici quelques autres à faire :

$$Y\ \frac{2567875}{2568}\quad Z\ \frac{38678267}{99887}\quad A'\ \frac{700200031}{683679}$$

DES FRACTIONS.

De la nature des Fractions en général, de leur valeur et de leur comparaison.

45. Une quantité quelconque est divisible en deux moitiés, en trois tiers, en quatre quarts, en cinq cinquièmes, etc. Donc si on ne prend qu'une moitié, ou qu'un ou deux tiers, ou qu'un, ou deux, ou trois quarts, etc., on n'aura qu'une portion plus ou moins grande de la quantité dont il s'agit. C'est cette portion que l'on désigne en général par le mot *fraction*.

46. L'idée de fraction comprend donc *l'espèce* et *le nombre* de parties que l'on veut prendre pour avoir une portion plus ou moins grande de telle ou telle quantité. Ainsi $\frac{1}{3}$ signifie que l'unité étant divisée en 3 parties égales, on en a pris une : la fraction $\frac{4}{5}$ exprime que l'unité étant divisée en 5 parties égales, on en a pris 4, etc.

Le nombre ou terme supérieur s'appelle *le numérateur* de la fraction, et l'inférieur s'appelle *le dénominateur;* ainsi dans la fraction $\frac{4}{5}$, le numérateur est 4, et le dénominateur est 5.

47. Une fraction proprement dite est donc une quantité moindre que l'unité, parceque son numérateur est plus petit que son dénominateur. Cependant il n'est pas rare de trouver des expressions en forme de fractions, dont le dénominateur est égal, ou même supérieur au dénominateur. Or, quand le numérateur est égal au dénominateur, la fraction est égale à l'unité; par exemple, $\frac{4}{4}$ signifiant que l'unité est divisée en 4 parties égales, et que l'on prend à la fois ces 4 parties, il est clair qu'on a l'unité entière. Ainsi $\frac{11}{11}=1 \ldots \frac{99}{99}=1$, etc. Et quand le numérateur surpasse le dénominateur, la valeur de la fraction surpasse l'unité : ainsi $\frac{12}{4}=3 \ldots \frac{49}{7}=7 \ldots \frac{103}{20}=5+\frac{3}{20}$, etc.

48. Il n'est pas toujours aisé de distinguer au premier

il suit qu'une méthode qui apprendrait à trouver, dans tous les cas qui en sont susceptibles, l'expression la plus simple d'une fraction, serait infailliblement fort utile. On l'a trouvée, cette méthode, et nous allons l'expliquer en parlant du calcul des fractions.

Du Calcul des Fractions; et d'abord de quelques opérations préliminaires.

OUTRE les quatre règles ordinaires que nous avons développées dans le calcul des nombres entiers, il y en a quelques autres qui sont particulières aux fractions. Elles consistent, 1°. à transformer tel nombre entier que l'on veut, en fractions; 2°. (et celle-ci est la plus usitée) à réduire plusieurs fractions au même dénominateur; 3°. à réduire une fraction quelconque à la plus simple expression. On sentira bientôt l'utilité de ces règles.

51. *Transformer les entiers en fractions.* On peut donner à un nombre entier la forme d'une fraction, en lui donnant 1 pour dénominateur; ainsi 6 mis en forme de fraction, est $\frac{6}{1}$... $8 = \frac{8}{1}$, etc.

On peut aussi le présenter sous une forme fractionnaire qui ait un dénominateur à volonté. Pour cet effet, on multiplie le nombre entier par le dénominateur qu'on a choisi, le produit est le numérateur de la fraction; ainsi pour réduire 6 à une fraction dont le dénominateur soit 7, on écrit $\frac{42}{7}$. Or, comme en faisant la division de 42 par 7, on a 6 au quotient, il est clair que $\frac{42}{7}$ et 6 sont deux expressions équivalentes.

S'il fallait réduire en une fraction seule un nombre entier joint à une fraction, on multiplierait le nombre entier par le dénominateur de la fraction, on ajouterait le numérateur à ce produit, et de la somme on ferait le numérateur de la fraction cherchée; ainsi $6\frac{3}{4}$ se réduit à la fraction $\frac{27}{4}$... $3\frac{1}{22}$ se réduit à $\frac{67}{22}$.

52. *Réduire plusieurs fractions au même dénominateur.*

Multipliez le numérateur, puis le dénominateur de

chaque fraction, par chacun des dénominateurs de toutes les autres fractions. Vous aurez d'autres fractions respectivement égales aux premières, et qui auront toutes le même dénominateur.

Voulez-vous, par exemple, réduire $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$ au même dénominateur? Multipliez les deux termes de la fraction $\frac{1}{2}$ par 4, vous aurez $\frac{4}{8}$; multipliez ensuite les deux termes de la fraction $\frac{3}{4}$ par 2, vous aurez $\frac{6}{8}$: les deux nouvelles fractions seront donc $\frac{4}{8}$ et $\frac{6}{8}$.

Pareillement pour réduire les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, au même dénominateur, on multipliera les deux termes de la fraction $\frac{2}{3}$ par 7, puis par 4, et on aura $\frac{2\times7\times4}{3\times7\times4}=\frac{56}{84}$. Multipliant de même ceux de la fraction $\frac{5}{7}$ par 3, puis par 4, on trouvera $\frac{5\times3\times4}{7\times3\times4}=\frac{60}{84}$. Multipliant enfin ceux de la fraction $\frac{3}{4}$ par 3, puis par 7, les produits seront $\frac{3\times3\times7}{4\times3\times7}=\frac{63}{84}$. Ainsi les trois fractions réduites sont $\frac{56}{84}$, $\frac{60}{84}$, $\frac{63}{84}$, et chacune est respectivement égale à celle dont elle tire sa première origine.

53. On pourrait réduire par la même méthode tant de fractions qu'on voudrait au même numérateur, en multipliant les deux termes de chacune par chaque numérateur des autres. Ainsi les trois fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, se réduisent à celles-ci, $\frac{10}{45}$, $\frac{30}{42}$, $\frac{30}{40}$; mais cette réduction au même numérateur trouve rarement son application.

54. *Pour réduire une fraction à l'expression la plus simple.*

Il faut examiner d'abord si le numérateur est plus grand que le dénominateur; car alors il faut diviser le numérateur par le dénominateur : ainsi $\frac{12}{4}$ se réduit à 3; $\frac{8}{3}$ se réduit à $2\frac{2}{3}$.

Il faut voir ensuite si le numérateur et le dénominateur ne pourraient pas être divisés tous deux sans reste par un même nombre; car alors l'expression deviendrait plus simple sans changer de valeur. Elle deviendra d'autant plus simple, que ses deux termes seront divisés par un plus grand nombre.

Il arrive souvent que cette réduction est impossible; mais comme il est rare que l'on puisse juger du premier abord, si elle est possible ou non, on peut s'en assurer

Digitized by Google

au moyen de certaines propriétés des nombres, dont nous ne rapporterons que les principales.

55. I. Tout nombre pair est divisible par 2 : ainsi tant que les termes d'une fraction seront des nombres pairs, ils pourront toujours être réduits à leur moitié. La fraction $\frac{128}{432}$, par exemple, se réduit à $\frac{8}{27}$, en divisant quatre fois par 2.

II. Tout nombre terminé par 0 est divisible par 5 et par 10. Ainsi la fraction $\frac{20}{90}$ se réduit à $\frac{2}{9}$.

III. Tout nombre terminé par 5, est divisible par 5. Ainsi $\frac{15}{85}$ se réduisent à $\frac{3}{17}$. De même $\frac{120}{215}$ se réduisent à $\frac{24}{43}$.

IV. Tout nombre tel que la somme de ses chiffres est un multiple de 3, est divisible par 3. Ainsi la fraction $\frac{268}{351}$ est divisible par 3, et se réduit d'abord à $\frac{96}{117}$, puis à $\frac{32}{39}$. Et si de plus le nombre divisible par 3 est pair, on peut alors le diviser par 6. On peut le diviser par 9, lorsque la somme de ses chiffres est multiple de 9 (31).

V. Quand le nombre qu'expriment les deux derniers chiffres d'un nombre est divisible par 4, le nombre lui-même peut se diviser par 4 : la fraction $\frac{184}{240}$ peut donc se réduire à $\frac{46}{60}$, puis à $\frac{23}{30}$, après quoi elle est irréductible. La fraction $\frac{2064}{3096}$ peut se réduire de même à $\frac{516}{774}$, ensuite à $\frac{172}{258}$, puis à $\frac{86}{129}$, et enfin à $\frac{2}{3}$.

VI. Tout nombre est divisible par 8, lorsque la partie de ce nombre exprimée par ses trois derniers chiffres est divisible par 8. Ainsi $\frac{888}{1432} = \frac{111}{304}$.

56. Au lieu d'essayer les unes après les autres ces diverses propriétés des nombres, on va plus directement au fait, en se servant de la méthode générale, fondée sur ce principe, « que pour réduire à l'expression la plus simple une fraction quelconque, il faut diviser ses deux termes par le plus grand diviseur commun ».

Or, pour trouver le plus grand commun diviseur possible de deux nombres quelconques, divisez le plus grand par le plus petit; et si la division se fait sans reste, le plus petit nombre est le plus grand diviseur cherché.

Si après la division il se trouve un reste, divisez le plus petit nombre donné par ce reste; et si la division se fait sans un nouveau reste, le premier reste est le plus grand diviseur cherché.

S'il se trouve un second reste, divisez le premier par

le second, et si la division se fait sans troisième reste, le second est alors le plus grand commun diviseur que vous puissiez trouver.

En général, le reste qui divise exactement le reste précédent, est le plus grand diviseur cherché.

Exemple. On veut réduire la fraction $\frac{91}{294}$ à l'expression la plus simple qu'il soit possible. Pour cela 1°. divisez 294 par 91; vous trouverez 3 pour quotient, 273 pour produit, et 21 pour reste.

2°. Divisez 91 par ce premier reste 21 : le quotient sera 4, le produit 84, et le second reste 7.

3°. Divisez le premier reste 21 par le nombre 7, et vous aurez 3 pour quotient exact. D'où vous conclurez que 7 est le plus grand commun diviseur de 294 et de 91.

4°. Divisant donc ces deux nombres par 7, vous aurez, sous l'expression la plus simple, la fraction $\frac{13}{42} = \frac{91}{294}$.

57. Reprenons ces diverses opérations, et faisons voir, 1°. que 7 est un diviseur commun des nombres proposés; 2°. qu'il est le plus grand de tous leurs diviseurs communs.

Puisque 7 divise 21, il doit diviser $21 \times 4 = 84$, et parconséquent $84 + 7 = 91$. Mais s'il divise 91, il doit diviser aussi $91 \times 3 = 273$, et parconséquent $273 + 21 = 294$. Il est donc diviseur commun des deux nombres proposés.

Il est aussi le plus grand de tous leurs diviseurs communs; car tout autre nombre qui diviserait 91 et 294, devrait diviser 21 qui reste de 294 après en avoir soustrait $91 \times 3 = 273$: il devrait également diviser 7, reste de 91 après en avoir soustrait $21 \times 4 = 84$. Or un nombre plus grand que 7 ne peut être un diviseur exact de 7.

58. Pour démontrer cette règle d'une manière générale, il faut observer que deux quantités ne sont divisibles sans reste par un même nombre, que lorsqu'elles sont des produits exacts de ce nombre. La plus grande quantité est produite par ce nombre pris plus de fois que dans la plus petite quantité. Or deux quantités A et B étant ainsi composées, si ayant ôté la plus petite de la plus grande A, autant de fois qu'il est possible, par exemple trois fois, il n'y a pas de reste, il est clair que A est composé de B pris trois fois, que B est composé de B pris une fois, et que parconséquent B est, dans ce cas, le plus grand commun diviseur des quantités A et B.

2°. Mais si ayant retranché B de A autant de fois qu'il est possible (c'est-à-dire trois fois dans cet exemple), il se trouve un reste C; alors A — C est une quantité composée de B pris trois fois juste; ou A — C = 3B; parconséquent si C est contenu un certain nombre de fois juste, par exemple, 4 fois dans B, il sera aussi contenu un nombre juste de fois dans A — C. Il est clair en effet qu'on aura B = 4C, et A — C = 3B deviendra A — C = 3 × 4C, d'où l'on tire A = 13C. Il faut donc ôter C de B autant de fois qu'il est possible, et si cela se fait sans reste, C est la quantité qui a servi à composer les quantités A et B.

3°. Mais si ayant ôté C de B autant de fois qu'il est possible, par exemple 4 fois, il se trouve un reste D; alors B — D est une quantité composée de C pris juste 4 fois, ou B — D = 4C. Donc si D est contenu un certain nombre de fois juste, par exemple 3 fois dans C, il sera justement aussi dans A et dans B, il sera le nombre qui aura servi à composer les quantités A et B; car on aura C = 3D. Donc dans l'équation B — D = 4C, on aura B — D = 4 × 3D, et parconséquent B = 13 D; et l'équation A — C = 3B deviendra... A — 3D = 3 × 13 D. Donc A = 42D.

En continuant ce raisonnement, on verra que le dernier reste qui se peut retrancher un certain nombre de fois juste du reste précédent, est la quantité qui a servi à former les deux quantités A et B, et parconséquent qu'il est leur plus grand commun diviseur.

Il est évident aussi que c'est la même chose de diviser une quantité par une autre, que d'en retrancher cette autre autant de fois qu'il est possible.

59. Quand la fraction ne se peut réduire à une expression plus simple, ces divisions donnent enfin l'unité pour dernier reste. Car l'unité est un diviseur commun à tous les nombres. Il est fâcheux cependant de ne pouvoir reconnaître qu'une fraction est irréductible, qu'après avoir fait tous les frais de calcul nécessaires pour s'en assurer.

Pour se rendre familière la pratique de cette règle, il n'y a qu'à multiplier successivement par un même nombre les deux termes de quelques fractions irréductibles. On verra que le plus grand diviseur commun des fractions provenues de ces multiplications, sera toujours le nombre par lequel on aura multiplié.

Par exemple, les deux termes de la fraction $\frac{2}{3}$ multipliés par 84, donnent $\frac{168}{252}$. Et pour ramener cette dernière fraction à la première, il n'y aura qu'à diviser d'abord 252 par 168, ensuite 168 par 84, reste de la première division. On trouvera que la seconde division se fait

exactement, et parconséquent que le plus grand commun diviseur cherché est 84.

Voici quelques fractions réduites :

$$\frac{441}{567}=\frac{7}{9}\ldots\frac{48}{272}=\frac{3}{17}\ldots\frac{840}{1848}=\frac{5}{11}\ldots\frac{3661}{11506}=\frac{7}{22}.$$

En voici quelques autres à réduire :

$$B'\ \frac{504}{1152}\ C'\ \frac{1248}{2016}\ D'\ \frac{14349}{38264}\ E'\ \frac{202994}{293215}.$$

De l'Addition des Fractions.

60. Pour ajouter ensemble des fractions, réduisez-les au même dénominateur, et de la somme de tous les numérateurs des fractions réduites, faites-en le numérateur d'une nouvelle fraction qui ait le dénominateur commun.

Ainsi pour ajouter les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, réduisez-les à celles-ci $\frac{3}{6}$ et $\frac{2}{6}$; leur somme est $\frac{5}{6}$.

Pour ajouter ensemble les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, je les réduis à celles-ci (52) $\frac{16}{24}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{18}{24}$; la somme des numérateurs est 46, j'ai donc $\frac{46}{24}$, et en réduisant à l'expression la plus simple, $1\frac{11}{12}$.

S'il y a des nombres entiers joints aux fractions, il faut ajouter leur somme à celle des fractions, ainsi $4\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}=6\frac{5}{6}\ldots 3\frac{2}{3}+4\frac{3}{4}=8\frac{5}{12}$.

De la Soustraction des Fractions.

61. Pour soustraire une fraction d'une autre, réduisez-les au même dénominateur, prenez la différence entre les deux numérateurs, et faites-en le numérateur d'une nouvelle fraction qui ait le dénominateur commun.

Voulez-vous, par exemple, soustraire $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$? réduisez ces fractions à celles-ci $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{12}$; il est clair que la différence est $\frac{5}{12}$.

S'il y a des nombres entiers joints aux fractions, il faut les soustraire à l'ordinaire, et joindre leur différence à la nouvelle fraction; ainsi pour ôter $3\frac{1}{2}$ de $4\frac{3}{4}$, il faut écrire $1\frac{2}{8}$, ou $1\frac{1}{4}$.

62. Mais si la fraction à soustraire est plus grande que celle dont on soustrait, ou si l'on a une fraction à soustraire

soustraire d'un entier, alors il faut réduire en fraction une unité de ce nombre entier. Par exemple, pour ôter $3\frac{1}{3}$ de $6\frac{1}{4}$, je réduis la quantité $6\frac{1}{4}$ à $5\frac{5}{4}$, et réduisant $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{4}$ au même dénominateur, j'ai $\frac{8}{12}$ et $\frac{15}{12}$; j'ôte $\frac{8}{12}$ de $\frac{15}{12}$, reste $\frac{7}{12}$; j'ôte 3 de 5, et j'ai 2 pour reste; ensorte que la différence cherchée est $2\frac{7}{12}$.

De même, pour ôter $\frac{2}{3}$ de 4, je réduis 4 à cette expression $3\frac{3}{3}$; desorte que retranchant $\frac{2}{3}$ de $3\frac{3}{3}$, reste $3\frac{1}{3}$. Pour ôter $\frac{4}{5}$ de 2, je réduis 2 à $1\frac{5}{5}$, et la différenceest $1\frac{1}{5}$.

De la Multiplication des Fractions.

63. Le multiplicateur d'une fraction peut être un nombre entier, ou un nombre fractionnaire. Dans le premier cas, on multiplie le numérateur seul par l'entier, et on divise le produit par le dénominateur de la fraction. Ainsi $\frac{2}{13}.5=\frac{10}{13}$.

Dans le second cas, on multiplie les deux numérateurs l'un par l'autre, et on divise leur produit par celui des deux dénominateurs. C'est ainsi qu'en multipliant $\frac{5}{7}$ par $\frac{3}{4}$, on trouve $\frac{15}{28}$ pour produit.

La raison de cette double règle est très-facile à comprendre. Car en se rappelant le principe de la multiplication en général, on verra que le produit doit toujours contenir le multiplicande, comme le multiplicateur contient l'unité (24). Or, dans le premier cas, le multiplicateur 5 contient cinq fois l'unité. Il faut donc que le produit contienne cinq fois aussi le multiplicande $\frac{2}{13}$, et parconséquent que le produit soit $\frac{10}{13}=\frac{2.5}{13}$.

Par la même raison, il faut dans le second cas, que le produit ne soit que les $\frac{3}{4}$ du multiplicande, puisque le multiplicateur n'est que les $\frac{3}{4}$ de l'unité. Or les $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$ sont $\frac{15}{28}$: le quart de $\frac{1}{7}$ en effet est $\frac{1}{2}$; donc le quart de $\frac{5}{7}$ est $\frac{5}{28}=\frac{5}{7.4}$: donc les trois quarts de $\frac{5}{7}$ sont $\frac{15}{28}=\frac{5.3}{7.4}$.

Autrement. Si au lieu de ne multiplier $\frac{5}{7}$ que par $\frac{3}{4}$, on avait eu à les multiplier par 3, il eût fallu, suivant la première règle, écrire $\frac{15}{7}$ pour produit. Donc en les multipliant par un nombre quatre fois plus petit que 3, ou par $\frac{3}{4}$, on doit avoir un produit quatre fois moindre que $\frac{15}{7}$; on doit donc avoir $\frac{15}{28}$.

Exemples. $\frac{5}{8}.9=\frac{45}{8}=5\frac{5}{8}\ldots\frac{11}{18}.36=\frac{11.36}{18}=\frac{11.2.18}{18}$ $=11.2=22\ldots\frac{19}{24}.12=\frac{19.12}{2.12}=\frac{19}{2}=9\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1.1}{2.2}$ $=\frac{1}{4}\ldots\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}\ldots\frac{3}{8}.\frac{2}{5}=\frac{6}{40}=\frac{3}{20}\ldots\frac{8}{19}.\frac{57}{64}=\frac{8.57}{19.64}$ $=\frac{8.3.19}{19.8.8}=\frac{3}{8}$.

64. Toute fraction proprement dite étant moindre que l'unité, le produit de deux fractions de cette espèce, doit être moindre que le multiplicande dans le même rapport que le multiplicateur est moindre que l'unité. C'est pourquoi $\frac{1}{2}$, par exemple, multiplié par $\frac{1}{2}$ donne $\frac{1}{4}$ pour produit, etc.

65. Si le multiplicande et le multiplicateur étaient des nombres entiers joints à des fractions, on les transformerait en une seule fraction chacun, pour les faire rentrer dans le second cas dont nous avons parlé.

Exemples. $3\frac{2}{9}.7\frac{1}{3}=\frac{29}{9}.\frac{22}{3}=\frac{638}{27}=23\frac{17}{27}\ldots12\frac{6}{7}.30\frac{2}{90}$ $=\frac{90}{7}.\frac{2701}{90}=\frac{2701}{7}=385\frac{6}{7}\ldots10\frac{3}{100}.15\frac{1}{10}=\frac{1003}{100}.\frac{151}{10}$ $=\frac{151453}{1000}=151\frac{453}{1000}$.

66. Remarques. I. On a souvent des fractions à multiplier par des nombres qui sont des diviseurs exacts des dénominateurs. Alors on parvient tout de suite à l'expression la plus simple du produit, en divisant le dénominateur par l'entier, au lieu de multiplier le numérateur. C'est ainsi, par exemple, que $\frac{5}{12}.2=\frac{5}{6}$, etc.

II. Souvent aussi le nombre par lequel on doit multiplier, est égal au dénominateur même. Alors le produit est égal au numérateur : ainsi, $\frac{3}{11}.11=3$, etc.

III. Quand on a plusieurs fractions à multiplier les unes par les autres, il est très-rare que le calcul ne puisse pas s'abréger, en effaçant des nombres communs au numérateur et au dénominateur du produit.

Exemples. $\frac{2}{1}.\frac{1}{4}.\frac{1}{6}.\frac{4}{1}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\ldots\frac{3}{7}.\frac{21}{40}.\frac{8}{9}=\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$. Voici quelques autres réductions à faire. $\frac{5}{9}.\frac{3}{5}=F'\ldots\frac{7}{10}.\frac{20}{21}=G'\ldots4\frac{5}{27}.\frac{27}{115}=H'$.

De la Division des Fractions.

67. Ou le diviseur d'une fraction est un nombre entier, ou c'est un nombre fractionnaire : s'il est entier, multipliez le dénominateur seul par ce nombre, et divisez par leur produit le numérateur de la fraction.

Exemple. $\frac{3}{4}$ divisés par 2 donnent $\frac{3}{4.2}=\frac{3}{8}$ pour quotient.

Si le diviseur est fractionnaire, multipliez le numérateur du dividende par le dénominateur du diviseur, et divisez leur produit par celui que vous donnera la mul-

tiplication du dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur.

Exemple. $\frac{2}{5}$ divisés par $\frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$.

Pour bien concevoir ces deux règles, il faut se ressouvenir que dans une division quelconque, le quotient doit être à l'unité, comme le dividende est au diviseur (34). Or, dans le premier cas, le dividende $\frac{3}{4}$ est les $\frac{3}{8}$ du diviseur 2; donc le quotient doit être les $\frac{3}{8}$ de l'unité.

Il est aisé d'ailleurs de s'en convaincre par le raisonnement suivant. Diviser une quantité quelconque par 2, c'est en prendre la moitié : or la moitié de $\frac{1}{4}$ est $\frac{1}{8}$; donc la moitié de $\frac{3}{4}$ est $\frac{3}{8}$.

Dans le second cas, si on eût eu simplement $\frac{2}{5}$ à diviser par 3, le quotient aurait été $\frac{2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$; mais comme le diviseur $\frac{3}{7}$ est sept fois plus petit que 3, le quotient $\frac{2}{15}$ est sept fois trop faible. Il faut donc le multiplier par 7, ce qui donne $\frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}$ pour le vrai quotient.

On peut le démontrer aussi de cette manière. Dans une division quelconque, le quotient doit être au dividende comme l'unité est au diviseur. Or le diviseur est ici les $\frac{3}{7}$ de l'unité; donc le dividende doit être les $\frac{3}{7}$ du quotient. On a donc $\frac{2}{5} = \frac{3}{7} q$, (en désignant par q le quotient cherché); d'où l'on tire $\frac{2}{5} : \frac{7}{3}$ ou $\frac{14}{15} = q$.

68. Les divisions des fractions se vérifient comme celles des nombres entiers, en multipliant le diviseur par le quotient.

Or le quotient d'une quantité divisée par une fraction proprement dite, doit être toujours plus grand que le dividende. Car le quotient est d'autant plus grand, que le diviseur est plus petit. Puis donc qu'il est égal au dividende, quand le diviseur est 1, il sera plus grand que lui toutes les fois que le diviseur sera moindre que l'unité.

Si le dividende et le diviseur sont des entiers joints à des fractions, on les transformera en une seule fraction chacun, sur laquelle on opérera ensuite à l'ordinaire.

69. Mais si le dividende est un nombre entier, et que le diviseur soit fractionnaire, alors on multipliera l'entier par le dénominateur de la fraction, et on divisera le produit par le numérateur.

Exemple. 8 divisé par $\frac{3}{5}$ donne $\frac{8 \cdot 5}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$; car

s'il ne s'agissait de diviser 8 que par 3, il faudrait écrire $\frac{8}{3}$; donc en divisant 8 par $\frac{3}{5}$, c'est-à-dire par une quantité cinq fois plus petite que 3, on doit avoir un quotient cinq fois plus grand que $\frac{8}{3}$: on doit donc avoir $\frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$. Il n'y aurait d'ailleurs qu'à mettre l'entier 8 sous la forme fractionnaire $\frac{8}{1}$, pour ramener cet exemple à la seconde règle.

Voici maintenant quelques exemples de divisions de fractions sur lesquels on peut s'exercer. (Les deux points mis entre le dividende et le diviseur signifient *divisé par*, comme le trait dont nous nous sommes servis jusqu'ici).

$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = I' \ldots \frac{18}{19} : \frac{9}{38} = K' \ldots \frac{1}{17} : \frac{1}{17} = L' \ldots 16 : \frac{16}{19} = M'$.

70. Remarques. I. Une portion de fraction, telle, par exemple, que les $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{7}$, s'appelle une fraction de fraction. Or il est évident que cette expression, $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{7}$ signifie qu'il faut prendre trois fois le quart de $\frac{2}{7}$. Il faut donc diviser d'abord $\frac{2}{7}$ par 4, ce qui donne $\frac{2}{7.4} = \frac{2}{28}$; puis multiplier ce quotient par 3, ce qui donnera $\frac{6}{28}$, produit de $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{7}$; d'où il faut conclure, 1°. que la valeur d'une fraction de fraction se trouve en multipliant l'une par l'autre les deux fractions qui l'expriment; 2°. qu'il n'y a parconséquent aucune différence entre la valeur de $\frac{2}{7}$ de $\frac{3}{4}$, et la valeur de $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{7}$.

II. Souvent la fraction que l'on doit diviser a le même dénominateur que la fraction par laquelle doit se faire la division. Alors on a tout de suite pour quotient la fraction des deux numérateurs. Ainsi pour diviser $\frac{3}{5}$ par $\frac{4}{5}$, il n'y a qu'à écrire $\frac{3}{4}$.

III. Si le numérateur du dividende peut se diviser sans reste par le numérateur du diviseur, il faut effectuer cette division, afin de parvenir immédiatement à l'expression la plus simple. Même remarque à faire sur les deux dénominateurs. Exemple. $\frac{9}{33}$ divisés par $\frac{3}{11}$ donnent 1 pour quotient.

IV. Il n'est pas rare de trouver deux numérateurs ou deux dénominateurs divisibles par un même nombre. Alors on simplifie le calcul en exécutant cette division. Soit, par exemple, la fraction $\frac{15}{16}$ à diviser par $\frac{5}{8}$. On divisera d'abord les numérateurs par 5, puis les dénominateurs par 8; le quotient sera $\frac{3}{2}$.

DES FRACTIONS DÉCIMALES.

17. Par fractions décimales, on entend généralement toutes les fractions qui ont pour dénominateur l'unité suivie d'un ou de plusieurs zéros. Telles sont les fractions $\frac{3}{10}$, $\frac{23}{100}$, $\frac{541}{1000}$, $\frac{8}{10000}$, etc.

On voit bien que sous cette forme elles rentrent dans la classe des fractions ordinaires. Ainsi on peut les assujétir aux mêmes règles, et les calculer avec la même facilité.

Mais pour abréger le calcul, on a imaginé de sous-entendre les dénominateurs des fractions décimales, et de substituer aux règles générales quelques règles particulières, dont voici le principe.

72. La numération ordinaire a pour base la convention, que tout chiffre placé à la droite d'un autre, lui donne une valeur décuple (10). Ainsi pour écrire trois dixaines, on met zéro sur la droite du 3, et on écrit 30; donc pour écrire trois dixièmes, il suffit de mettre un zéro sur la gauche du 3, comme on le voit ici 03.

Seulement pour fixer le rang des unités simples, on est convenu de le séparer du rang des dixièmes par une virgule, et au lieu d'écrire $\frac{3}{10}$, on écrit 0,3. On écrirait 0,2 pour deux dixièmes; 0,7 pour sept dixièmes; 0,9 pour neuf dixièmes; et si on avait dix, ou vingt, ou trente dixièmes à écrire, on en ferait une, ou deux, ou trois unités.

73. En suivant la même marche, on verra que puisque les centaines occupent le troisième rang vers la gauche, à partir de celui des unités, les centièmes doivent occuper le troisième rang en sens contraire. Et comme pour écrire cinq cents, on écrit 500, il est clair que pour écrire cinq centièmes, on peut se servir de l'expression suivante: 0,05. Pour exprimer huit mille, on écrit 8000; donc pour exprimer huit millièmes, on écrira 0,008, etc. etc.

Si au lieu de huit millièmes, on eût voulu en écrire deux cent douze, on se serait servi de cette expression 0,212. En général on écrit toujours le numérateur comme les nombres entiers.

74. D'après cela on devinera sans peine la valeur des quantités suivantes:

$$0,1 = N' \ldots 3,42 = O' \ldots 354,0063 = P' \ldots 8,700201 = Q'.$$

Il ne sera guères plus difficile de transformer en chiffres les quantités que voici :

Trois dix-millièmes = R′.

Mille + quatre centièmes = S′.

Neuf + deux millionièmes = T′.

Treize mille cent-millionièmes = U′.

75. Cela posé, on voit que le premier rang des décimales sur la droite de la virgule, exprime des dixièmes; que le second rang exprime des centièmes, et ainsi de suite : de manière que 2,9654 n'est qu'une expression abrégée de la quantité $2 + \frac{9}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{4}{10000}$, que l'on peut réduire à celle-ci $2 + \frac{9654}{10000}$.

Passons aux règles du calcul de ces fonctions.

De l'Addition, Soustraction, Multiplication et Division des Fractions Décimales.

Si aux règles déjà connues pour les nombres entiers, on ajoute celle qui concerne la virgule des décimales, rien n'est plus simple ni plus commode que le calcul de ces fractions.

I. Soit donc proposé d'ajouter 4852,791...4,00745 ...2,7...0,0049. J'écris d'abord ces quatre nombres l'un sous l'autre, avec cette seule précaution que les virgules se trouvent dans la même colonne, comme vous le voyez ici :

```
4852,791
   4,00745
   2,7
   0,0049
-----------
4859,50335
```

Puis j'ajoute ces nombres à l'ordinaire, et j'ai soin de placer la virgule de la somme totale sous la colonne des autres virgules.

Autre exemple :

```
 37,5602385642
 91,7832036785
  8,12
  1,30005
-------------
138,7634922427
```

II. La soustraction des décimales se fait comme celle des nombres entiers. Il suffit, pour l'entendre, de jeter les yeux sur les exemples suivans :

57,02	4,8274	6,00435	3,842
48,1	2,0139	0,17	1,004554
8,92	2,8135	5,83435	2,837446

III. La multiplication des décimales ne diffère presque pas de celle des nombres entiers. On multiplie à l'ordinaire tous les chiffres du multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, sans avoir d'abord égard aux virgules : mais lorsqu'on a pris la somme de chaque produit, pour avoir un produit total, il faut séparer par une virgule autant de chiffres sur la droite, qu'il y a de décimales dans le multiplicande et le multiplicateur : ensorte que si cette somme n'était pas composée d'autant de chiffres qu'il y a de décimales dans ces deux nombres, il faudrait mettre sur la gauche un nombre suffisant de zéros. (Voyez le second exemple).

43,7	2,4542	3,7	2132
13	0,0053	4,12	0,100103
1311	73626	74	6396
437	122710	37	2132
568,1	0,01300726	148	2132
		15,244	2,13419596

77. Ces multiplications peuvent se vérifier par la simple suppression des 9 (30) ou par la division. Quant à ce que la règle a de particulier pour les décimales qu'il faut séparer, on peut s'en rendre raison de cette manière. Le produit doit toujours être au multiplicande, comme le multiplicateur est à l'unité (24). Donc si le multiplicateur exprime des dixièmes de l'unité, par exemple, le premier doit exprimer des dixièmes du multiplicande. Donc si le multiplicande exprime des centièmes de l'unité, le produit doit alors donner des millièmes de l'unité. Ainsi $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = 0,001$. Or il est clair que pour avoir ces millièmes d'unité, il faut que le produit ait trois décimales, c'est-à-dire, autant qu'il y en a dans les deux facteurs ensemble.

78. Lorsque le multiplicande a des décimales, et que

le multiplicateur est 10, ou 100, ou 1000, etc., il suffit de retirer la virgule vers la droite, d'autant de rangs qu'il y a de zéros dans le multiplicateur. Ainsi $45,3289 \times 100 = 4532,89 \ldots 0,007854 \times 10000 = 78,54$ $36,5 \times 1000 = 36500$.

79. Si le multiplicande et le multiplicateur avaient un grand nombre de décimales, l'opération serait fort longue, et donnerait un résultat beaucoup plus exact qu'on n'en a besoin communément. Alors on peut simplifier le calcul, de cette manière.

1°. Multipliez tous les chiffres du multiplicande par le premier à gauche du multiplicateur.

2°. Multipliez-les ensuite par le second chiffre à gauche du multiplicateur; mais en écrivant ce produit, ne tenez compte que des dixaines que la multiplication du premier chiffre à droite du multiplicande pourra donner; ajoutez-les au produit de son second chiffre; et conséquemment écrivez-en la somme sous le premier chiffre du produit déjà écrit.

3°. Servez-vous du troisième chiffre du multiplicateur pour multiplier ceux du multiplicande, à ne commencer qu'au second : encore faudra-t-il ne retenir que les dixaines de ce produit pour les ajouter aux unités du suivant. Vous en écrirez la somme sous les deux produits déjà écrits.

4°. A mesure que vous avancerez vers la droite du multiplicateur, vous commencerez la multiplication par un chiffre plus avancé vers la gauche du multiplicande, et retenant les dixaines de ce premier produit, vous les ajouterez aux unités du suivant, jusqu'à ce que vous soyez parvenu au dernier chiffre du multiplicateur.

5°. Ajoutez tous les produits, et dans leur somme séparez autant de décimales qu'il y en avait dans le multiplicande, lorsque vous l'avez multiplié par les unités du multiplicateur, ou, ce qui est plus général, voyez quel rang tiennent dans les deux racines, la décimale par laquelle vous multipliez chaque fois, et celle par laquelle commence alors la multiplication. La somme de ces deux rangs indiquera toujours le nombre de décimales que doit avoir le produit général.

Trois exemples suffiront pour rendre cette méthode familière.

9,34528	2,302585	0,234567
3,44776	0,984977	0,003431
2803584	20723265	703701
373811	1842068	93827
37381	92103	7037
6541	20723	234
654	1611	0,000804799
56	161	
32,22027	2,2679931	

Dans le premier, je multiplie d'abord par 3, et j'écris le produit : ensuite par 4, en disant 4 fois 8 = 32, que je n'écris pas : mais je retiens les trois dixaines pour les ajouter au produit suivant. Je dis donc 4 fois 2 = 8, et 3 de retenues font 11. J'écris 1 sous le 4, et je continue à l'ordinaire.

Puis je multiplie par le second 4, en commençant par le 2 du multiplicande. 4 fois 2 font 8. Je retiens 1, parce que 8 approche plus de 10 que de 1, et je dis : 4 fois 5 font 20, et un de retenu font 21. J'écris 1 dans le même rang que les premiers chiffres des autres produits, etc. etc.

Après avoir fait toutes ces multiplications, j'ajoute les produits, et je sépare cinq décimales, parcequ'il y en avait cinq au multiplicande, lorsque j'ai multiplié par les 3 unités du multiplicateur, ou, parcequ'en multipliant par la première décimale du multiplicateur, j'ai commencé par la quatrième du multiplicande.

En faisant tout au long cette multiplication, on aurait trouvé 32,2202825728, c'est-à-dire, que le produit trouvé par la méthode abrégée, ne diffère pas du produit exact de $\frac{2}{100000}$ d'unités.

Afin de reconnaître à quelles décimales du multiplicande et du multiplicateur on est à chaque fois, il est à propos de les marquer d'un point à mesure que l'on s'en sert. Voyez les exemples.

Comme il est aisé de se rendre raison des différentes parties de cette méthode, nous laissons à chercher ces petits détails. Nous observerons seulement que dans le produit du troisième exemple, il faut ajouter trois zéros, parceque 3 étant au troisième rang des décimales dans le multiplicateur, et 7 au sixième du multiplicande, le produit doit avoir 9 décimales.

80. IV. La division des décimales ne diffère de celle des nombres entiers, qu'en ce qu'il faut séparer dans le quotient autant de chiffres sur la droite, qu'il y a de décimales de plus dans le dividende que dans le diviseur.

```
6,9345 { 3
  .... { 2,3115
6
0,9
 9
,03
 3
 04
  3
  15
  15
   0
```

```
8,445 { 3,22
   .. { 2,6
644
 2005
 1932
   73
```

```
49,1    { 20.074
40,148  { 2,44
 89520
 80296
  92240
  80296
  11944
```

Ainsi dans le second exemple, on a procédé à la division, comme si l'on eût eu 8445 à diviser par 322. Le

quotient s'est trouvé 26. Mais parceque le dividende avait trois décimales, et que le diviseur n'en avait que deux, on en a mis une au quotient, en plaçant la virgule avant le 6.

81. Lorsque le diviseur a plus de décimales que le dividende (voyez le 3e exemple), on ajoute autant de zéros que l'on veut au dividende; ensorte cependant que cela rende le nombre de ses décimales un peu plus grand que celui des décimales du diviseur, afin d'en avoir quelques-unes au quotient. Ici on est censé en avoir ajouté quatre au dividende; car si l'on divise 49,10000 par 20,074, on trouvera le quotient 2,44.

Si l'on veut avoir égard aux restes de ces sortes de divisions, il faut leur ajouter de nouveaux zéros, et les quotiens qu'on en tirera, en continuant la division par le même diviseur, seront de nouvelles décimales; ainsi, dans le second exemple, ajoutant trois zéros au reste 73, on aurait le quotient 2,6226, avec un autre reste 228.

82. La règle pour la division des décimales est fondée sur ce que le quotient doit toujours être à l'unité, comme le dividende est au diviseur. En effet, le quotient doit exprimer des dixièmes de l'unité, par exemple, toutes les fois que le dividende exprime des dixièmes du diviseur. Or pour exprimer des dixièmes du diviseur, il faut que le dividende ait une décimale de plus que lui. Il faut donc alors que le quotient ait une décimale, c'est-à-dire autant qu'il y en a de plus dans le dividende que dans le diviseur.

Quand il faut diviser par 10, par 100, ou par 1000 une fraction décimale, il suffit d'avancer la virgule d'un, de deux, ou de trois rangs vers la gauche. Ainsi $\frac{124,65}{100} = 1,2465 \ldots \frac{8,34}{1000} = 0,00834$.

83. Lorsque par la méthode ordinaire les divisions seraient trop longues, à cause du grand nombre de décimales, on peut en abréger le calcul de la manière suivante.

Je suppose que l'on veuille vérifier le produit 32,22027 trouvé ci-dessus, en le divisant par 9,34528. Après avoir disposé ces deux nombres comme dans la division ordinaire, je demande en 32 combien de fois 9? Je mets 3 au quotient. Ensuite je multiplie tout le diviseur par 3, et je soustrais le produit du dividende; reste 418443.

Je divise ce reste, en disant, combien de fois 9 est-il contenu dans 41 ? Je mets 4 au quotient ; et je multiplie le diviseur par 4 : je dis donc 4 fois 8 font 32, que je n'écris pas. Je retiens seulement les trois dixaines que j'ajoute au produit suivant, comme on l'a vu dans la multiplication. Car ce n'est ici que l'opération inverse.

Soustrayant de 418443 ce qui provient de cette multiplication, je divise le reste 44632 par le même diviseur, et je mets au quotient un second 4 par lequel je multiplie le diviseur, à commencer au 2. Je dis donc, 4 fois 2 font 8 ; je retiens 1, que j'ajoute à $20 = 5 \times 4$; et ainsi de suite, jusqu'à ce que j'aye trouvé 3,44776.

```
32,22027 { 9,34528
28 03584 { 3,44776
 418443
 373811
  44632
  37381
   7251
   6541
    710
    654
     56
     56
      0
```

De la transformation et de l'utilité des Décimales.

84. On sait que les fractions ordinaires peuvent être transformées en une infinité d'autres, qui auraient toutes la même valeur. Les fractions décimales ont le même avantage d'une manière encore plus simple ; car soit la fraction 0,4 : il est clair que sa valeur ne changera pas tant que son numérateur et son dénominateur seront multipliés par le même nombre ; et si 10, ou 100, ou 1000, etc. sert de multiplicateur, il est également clair qu'en ajoutant un, ou deux, ou trois zéros sur la droite du 4, on fera d'un seul coup la multiplication du numérateur et du dénominateur (73). Ainsi $0,4 = 0,40 = 0,400 = 0,4000 =$ etc.

85. Il suit de là que lorsqu'une fraction décimale est terminée par des zéros, on peut les supprimer tous sans altérer sa valeur.

Mais si on supprimait d'autres chiffres que des zéros,

on sent bien que la fraction diminuerait de valeur : en supprimant, par exemple, le chiffre 3, dans la quantité 0,683, il ne reste plus que 0,68, quantité moindre de $\frac{3}{1000}$ que la précédente.

86. Cette diminution est d'autant moins sensible, que la fraction a plus de chiffres. Ainsi la quantité 0,680003 n'est diminuée que de $\frac{3}{1000000}$, lorsqu'on retranche le dernier chiffre 3. On peut donc négliger plusieurs décimales dans une quantité qui en a beaucoup, sans diminuer sensiblement la valeur de cette quantité.

87. Comme il en résulte pourtant une petite erreur, on doit la corriger, du moins en partie, quand cela est possible : et cette correction consiste à ajouter une unité au dernier des chiffres conservés, toutes les fois que le premier sur la gauche de ceux que l'on retranche surpasse 5. Si on négligeait, par exemple, les quatre dernières décimales de la fraction 0,12346889, il faudrait écrire 0,1235, et non 0,1234.

La raison en est que 0,1235 diffère moins de la quantité proposée 0,12346889, que 1234. Car la fraction 0,1235 équivaut à 0,12350000, et la fraction 0,1234=0,12340000. La quantité proposée se trouve comprise entre ces deux fractions, mais elle approche davantage de la première.

88. En général, ou le premier des chiffres retranchés est au-dessous de 5, ou c'est un 5, ou il surpasse 5. Dans le premier cas, il ne faut rien ajouter au chiffre qui reste le dernier. Dans le second cas, on peut indifféremment ajouter ou non une unité à ce dernier chiffre; mais dans le troisième cas, l'erreur sera toujours moindre, si on ajoute cette unité.

Soit, pour exemple, la quantité 9,685243 que je suppose exprimer des livres et des parties décimales de livre de notre monnaie ; si on ne veut retrancher que les trois derniers chiffres 243, qui valent à peine $\frac{1}{20}$ de denier, on écrira 9,685. Si l'on veut retrancher les quatre derniers chiffres 5243, dont la valeur n'est guère que d'un denier, on écrira indifféremment 9,68 ou 9,69. Mais en supprimant les cinq derniers chiffres 85243, qui équivalent environ à 20 deniers = 1^{s} 8^{d}, il faudra écrire 9,7, au lieu de n'écrire que 9,6 ; en effet, le résultat total de

la quantité proposée étant, à très-peu de chose près, $9^{\#}\ 13^{s}\ 8^{h}$, on en approche davantage en écrivant $9,7 = 9^{\#}\ 14^{s}$, qu'en n'écrivant que $9,6 = 9^{\#}\ 12^{s}$.

89. Dans les calculs ordinaires, on a rarement besoin de plus de six décimales : souvent même deux ou trois suffisent.

90. Lorsque les premiers chiffres à gauche de deux fractions décimales ne sont pas les mêmes, il est clair que la plus grande est celle dont le premier chiffre surpasse celui de l'autre. Ainsi 0,8 surpasse 0,79...0,54 surpasse 0,49999. Par la même raison, 0,111 surpasse 0,1109999.

91. Et si les premiers chiffres d'une fraction décimale sont les mêmes que ceux d'une autre fraction, la plus grande sera toujours celle qui aura quelques chiffres de plus, pourvu qu'ils ne soient pas tous des zéros. La fraction 0,76324102, par exemple, est plus grande que la fraction 0,76324.

92. C'est de là que dérive la principale utilité des décimales. Elle consiste à approcher de plus en plus de l'égalité avec les différentes expressions numériques dont il n'est pas possible d'avoir rigoureusement la valeur. Or toutes les parties des Mathématiques offrent une foule d'exemples de ces sortes d'approximations : en voici quelques-uns tirés de la simple Arithmétique.

Il est bien rare qu'un nombre pris au hasard, soit exactement divisible par un autre nombre pris de même (44). Presque toujours il y a un reste que l'on joint au quotient en forme de fraction. Par exemple, en divisant 147475 par 362, on a trouvé (41) pour quotient 407 avec le reste 141, dont on a fait la fraction $\frac{141}{362}$ que l'on a ajoutée au quotient. Mais cette fraction est incommode, quand il s'agit de l'évaluer sous cette forme. On a donc imaginé un moyen de transformer ces fractions en d'autres, dont la valeur soit la même, ou du moins qui en approchent autant que le calculateur le juge à propos.

93. Ce moyen se réduit à ajouter un zéro à chaque reste de division, afin de pouvoir continuer de diviser : et comme en ajoutant un zéro, ce reste devient dix fois trop grand, on corrige l'erreur qui en résulte en plaçant

au rang des dixièmes, le chiffre provenu de cette division ultérieure.

Reprenant donc l'exemple qui précède, j'ajouterais un zéro au reste 141, et j'aurais 1410 à diviser par 362. Le quotient serait 3, que j'écrirais au rang des dixièmes; le nouveau reste serait 324, auquel je pourrais ajouter un zéro pour en former le nouveau dividende 3240. Je diviserais ce nombre par le même diviseur 362, ce qui me donnerait 8 pour quotient, et 344 pour reste. Le 8 serait mis au rang des centièmes, et l'addition d'un troisième zéro me ferait trouver 9 pour le rang des millièmes. Il y aurait encore un reste 182 que je négligerais au cas qu'il suffît d'avoir trois décimales. Le quotient cherché serait donc $407,389 = 407\frac{141}{362}$, à moins d'un millième près.

94. Toutes les fractions ordinaires peuvent se transformer de même en fractions décimales qui leur soient parfaitement égales, ou qui en approchent du moins autant que l'on voudra : $\frac{1}{2}$, par exemple, se transforme en 0,5, dont la valeur est exactement la même : mais $\frac{1}{3}$ n'est susceptible que d'une approximation infinie, à laquelle on peut procéder ainsi. Ajoutez un zéro au numérateur 1, et divisez 10 qui en résulte, par le dénominateur 3. Le quotient le plus approché en nombres entiers sera 3, que vous placerez au rang des dixièmes; il restera 1, auquel vous ajouterez un zéro, comme ci-dessus; et vous aurez encore une fois 10 à diviser par 3. Le quotient sera donc le même que le précédent, et il est clair que cela n'aura jamais de fin. On a donc $\frac{1}{3} = 0,33333$, etc., et parconséquent $\frac{2}{3} = 0,66666$, etc.

La même méthode fait trouver $\frac{1}{4} = 0,25$; donc $\frac{3}{4} = 0,75$. On trouve aussi que $\frac{1}{5} = 0,2$; donc $\frac{4}{5} = 0,8$. La fraction $\frac{1}{6}$ se transforme en 0,16666, etc., où l'on voit que le même chiffre revenant toujours, il n'est pas possible d'avoir exactement en décimales la valeur de $\frac{1}{6}$.

La fraction $\frac{1}{7}$ est dans le même cas. On ne peut la mettre en décimales sans trouver 0,142857 142857 142857, etc. Or le retour périodique des mêmes chiffres annonce l'impossibilité d'une transformation rigoureuse. Il est vrai que dans les deux derniers exemples, on peut pousser aussi loin que l'on veut l'approximation qui en ré-

sulte, dans l'un en écrivant le même chiffre, dans l'autre, et répétant la même période, sans se donner la peine de recommencer le calcul.

95. En général il est impossible de réduire en décimales une fraction ordinaire dans deux cas différens. Le premier a lieu toutes les fois que deux divisions successives donnent le même reste. Le second, lorsque les chiffres du quotient reviennent dans le même ordre.

Il suit de là que le dénominateur fait connaître la limite la plus reculée du retour périodique dont il s'agit. Le dénominateur 7, par exemple, indique qu'en réduisant $\frac{1}{7}$ en décimales, les chiffres ne peuvent reparaître dans le même ordre, plus tard qu'au septième rang. On en trouvera aisément la raison, en y réfléchissant un peu. Il est plus ordinaire cependant qu'ils reviennent, dans des cas semblables, avant le rang désigné par le dénominateur. On peut le vérifier sur la fraction $\frac{3}{13}$ entre autres.

96. S'il est toujours facile de transformer en décimales les fractions ordinaires, on éprouve souvent de la difficulté pour ramener les premières à celles-ci. On opère néanmoins cette réduction d'une manière bien facile dans les exemples les plus familiers.

On suppose que l'on demande en fraction ordinaire la valeur de 0,3333, etc.... Si on multiplie par 10 la quantité donnée, on aura (78) 3,333, etc.; et si on la soustrait de ce produit, il ne restera qu'une quantité neuf fois plus grande que 0,3333, etc. Ce reste est 3, dont la neuvième partie est $\frac{1}{3}$. On conclura donc que 0,3333, etc. $= \frac{1}{3}$, comme on le sait d'ailleurs.

Il en est de même de la fraction 0,142857 142857 etc. qui, multipliée par 10, devient 1,42857 142857 etc. Si on retranche de ce produit le triple de la quantité donnée, le reste ne sera que sept fois plus grand que cette quantité. Or le triple de 0,142857 142857 etc. est 0,42857 142857 etc. Le reste sera donc 1, dont la septième partie est $\frac{1}{7}$, comme ci-dessus.

La fraction 0,125 peut se transformer en $\frac{1}{8}$, par la méthode du plus grand commun diviseur (56). Mais outre qu'il y a beaucoup de fractions décimales qui ne sont pas susceptibles d'une transformation exacte, on voit bien que ce serait un tâtonnement perpétuel, s'il n'y avait pas d'autres méthodes.

De quelques autres fractions.

97. L'espèce des fractions est toujours relative à l'unité dont elles font partie; et comme dans les sciences, dans les arts, dans la société même, on emploie diffé-

rentes sortes d'unités, il est à propos de rappeler ici les noms qu'on a donnés à leurs fractions les plus usitées.

I. Le besoin très-fréquent d'un grand nombre de divisions du cercle, détermina les anciens Géomètres à supposer que tous les cercles étaient composés de 360 parties égales, généralement connues sous le nom de *Degrés*. (On préféra le nombre 360 à tous les autres nombres inférieurs, parcequ'il a plus de diviseurs exacts; et on le préféra à tous les nombres supérieurs, pour éviter l'embarras d'une plus grande quantité de chiffres.) Chaque degré est donc $\frac{1}{360}$ de la circonférence du cercle auquel il appartient.

Mais comme on a souvent besoin aussi de différentes parties du degré, on a imaginé de le considérer à son tour comme une unité formée de l'assemblage de 60 parties égales, appelées des *Minutes*. Chaque minute est donc $\frac{1}{60}$ de degré, et parconséquent $\frac{1}{21600}$ de cercle.

Pour mettre encore plus de précision dans la mesure des arcs circulaires, on a sous-divisé les minutes en 60 *Secondes* chacune; les secondes ont été sous-divisées en 60 *Tierces;* les tierces en 60 *Quartes*, et ainsi de suite. Il y a donc 1296000 secondes dans chaque circonférence de cercle, et parconséquent 77760000 tierces. Chaque degré est de 3600 secondes, et de 216000 tierces.

On a cherché à abréger le discours, en marquant les diverses parties du cercle par des signes particuliers : de manière qu'au lieu d'écrire tout au long 18 degrés 34 minutes 53 secondes 26 tierces, on n'écrit simplement que $18^{\circ}\,34'\,53''\,26'''$.

II. La division du temps en *jours* est aussi ancienne que le monde; chaque lever du soleil faisait une époque trop brillante dans la nature, pour que les premiers hommes n'en tirassent pas une mesure du temps.

Mais les divers travaux de la journée exigeant des sous-divisions de cette mesure, on imagina de partager le jour en plusieurs parties égales. Le nombre de ces parties étant arbitraire, on choisit le nombre 24, duquel on forma les 24 *heures* du jour.

La durée d'une heure a été sous-divisée en 60 minutes, celle d'une minute en 60 secondes, et ainsi de suite; le jour

jour est donc de 1440′ = 86400″ = 5184000‴, et la minute = 3600″. Mais ces sous-divisions sont de beaucoup postérieures à la première, parcequ'il fallait avant d'en pouvoir faire usage, trouver le moyen de mesurer d'aussi petites parties du temps, et on sait que l'horlogerie est un art assez récent.

III. Pour mesurer les distances, il a fallu se servir d'une unité quelconque, dont la longueur fût connue, et la porter successivement d'un bout à l'autre de chaque distance à mesurer. Rien dans le monde ne fixant cette unité, chaque peuple en a pris une à sa fantaisie. La plus usitée parmi nous est la toise.

Or la Toise se divise en six parties égales, que l'on nomme *Pieds*; le pied se divise en 12 *Pouces*; le pouce en 12 *Lignes*, et la ligne en 12 *Points*. Desorte que le pied est $\frac{1}{6}$ de la toise, que le pouce en est $\frac{1}{72}$, que la ligne en est $\frac{1}{864}$, etc.

Les besoins de la Société et du Commerce n'eurent pas plutôt introduit l'usage des poids et des monnaies, que chaque nation, et presque chaque ville voulut avoir les siens. De là cette diversité vétilleuse dans la manière de peser et de compter, chez les différens peuples.

Comme il fallait cependant établir une unité de poids, et une unité de monnaie pour base de ces deux opérations, chaque pays en choisit une. La nôtre s'appelle *la Livre*; et nous en distinguons de deux espèces, *la Livre Poids* et *la Livre Monnaie*.

IV. La première se divise en 16 parties égales, appelées des *Onces*; chaque once contient 8 *Gros*; le gros contient 72 *Grains*. Une livre pèse donc 128 gros, ou 9216 grains. On emploie assez souvent une autre fraction de la livre, qui en est la moitié, et on la nomme *le Marc*; le marc ne contient donc que 8 onces.

V. L'autre espèce de livre se divise en *Sous*; elle en contient 20. C'est une mesure fictive, puisque nous n'avons point de pièce de monnaie qui vaille 20 sous. Le sou contient 12 *Deniers*. Ainsi, il y a 240 deniers dans chaque livre. Tout le reste de nôtre monnaie se rapporte à ces trois sortes : livres, sous et deniers.

98. Cela posé, appliquons les premières règles de

l'Arithmétique à ces différentes grandeurs ; et d'abord proposons-nous d'en ajouter plusieurs ensemble. Pour cet effet, on commence par écrire, les unes sous les autres, les parties qui ont une même dénomination : puis on prend successivement la somme de chaque colonne, en allant de droite à gauche, et on pose à chaque fois ce qui reste, quand on en a ôté, s'il y a lieu, de quoi former une ou plusieurs unités, que l'on ajoute à la colonne suivante. Quelques exemples suffiront pour l'intelligence d'une règle aussi élémentaire.

36°	25′	47″	3ʲ	17ʰ	42′	16″
49	33	28	9	13	25	33
55	31	49	11	23	17	42
141	31	4	25	6	25	31

9 toises	3 pieds	11 pouces	2 lignes.
100	0	0	0
47	5	3	8
11	0	10	8
168	4	1	6

10 livres	15 onces	7 gros	70 grains.	325 livres	17 sous	4 deniers.
9	10	4	18	15	11	6
47	3	6	40	25	1	8
	13	0	55	4	10	0
68	11	3	39	371	0	6

99. La soustraction de ces sortes de quantités s'opère avec la même facilité que leur addition. Après les avoir écrites l'une sous l'autre, on soustrait successivement toutes les parties de l'une des parties correspondantes de l'autre ; et si par hasard quelques-unes des premières surpassent celles qui leur correspondent, on détache une unité de la colonne suivante dans le nombre supérieur, pour la décomposer en unités du genre de celles que l'on veut soustraire. Le reste s'entend assez par les exemples suivans :

48°	16′	17″	19ʲ	14ʰ	19′	40″
25	3	12	3	11	43	30
23	13	5	16	2	36	10

17ʲ	11ʰ	47′	50″
13	18	55	40
3	16	51	23

100 toises	0 pieds	0 pouces	0 lignes.
17	4	5	11
82	1	6	1

47 livres	10 onces	2 gros	55 grains.	655 livres	3 sous.	4 deniers.
12	12	5	12	30	0	0
34	13	5	43	625	3	4

100. Quoique la multiplication et la division de toutes ces quantités, à l'exception de ceux qui ont rapport au toisé, n'aient presque jamais lieu dans les Mathématiques, il est à propos cependant de parler ici de ces deux règles, à cause du fréquent usage que l'on en fait dans la société.

On voudrait savoir, par exemple, le prix de 34 aunes $\frac{3}{4}$ d'une étoffe qui coûterait $6^{\#}$ 12^{s} 6^{d} l'aune.

Il est clair, 1°. que 34 aunes, à raison de $6^{\#}$ chacune, doivent coûter $204^{\#}$.

2°. Qu'à raison de 2^{s}, qui sont la dixième partie de la livre, elles doivent coûter $3^{\#}$ 8^{s}. Donc à raison de 12^{s}, leur prix doit être de $20^{\#}$ 8^{s}. Ainsi nous avons déjà..... $224^{\#}$ 8^{s}

3°. Puisqu'à 2^{s} chacune, 34 aunes coûteraient $3^{\#}$ 8^{s}, elles ne doivent coûter, à raison de 6^{d} (quart de 2^{s}), que..... 17

Donc en réunissant ces valeurs, on aurait le prix de 34 aunes, à $6^{\#}$ 12^{s} 6^{d}. l'aune. Mais comme il y a $\frac{3}{4}$ d'aune de plus, il faut en ajouter le prix à celui que nous avons déjà trouvé.

Or, 4°. ces $\frac{3}{4}$ égalant $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, il est évident que la demi-aune doit coûter... 3 6 3^{d}

Le quart d'aune vaut donc..... 1 13 $1\frac{1}{2}$

Ainsi la somme totale est..... $230^{\#}$ 4^{s} $4\frac{1}{2}^{d}$

Chaque opération dans cette règle porte sa preuve. Deux autres exemples suffiront pour la rendre facile.

Soit proposé d'abord de trouver le prix de $42^{tois}\,5^{pi}\,9^{po}$, à raison de $12^{\#}\,19^{s}\,8^{d}$ la toise.

Soit proposé ensuite de déterminer la valeur de $36^{marc}\,6^{once}\,4^{gros}$ d'argent, à $51^{\#}\,15^{s}\,9^{d}$ le marc.

	$12^{\#}$	19^{s}	8^{d}		
	42to	5^{pi}	9^{po}		
	24			pour 42^{toises}	à $12^{\#}$
	48				
42^{toises} à 2^{s} valent	37	16			à 18^{s}
$4^{\#}\,4^{s}$	2	2			à 1^{s}
	1	1			à 6^{d}
		7			à 2^{d}
Le pied vaut	10	16	$4\frac{2}{3}$	prix de	5^{pi}
$2^{\#}\,3^{s}\,3\frac{1}{3}^{d}$	1	1	$7\frac{2}{3}$	de	6^{po}
		10	$9\frac{5}{6}$	de	3^{po}
	$557^{\#}$	14^{s}	$10\frac{1}{6}^{d}$		

	$51^{\#}$	15^{s}	9^{d}		
	36^{m}	6^{onc}	4^{gros}		
	306			pour 36^{marcs}	à $52^{\#}$
	153				
	18				à 10^{s}
	9				à 5^{s}
		18^{s}			à 6^{d}
Une once vaut		9			à 3^{d}
$6^{\#}\,9^{s}\,5\frac{1}{8}^{d}$	38	16	$9\frac{3}{4}$	prix de	$6^{onces.}$
	3	4	$8\frac{13}{16}$	de	$4^{gros.}$
	$1906^{\#}$	8^{s}	$9\frac{9}{16}^{d}$		

101. Remarquez en passant, que pour prendre le dixième d'un nombre de livres, il n'y a qu'à doubler le chiffre des unités, et le regarder ensuite comme exprimant des sous. Les chiffres qui resteront à gauche, exprimeront des livres. Ainsi $\frac{12^{\#}}{10} = 1^{\#}\,4^{s}$ ... $\frac{347^{\#}}{10} = 34^{\#}\,14^{s}$, etc. La raison en est évidente.

Ceux qui dans des momens de loisir voudront s'assurer s'ils possèdent bien la pratique de cette règle; pourront s'exercer sur les trois exemples suivans, dont les résultats se trouvent sous les lettres, X', Y', Z'.

I. La livre de tabac coûte $3^{\#}\,4^{s}$. Que coûteront donc 19 livres 13 onces de tabac?

II. Si la *Toise courante* d'un mur coûte $37^{\#}\ 4^{s}$, combien coûteront 9 toises 5 pieds 11 pouces de ce mur ?

III. On est convenu de payer un cercle gradué en degrés, minutes et secondes, à raison de $7^{\#}\ 8^{s}$ par degré. L'ouvrier chargé de cette graduation a déjà divisé $258°\ 48'\ 12''$. Que faut-il lui donner pour son travail ?

102. Au lieu de la méthode que nous venons d'employer pour ces sortes de multiplications, on peut transformer le multiplicande et le multiplicateur en parties de la plus petite espèce dont il soit fait mention dans l'exemple que l'on veut calculer. Ces parties n'étant que des fractions, les deux produisans auront donc une forme fractionnaire, ainsi leur produit se trouvera par la règle de la multiplication des fractions (63).

Exemple. On a vu ce que 34 aunes $\frac{3}{4}$ d'étoffe coûteraient, à raison de $6^{\#}\ 12^{s}\ 6^{d}$ l'aune. Si on voulait le vérifier par cette autre méthode, on transformerait d'abord 34 aunes $\frac{3}{4}$ en $\frac{139}{4}$. On transformerait de même $6^{\#}\ 12^{s}\ 6^{d}$ en $\frac{1590}{240} = \frac{159}{24}$ de livre. Puis on multiplierait les deux numérateurs l'un par l'autre, et on diviserait leur produit par celui des deux dénominateurs. Il en résulterait une fraction qui, étant réduite à sa plus simple expression, ferait connaître le prix cherché. Ainsi, dans le cas présent, on aurait $\frac{139}{4} \cdot \frac{159}{24}^{\#} = \frac{22101}{96}^{\#} = 230^{\#}\ 4^{s}\ 4^{d}\ \frac{1}{2}$, comme nous l'avons déjà trouvé.

103. Quant à la division de ces quantités, elle n'a point de difficulté dans le cas où le diviseur ne contient qu'une seule espèce de grandeur. Supposons, par exemple, qu'un ouvrier ait reçu $151^{\#}\ 14^{s}\ 6^{d}$ pour 42 jours de travail, et que l'on veuille savoir ce qu'il gagnait par jour.

On divisera d'abord 151 par 42. Le quotient sera 3, le produit 126, et le reste 25; réduisant ce reste de livres en sous, on en aura 500, qui, avec les 14 du dividende, formeront le second membre de division, et ainsi des autres. Le quotient cherché sera donc $3^{\#}\ 12^{s}\ 3^{d}$.

Mais s'il entre dans le diviseur des quantités de différente espèce, il faut alors le transformer en parties de la plus petite espèce de celles qu'il contient dans l'exemple proposé ; et après avoir transformé de même le dividende, il faut le diviser suivant la règle de la division des fractions (67).

Appliquons cette méthode à la recherche du prix

de la toise, dans la supposition que $42^{toises}\ 5^{pi}\ 9^{po}$ aient coûté $557^{\#}\ 14^{s}\ 10\frac{1}{6}^{d}$.

$$\begin{array}{rl} 557^{\#} = & 133680^{d} \\ 14^{s} = & 168^{d} \\ & 10\frac{1}{6} \\ \hline 557^{\#}\ 14^{s}\ 10\frac{1}{6}^{d} = & 133858\frac{1}{6}^{d} = \frac{803149}{6}^{d} = \frac{803149}{1440}^{\#}. \end{array}$$

Voilà le dividende mis sous une forme fractionnaire: passons au diviseur.

Ses plus petites parties sont des pouces: ainsi on aura, toute transformation faite, $42^{to}\ 5^{pi}\ 9^{po} = 3093^{po} = \frac{3093}{72}$ de toise $= \frac{1031}{24}^{to}$. Divisant donc $\frac{803149}{1440}^{\#}$ par $\frac{1031}{24}$, on trouvera $\frac{19275576}{1484640}^{\#} = 12^{\#}\ 19^{s}\ 8^{d}$, comme ci-dessus.

Telles sont les premières règles de l'Arithmétique. Pour traiter les autres d'une manière plus générale, il est à propos d'exposer auparavant les principes du Calcul Algébrique.

ÉLÉMENS D'ALGÈBRE.

104. L'ALGÈBRE est une espèce d'Arithmétique universelle, dont les principaux avantages sont, 1°. de démontrer d'une manière tout-à-fait générale, ce que l'Arithmétique ordinaire ne démontre que pour des cas particuliers.

2°. De mener rapidement à des résultats qu'il est rare d'obtenir par l'Arithmétique, sans de longs tâtonnemens.

3°. D'exprimer avec un laconisme singulier, ces mêmes résultats que l'Arithmétique n'exprime ordinairement qu'avec beaucoup de paroles.

4°. De résoudre une infinité de problêmes, à la solution desquels la Science des Nombres ne saurait guère atteindre.

5°. De fournir à l'Arithmétique même, dans des opérations compliquées, beaucoup de ressources qui facilitent le calcul, en simplifiant le travail.

Ces avantages vont être rendus sensibles dans le Traité suivant.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

105. LES chiffres ont une valeur déterminée par la convention générale des peuples qui les emploient. Ainsi, quoique le chiffre 3, par exemple, puisse aussi bien signifier 3 pouces, que 3 toises, que 3 lieues, que 3 heures, etc., on n'est plus à temps de lui en faire signifier cent ou mille, etc. Les chiffres ne sont donc point des signes propres à représenter indistinctement toutes les quantités possibles; et en conséquence on a imaginé de leur substituer d'autres signes, dont la valeur n'étant fixée par aucune espèce de convention, pût

successivement varier au gré du calculateur qui voudrait en faire usage.

Ces signes étaient tout trouvés dans les lettres de l'Alphabet. Chacun les connaît dès l'enfance, et par leur généralité, ils sont susceptibles de toutes les valeurs qu'on juge à propos de leur donner : bien entendu cependant que si, en commençant un calcul, on donne telle ou telle valeur aux lettres que l'on emploie, ces lettres conservent jusqu'à la fin de l'opération, les valeurs respectives qui leur ont été attribuées.

106. Cela posé, on appelle *quantité* ou *expression algébrique*, tout ce qui est désigné par des lettres de l'alphabet.

On est convenu de représenter par certains autres signes, les diverses opérations que l'on peut faire sur ces quantités. Par exemple, pour ajouter a avec b, on écrit $a+b$ (15). Pour marquer que c est soustrait de d, on écrit $d-c$ (17).

La multiplication à faire de b par c, s'indique de la manière suivante : $b \times c$, ou $b.c$. Mais la multiplication est censée faite, toutes les fois qu'une lettre est suivie d'une autre ou de plusieurs autres, sans la moindre interruption causée par des signes. Ainsi xy signifie que la quantité x, quelle qu'elle soit, a été multipliée par une autre quantité quelconque y... abc signifie le produit des trois quantités a, b et c.

La division de deux quantités algébriques se marque comme celle des nombres. Ainsi pour marquer que a doit être divisé par b, on écrit $\frac{a}{b}$, ou $a : b$. Pour marquer que xy doit être divisé par abc, on écrit $\frac{xy}{abc}$, ou $xy : abc$.

107. On appelle *Monome* toute quantité isolée, qui n'est ni précédée ni suivie d'aucune autre quantité dont elle soit séparée par le signe + ou par le signe —. Voici donc autans de *monomes* : a, bcd, mn, $\frac{zz}{\varphi}$, $\frac{\omega}{\beta}$, etc.

On appelle *Binome* toute quantité qui a deux *Termes*; et par terme on entend toute expression séparée d'une autre par un des deux signes + ou —. De manière que

$a+b$ est un binome, ainsi que $fg-sut$; $1+x$ en est un aussi, etc.

Par *Trinome*, on entend une quantité composée de trois termes; en général celle qui en contient plusieurs s'appelle *Polynome*.

108. On distingue deux sortes de termes, les termes *Positifs* et les termes *Négatifs*. Ceux-ci sont toujours précédés du signe —; les autres sont tous précédés du signe +. Dans la quantité $+p-q-rr+x-y$, il y a deux termes positifs, et trois termes négatifs.

Quand le premier terme d'une quantité algébrique est positif, on néglige de l'affecter du signe +, parcequ'on est convenu de le regarder comme positif, toutes les fois qu'il n'est précédé d'aucun signe.

109. On a souvent les mêmes termes à écrire dans une même quantité: par exemple, $a+a+a-b-b+d$. Mais au lieu de les répéter ainsi, on a imaginé de ne les écrire qu'une fois chacun, en marquant par un chiffre qui les précède vers la gauche, combien de fois ils doivent être ajoutés ou soustraits. Par exemple, $3a-2b+d$ est l'expression abrégée de la quantité précédente. On appelle *Coefficiens* ces chiffres respectifs dont chaque terme est affecté.

Lorsqu'un terme n'a point de coefficient marqué, il est censé avoir l'unité pour coefficient. C'est ainsi que dans l'exemple précédent, la lettre d est une expression abrégée de $1d$; pareillement $fh-pq=1fh-1pq$; c'est-à-dire, que ces sortes de quantités ne doivent être prises qu'une seule fois, soit en + soit en —.

110. Il arrive très-fréquemment qu'une quantité est multipliée par elle-même, et alors on l'écrit deux fois de suite, sans interruption de signe. Ainsi aa marque le produit de la quantité a par elle-même; aaa marque pareillement le produit de la quantité aa par a, et $aaaa$ indique le produit de aaa par a. Pour abréger ces expressions, on est convenu de désigner le nombre de fois qu'une quantité doit être écrite de suite, par un chiffre mis à la droite et un peu au-dessus de la quantité. Ainsi a^2 est une expression abrégée de aa, et a^3, a^4 tiennent lieu de aaa, $aaaa$.

Ces chiffres s'appellent des *Exposans*. Leur fonction, comme on vient de le voir, est d'indiquer la multiplication plus ou moins réitérée d'une quantité par elle-même, tandis que la fonction des coefficiens est de marquer l'addition répétée d'une même quantité : $3a$ signifie donc $a+a+a$, au lieu que $a^3=a.a.a$; ensorte que si on suppose $a=5$, on aura $3a=15$, pendant que $a^3=125$. Il y a donc une grande différence entre les exposans et les coefficiens, et il faut bien se garder de confondre les uns avec les autres.

111. Chaque lettre a son exposant particulier, mais quand cet exposant est l'unité, on est convenu de le sous-entendre. Ainsi bc est la même chose que b^1c^1, et $xxxyyz=x^3y^2z^1=x^3y^2z$.

112. On ne doit jamais réunir sous un même coefficient, que des termes absolument semblables. « Or par termes semblables, on entend ceux qui sont formés des mêmes lettres affectées respectivement des mêmes exposans dans chacun de ces termes, quels que soient d'ailleurs leurs signes et leurs coefficiens ».

Exemple. $a+3a+4a$ sont trois termes semblables, c'est la même quantité a, qui est prise d'abord une seule fois, puis trois fois, ensuite quatre autres fois. On peut donc réunir le tout sous un seul coefficient, et écrire $8a$: et si on eût eu $-a-3a-4a$, on eût pu réduire le tout à $-8a$.

Si au lieu de $+3a$ on avait $-3a$, alors ce serait bien la même quantité a prise trois fois, mais en sens contraire, c'est-à-dire, soustraite trois fois. Réunissant donc les deux quantités positives $a+4a=5a$, on en aurait soustrait $3a$, et le reste eût été $2a$. Cette opération, qu'il ne faut pas manquer de faire quand il y a lieu, s'appelle *Réduction*. Elle est aussi facile que fréquente.

Si on eût eu $a+3a-4a$, alors les quantités positives étant égales aux négatives, le résultat eût été zéro. D'où on peut déduire la règle suivante :

113. « Toutes les fois qu'il y a des termes semblables dans une expression algébrique, il faut les réduire à un seul terme, ou les effacer s'ils se détruisent ».

On les efface quand avec des coefficiens égaux, ils ont des signes contraires. C'est ainsi que la quantité $2a + b - 2a - b$ se réduit à 0.

On les réduit à un seul terme, 1°. quand ils sont affectés du même signe. Alors on ajoute leurs coefficiens, et la somme sert de coefficient au nouveau terme. C'est ainsi que nous avons réduit $a + 3a + 4a$ au terme $8a$, et que nous réduirions $\gamma\varepsilon - \omega + 5\gamma\varepsilon$ à $6\gamma\varepsilon - \omega$; comme aussi $f^2 - 3x + 4f^2 - 8x$ se réduirait à $5f^2 - 11x$.

2°. La réduction à un seul terme a lieu aussi, quand les termes semblables sont affectés de signes contraires et de coefficiens inégaux. Alors on soustrait le petit coefficient du grand, et le reste sert de coefficient au nouveau terme, précédé du même signe que le grand. C'est en suivant ce procédé, que l'expression $12m - 5n^2 - 8m + 4nn$ se réduit à $4m - n^2$; et que $\frac{3}{4}\varpi + 2\varphi - \frac{1}{4}\varpi - 15\varphi$ se réduit à $\frac{1}{2}\pi - 13\varphi$.

114. Puisque la similitude des termes exige les deux conditions indiquées, savoir, 1°. qu'ils soient composés précisément des mêmes lettres; 2°. que chacune de ces lettres ait un même exposant respectif dans tous ces termes, on ne doit jamais être embarrassé pour prononcer sur leur similitude ou leur dissimilitude. On jugera donc, du premier coup d'œil, quels sont les termes semblables dans les exemples suivans, et on les réduira sans peine.

I. $3x - 2xy - 3z + 2x - 32xy + 3z$ ..... A″.

II. $\frac{2}{3}a - \frac{4a}{7b} - 6a + \frac{7}{4}a + \frac{a}{b} - u^2$ ..... B″.

III. $352\alpha\beta - \theta\omega^2 + \varphi - 57\alpha\beta + \theta\omega^2$ ..... C″.

Parmi les exemples des termes dissemblables, nous ne rapporterons que ceux-ci :

I. $ab - 30c + 4\lambda$
II. $x^2y - xy - xy^2$
III. $8\varphi^3 + 5\varphi^2 - \gamma\varphi^3$

115. C'est plutôt un usage qu'une règle dans les calculs algébriques, de faire garder aux lettres de chaque terme leur ordre alphabétique. Ainsi au lieu d'écrire *cba*, ou *bca*, ou *bac*, on écrit *abc* : au lieu

d'écrire $\pi\gamma$, on écrit $\gamma\pi$. Encore est-ce un usage dont il ne faut point être esclave : il contribue seulement à faire mieux discerner les termes semblables. On va voir maintenant avec quelle facilité les premières règles de l'Algèbre s'exécutent.

De l'Addition algébrique.

116. Pour ajouter des quantités algébriques, il suffit de les écrire les unes après les autres avec les signes qu'elles ont, et de faire ensuite les réductions convenables, s'il y a lieu.

Ainsi on ajoute cdn avec $4m^2$ en écrivant $cdn+4m^2$. Pour ajouter $xy+z^3$ avec $u-t-z^3$, on écrit $xy+u-t$. La somme de b, de d et de $-f$ est $b+d-f$. Celle de $2m+3n-q$ et de $q-3n-2m$ est zéro.

117. Et si l'on a des fractions algébriques à ajouter avec des quantités entières ou fractionnaires, on suivra les règles déjà prescrites pour réduire au même dénominateur les fractions numériques.

Par exemple, $\frac{a}{m}+1=\frac{a+m}{m}$ ..... $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.

De la Soustraction algébrique.

118. Pour soustraire une quantité A d'une autre quantité B, on change tous les signes de la quantité A, et on l'écrit ensuite à côté de la quantité B; après quoi, s'il y a des réductions à faire, on les fait.

Exemple. On veut soustraire g de c; on écrit $c-g$.

On veut soustraire m^3+n^4 de x^3z-u^2; on écrit $x^3z-u^2-m^3-n^4$.

Veut-on soustraire a^2b-4c de $5a^2b-4c$? on écrira $4a^2b$.

119. Ce changement des signes dans la quantité que l'on soustrait ne laisse aucun nuage, quand il s'agit de changer les $+$ en $-$. Car tout le monde conçoit du premier abord, que pour indiquer la soustraction d'une quantité positive quelconque p, il faut lui donner la forme négative $-p$. Mais ce que l'on ne conçoit pas aussi facilement, c'est que pour indiquer la soustraction d'une quantité négative $-a$, il faille écrire $+a$.

Cependant les inventeurs de cette règle n'avaient que deux partis à prendre, lorsqu'ils eurent des quantités négatives à soustraire. Le premier parti était de laisser ces quantités sous une forme négative; le second, de leur donner une forme positive, en changeant leur signe — en +. S'ils balancèrent entre ces deux partis, une réflexion bien simple dut mettre fin à leurs doutes; voici cette réflexion.

120. Le but d'une soustraction quelconque est de faire connaître la différence qu'il y a entre la quantité soustraite et celle dont on a dû la soustraire. Cette différence est toujours marquée par le reste de la soustraction. Et comme on sait d'ailleurs (22) que ce reste doit toujours être tel, qu'en le réunissant à la quantité soustraite, on retrouve celle dont on a soustrait, les inventeurs ne tardèrent sûrement pas à reconnaître qu'on ne pouvait retrouver cette quantité qu'en changeant tous les signes de la quantité à soustraire. De là ils conclurent généralement qu'il fallait toujours changer en — les signes +, et en + les signes — des termes à soustraire.

Nous avons, par exemple, écrit $c-g$ pour marquer que g était soustrait de c. Le reste de cette soustraction est donc exprimé généralement par $c-g$; et la preuve que ce reste est le seul véritable, quelles que soient les valeurs de c et de g, c'est qu'en le réunissant avec la quantité soustraite g, on a $c-g+g$, qui se réduit à c, comme cela doit être.

Il en a été de même lorsque, soustrayant a^2b-4c de $5a^2b-4c$, nous avons trouvé pour reste $4a^2b$. Ce reste, en effet, ajouté à a^2b-4c, reproduit toute la quantité primitive $5a^2b-4c$.

De la Multiplication algébrique.

121. Tout terme algébrique peut être regardé comme composé de quatre parties. La première est le signe qui le précède. La seconde est le coefficient dont ce terme est affecté. La troisième est formée des lettres qu'il renferme. Les exposans respectifs de ces lettres forment la quatrième partie. Or la multiplication de deux termes

algébriques, l'un par l'autre, exige des règles particulières pour ces quatre objets.

122. *Règle pour les signes.* Lorsque le multiplicande et le multiplicateur ont tous deux le même signe, soit $+$ soit $-$, le produit doit toujours être affecté du signe $+$. Ainsi $a \times b = ab$... $-a \times -b$ donne pareillement ab (et non $-ab$).

Mais si le multiplicande et le multiplicateur ont des signes différens, le produit doit toujours être affecté du signe $-$. Ainsi $a \times -b$, ou $-a \times b$ donne également $-ab$ pour produit. Nous démontrerons cette règle après avoir indiqué les trois autres.

123. *Règle des coefficiens.* Multipliez l'un par l'autre, comme dans l'Arithmétique, les coefficiens des deux facteurs, et faites servir leur produit de coefficient au produit algébrique. $3a \times 9b = 27ab$..... $\frac{1}{2}c \times \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}cp$.

124. *Règle des lettres.* On est convenu (106) que toutes les fois que deux ou plusieurs lettres seraient écrites de suite, c'est-à-dire, sans aucun signe $+$ ou $-$, intermédiaire, cela signifierait le produit des quantités désignées par ces lettres. Ainsi pour multiplier $12x$ par $5y$, écrivez $60xy$, et pour multiplier $60xy$ par $3az$, écrivez $180axyz$.

125. *Règle des exposans.* Lorsqu'une lettre affectée d'un exposant quelconque doit être multipliée par cette même lettre affectée d'un autre exposant ou d'un exposant égal au premier, il ne faut écrire qu'une seule fois cette lettre au produit, mais avec un exposant égal à la somme des deux exposans primitifs.

Exemple. $8a^2b^3 \times 4a^5b = 32a^7b^4$. Cette règle n'est qu'un cas particulier et abrégé de la troisième : puisque si on écrivait tout au long $8aabbb \times 4aaaaab = 32aaaaaaabbbb$, on aurait évidemment (116) le même produit $32a^7b^4$.

126. Jusqu'ici nous n'avons parlé que de la multiplication des monomes. Celle des polynomes se fait à peu-près comme la multiplication des nombres composés.

D'abord on multiplie tous les termes du multiplicande par un des termes du multiplicateur, n'importe par lequel on commence. Puis on les multiplie successivement

par tous les autres termes du multiplicateur : et enfin si en prenant la somme de tous ces produits particuliers, on trouve quelque réduction à faire, on la fait.

Soit proposé pour exemple de multiplier la quantité $a + 3c - d$ par $2a - d$. Je dispose ces termes comme vous le voyez ici :

$$\begin{array}{r} a + 3c - d \\ 2a - d \\ \hline 2aa + 6ac - 2ad \\ -ad - 3cd + dd \\ \hline \text{Réd.}\quad 2aa + 6ac - 3ad - 3cd + dd \end{array}$$

et je multiplie d'abord a par $2a$, le produit est $2aa$; ensuite $+3c$ par $2a$, le produit est $+6ac$; puis $-d$ par $2a$, le produit est $-2ad$. Je passe au second terme du multiplicateur, et je multiplie a par $-d$, le produit est $-ad$; je multiplie $+3c$ par $-d$, le produit est $-3cd$; enfin je multiplie $-d$ par $-d$, le produit est $+dd$; j'ajoute tous ces produits ensemble, et réduction faite, je trouve pour produit total $2aa + 6ac - 3ad - 3cd + dd$.

Autre exemple.

$$\begin{array}{r} a + x \\ a - x \\ \hline a^2 + ax \\ -ax - xx \\ \hline a^2 - x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2a - 2b \\ 2a + b \\ \hline 4aa - 4ab \\ +2ab - 2bb \\ \hline 4aa - 2ab - 2bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} aa + 2ac - bc \\ a - b \\ \hline a^3 + 2aac + abc \\ -aab - 2abc + bbc \\ \hline a^3 - aab + 2aac - 3abc + bbc \end{array}$$

Les fractions algébriques se multiplient comme les fractions numériques $\frac{x}{y} \times \frac{u}{z} = \frac{ux}{yz} \ldots \frac{c}{d} \times \frac{m+n}{p+q} = \frac{cm+cn}{dp+dq}$ $\ldots \frac{a+b}{1-x} \times \frac{a-b}{1+x} = \frac{a^2-b^2}{1-x^2}$.

Il arrive souvent qu'au lieu d'effectuer la multiplication des polynomes, on ne fait que l'indiquer, en écrivant le signe $\times$ entre le multiplicande et le multiplicateur. Alors on les couvre d'un trait, ou on les enferme entre parenthèses. Par exemple, pour expri-

mer le produit de $a+3c-dd$ par $bb-6dd$, on écrit $\overline{a+3c-dd}\times\overline{bb-6dd}$, ou bien $(a+3c-dd)(bb-6dd)$. Ces parenthèses sont fort commodes, surtout quand on a plusieurs facteurs à multiplier les uns par les autres. On les enferme chacun dans une parenthèse, et s'il faut effectuer la multiplication, on en multiplie d'abord deux l'un par l'autre; puis leur produit se multiplie par le troisième facteur, et ainsi de suite. On en verra plusieurs exemples dans le cours de cet ouvrage, et notamment, quand il nous tombera sous la main des expressions algébriques dont plusieurs termes auront un même facteur.

Par exemple, au lieu d'écrire

$$4a^2bc-12a^3c^2+5axy-10ax^2y^3-8a^2c-15a^2xy,$$

on peut simplifier l'expression, en écrivant

$$(b-3ac-2)\,4a^2c+(1-2xy^2-3a)\,5axy.$$

Pareillement au lieu d'écrire $s^4-ps^3+qs^2-s$, on écrirait $(s^3-ps^2+qs-1)\,s$.

Multiplications algébriques à faire.

$(\frac{1}{4}y^2-\frac{2}{3}xz)\ (8xy-20uz^3)$.....D″
$(a+b+c+d)\ (a+b-c-d)$.....E″
$(\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3+\beta^4)\ (\alpha+\beta)$.....F″

127. Maintenant il faut démontrer la règle des signes.

1°. Quand pour multiplier a par $b-c$, on écrit d'abord le produit de a par b qui est ab, il est clair que ce produit est trop grand; car ce n'est pas b en entier, mais $b-c$ par lequel on veut multiplier a. Donc c entre autant de fois de trop dans le produit ab, que la quantité b y entre de fois. Or a exprime combien de fois b entre dans le produit ab; donc il en faut retrancher c un nombre a de fois; ou, ce qui revient au même, il en faut retrancher $c\times a$ ou ac. Donc le produit de a par $b-c$ est $ab-ac$.

Application aux nombres.

Quand pour multiplier 5 par $6-4$, on dit d'abord, $5\times 6=30$; ce produit 30 est trop grand, car 6 moins 4 ne vaut que 2: et il est trop grand, parcequ'on y a fait entrer 5 fois le nombre 4 qui est retranché de 6. Pour avoir un produit juste, il faut donc ôter 5 fois 4, ou 20 de 30, et le reste 10 est le vrai produit; donc pour avoir le produit de $(6-4)$ il faut écrire $30-20$.

Autrement

Autrement. $b-b=0$. Donc $\overline{b-b}\times c$ doit être aussi $=0$; ce qui ne peut avoir lieu, qu'autant que $-b\times c=-bc$.

2°. Quand on multiplie $a-b$ par $c-d$, il est constant que le premier produit de cette multiplication, savoir $ac-bc$, est trop grand, parcequ'en multipliant par c seulement, on se sert d'un multiplicateur plus grand qu'il ne faut, de la quantité d; il faut donc de ce produit $ac-bc$, ôter autant de fois d, que c y entre de fois : or $a-b$ marque combien de fois c est entré dans le produit $ac-bc$; donc il faut en ôter d multiplié par $a-b$; c'est-à-dire, il faut ôter $ad-bd$ de $ac-bc$: or pour ôter $ad-bd$ de $ac-bc$, il faut écrire $ac-bc-ad+bd$; donc dans la multiplication de $a-b$ par $c-d$, le produit de $-b$ par $-d$ doit être $+bd$.

Si à la place des lettres a, b, c, d, on met des nombres, comme 6, 4, 7, 3, on fera la même démonstration sur ces nombres.

On peut aussi multiplier $(b-b)$ par $(c-c)$. Le produit doit être 0. Il faut donc que $-b\times-c=+bc$; sans quoi jamais le produit ne se réduirait à zéro.

128. Malgré ces raisonnemens et ces preuves, il faut pourtant convenir qu'il est assez étrange pour des oreilles peu faites au langage algébrique, d'entendre dire que $-a$ multiplié par $-a$ donne $+a^2$.

L'espèce d'embarras et de doute que ce résultat occasionne au premier abord, semble venir principalement de l'expression même du mot multiplié, lequel n'ayant été mis en usage dans l'Arithmétique, que pour signifier des additions répétées d'une même quantité positive, doit naturellement offrir un sens louche, quand on le fait servir pour marquer une véritable soustraction de quantités négatives. Or c'est ce que l'on fait en disant, par exemple, que $-a\times-b=+ab$.

De la Division algébrique.

129. Quand on veut diviser une quantité algébrique par une autre, on les met ordinairement en fraction. Ainsi pour diviser $2bc$ par mn, on écrit $\frac{2bc}{mn}$; et parceque le numérateur de cette fraction n'a rien de commun avec son dénominateur, elle est censée irréductible à de moindres termes. On se contente alors d'indiquer la division.

Mais lorsqu'on peut réduire la fraction algébrique à une plus simple expression, il ne faut pas manquer de le

faire. On y réussira communément au moyen des quatre règles suivantes. (Je dis *communément*, parcequ'il y a certains cas où l'on est obligé de se servir, outre cela, de la méthode du plus grand commun diviseur, avec quelques modifications).

I. *Pour les signes.* Le quotient de deux termes qui ont un même signe, est positif; et le quotient de deux termes qui ont différens signes, est négatif.

II. *Pour les coefficiens.* Si on peut les diviser sans reste l'un par l'autre, il faut les effacer tous deux, et mettre leur quotient à la place du plus grand coefficient: s'ils ne sont pas divisibles sans reste, il faut les laisser en fractions tels qu'ils sont; enfin s'ils sont égaux, il faut les effacer l'un et l'autre.

III. *Pour les lettres.* Effacez celles qui étant communes au dividende et au diviseur, ont le même exposant dans les deux termes; et partout où elles sont seules, écrivez 1 à leur place.

IV. *Pour les exposans.* Quand une même lettre se trouve avec des exposans différens dans le dividende et dans le diviseur, on l'efface dans le terme où elle a l'exposant le plus petit (on met 1 à sa place, si elle est seule), et dans l'autre terme on ne lui laisse pour exposant que la différence des deux exposans primitifs.

Exemples. Pour diviser $4ac^3de^3$ par $-2bd^3e^3f$, je dis d'abord; $+4$ divisé par $-2=-2$, que je mets au quotient, pour lui servir de coefficient. Je passe à la règle des lettres, en disant, les lettres a et c ne se trouvent que dans le dividende, et les lettres b et f ne se trouvent que dans le diviseur, il faudra donc les mettre au quotient, chacune à leur place. Puis je vois par la règle des exposans que $\frac{d}{d^3}=\frac{1}{d^2}$, et que $\frac{e^3}{e^3}=1$. D'où je conclus que le quotient cherché est $-\frac{2ac^3}{bd^2f}$.

Pareillement, je trouverai que $\frac{3a^3}{12a^4b^3}=\frac{1}{4ab^3}$, en divisant $\frac{12}{3}=4$. J'efface 3 dans le dividende, et je mets 4 à la place de 12 dans le diviseur: puis je vois que selon la règle des exposans, il faut mettre 1 dans le dividende

à la place de a^3, et laisser a^1 ou a seulement dans le diviseur. Ainsi le quotient est $\frac{1}{4ab^3}$.

On trouvera de même que $\frac{3abc}{3abc} = \frac{1}{1} = 1$.... que $\frac{-4bq}{2bq} = -\frac{2}{1} = -2$..... que $\frac{3aab}{5ac} = \frac{3ab}{5c}$ ..... que $\frac{-12abd}{3a} = -\frac{4bd}{1} = -4bd$... que $\frac{4a^3bbd}{4abd} = \frac{aab}{1} = aab$, etc.

La règle des coefficiens et celle des exposans ne sont, comme l'on voit, que des réductions de fractions aux expressions les plus simples.

Ainsi $\frac{a^2}{a^5}$ étant la même chose que $\frac{aaa}{aaa \times aa}$, il est évident que $\frac{aaa}{aaa} = \frac{1}{1}$ ou 1 ; on peut donc écrire $\frac{1}{1 \times aa}$, ou simplement $\frac{1}{aa}$ ou $\frac{1}{a^2}$; d'où il suit que cette réduction exige que la différence des deux exposans serve d'exposant à la lettre qui avait le plus grand, et que l'on substitue 1 à la lettre dont l'exposant était le plus petit, si elle est toute seule.

130. Ces règles peuvent s'appliquer aux fractions des polynomes, lorsqu'il se trouve une même quantité dans tous les termes du dividende et du diviseur. Ainsi $\frac{ax - 2abx}{ax + axx}$ se réduit à $\frac{1 - 2b}{1 + x}$, en effaçant ax dans tous les termes, et mettant 1 à sa place dans ceux où il se trouve seul.

De même $\frac{3xx}{3axx + 3bbxx}$ se réduit à $\frac{1}{a + bb}$ ..... $\frac{4a^2xx + 3a^3bbx}{aax - aabx}$ se réduit à $\frac{4x + 3abb}{1 - b}$ .... $\frac{4abxx - 2ab}{2aabb + 4abb}$ se réduit à $\frac{2xx - 1}{ab + 2b}$.

131. On divise aussi les polynomes comme dans l'Arithmétique ; et quoiqu'il arrive rarement que cette division se puisse faire, il faut cependant l'essayer, avant que de se contenter de faire quelques-unes des réductions précédentes.

Mais pour s'épargner bien des tâtonnemens, il faut

arranger les termes du dividende et ceux du diviseur, de façon que de part et d'autre, celui-là soit le premier, dont une lettre quelconque choisie à volonté, pourvu qu'elle soit commune à tous les deux, ait un plus grand exposant que dans les autres termes : que celui-là soit le second, où la même lettre ait l'exposant prochainement moindre, et ainsi de suite. Cela s'appelle ordonner une quantité. Voici un exemple dans lequel le dividende et le diviseur sont ordonnés par rapport à la lettre a :

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \left\{ a^2 + 2ab + b^2. \right.$$

On aurait pu l'ordonner de même par rapport à la lettre b. Quelquefois cependant il est plus commode de préférer une lettre à une autre. C'est lorsque celle-ci se trouve avec le même exposant dans plusieurs termes; par exemple, on a préféré la lettre x aux lettres b et c, dans la division suivante, dont nous allons détailler le procédé.

$$\begin{array}{l|l}
9b^2x^5 - 3b^2cx^4 - 3b^2cx^3 + b^2c^2x^2 & -3b^2x^3 + b^2cx \\
\underline{-9b^2x^5 + 3b^2cx^4} & \overline{-3x^3 + cx} \\
\qquad\qquad 0 & \\
\qquad\qquad -3b^2cx^3 + b^2c^2x^2 & \\
\qquad\qquad \underline{+3b^2cx^3 - b^2c^2x^2} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Je dis donc, $\frac{9b^2x^5}{-3b^2x^2} = -3x^3$ que je mets au quotient. Je multiplie le diviseur par ce terme, et je soustrais le produit $9b^2x^5 - 3b^2cx^4$, des deux premiers termes du dividende; il ne me reste rien. J'abaisse les deux termes suivans, et je dis, $\frac{-3b^2cx^3}{-3b^2x^2} = +cx$, que je mets au quotient.

Multipliant ensuite le diviseur par ce nouveau terme, je soustrais le produit $-3b^2cx^3 + b^2c^2x^2$ des deux termes abaissés; reste zéro : il n'y a plus rien au dividende. La division est donc finie, et le quotient exact est $-3x^3 + cx$. Je le vérifie, en le multipliant par le diviseur; je retrouve le dividende, l'opération est donc bonne.

Au reste, pour acquérir de la facilité dans ces sortes de calculs, il faut multiplier d'abord deux quantités algébriques l'une par l'autre, et diviser ensuite leur

produit par l'une des deux. Le quotient doit être l'autre quantité.

132. On peut aussi s'exercer sur des expressions semblables à celle-ci, $\frac{a^5+m^5}{a+m}$. Elles ont cela de particulier, qu'elles font naître, pour ainsi dire, de nouveaux termes dans le dividende, à mesure que l'on poursuit la division, comme on va le voir dans l'exemple suivant.

$$
\begin{array}{lr|l}
 & a^5+m^5 & a+m \\
 & -a^5-a^4m & a^4-a^3m+a^2m^2-am^3+m^4 \\
\hline
1^{er}\text{ Reste} & 0-a^4m+m^5 & \\
 & +a^4m+a^3m^2 & \\
\hline
2^e\text{ R.} & 0+a^3m^2+m^5 & \\
 & -a^3m^2-a^2m^3 & \\
\hline
3^e\text{ R.} & 0-a^2m^3+m^5 & \\
 & +a^2m^3+am^4 & \\
\hline
4^e\text{ R.} & 0+am^4+m^5 & \\
 & -am^4-m^5 & \\
\hline
5^e\text{ R.} & 0 &
\end{array}
$$

On trouve pour quotient $a^4-a^3m+a^2m^2-am^3+m^4$. En divisant $1-x^{12}$ par $1-x$, le quotient sera

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}.$$

Il en serait de même pour d'autres exemples semblables. Aussi avec un peu d'usage voit-on, sans calcul, quels doivent être les quotiens en pareil cas.

On trouverait de même que $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3$ $+$etc. etc. sans fin; et que $\frac{1}{1+xx}=1-x^2+x^4-x^6+x^8$ $-$ etc. $+$ etc. à l'infini pareillement.

133. La division des fractions algébriques par des entiers ou par d'autres fractions, ou d'un entier par une fraction, ne peut souffrir aucune difficulté (67).

Exemples. 1°. Pour diviser par $4m$ la fraction $\frac{b}{c}$, on écrira d'abord $\frac{\frac{b}{c}}{4m}$; puis $\frac{b}{4cm}$. (On a soin dans ce cas-là, de faire un peu plus long le trait qui sépare le diviseur

du dividende, pour marquer que c'est $\frac{b}{c}$ que l'on veut diviser par $4m$, et non b par $\frac{c}{4m}$).

2°. Pour diviser un entier x par une fraction $\frac{p}{q}$, on écrira $\frac{x}{\frac{p}{q}} = \frac{qx}{p}$. Pour diviser xy par $\frac{3}{2}$, on écrira $\frac{2}{3}xy$.

3°. Le quotient d'une fraction divisée par une autre fraction, se trouve comme celui des fractions numériques.

Ainsi $\frac{m}{n} : \frac{s}{t} = \frac{mt}{ns} \ldots \frac{3}{4}\varphi : \frac{4}{5}\omega = \frac{15}{16} \cdot \frac{\varphi}{\omega}$.

134. Il a été dit (129) que pour réduire certaines expressions algébriques à leurs moindres termes, il fallait se servir de leur plus grand diviseur. Voici la manière de le trouver. Elle ne diffère de celle qui a été prescrite pour les nombres, que dans quelques cas particuliers.

Après avoir ordonné les deux quantités, il faut diviser la plus grande par la plus petite. Si la division se fait sans reste, la plus petite est le diviseur cherché : auquel cas il faut effectuer les deux divisions, et substituer les deux quotiens aux quantités proposées.

Exemples. $\frac{a+x}{aa-xx} = \frac{1}{a-x} \ldots \frac{px+xx}{bmp+bmx} = \frac{x}{bm}$.

En divisant $aa-xx$ par $a+x$, la division se fait exactement. Donc $a+x$ est le plus grand commun diviseur. Effectuant donc la division, on trouvera, 1°. que $\frac{a+x}{a+x} = 1$; 2°. que $\frac{aa-xx}{a+x} = a-x$. Donc $\frac{a+x}{aa-xx}$ se réduit à $\frac{1}{a-x}$.

Si la plus grande quantité ne pouvait se diviser sans reste par la plus petite, on diviserait à son tour celle-ci par le reste de la première; et ce reste serait le plus grand commun diviseur, s'il divisait exactement la plus petite, etc.

Jusques-là c'est la même méthode pour les lettres et pour les nombres; mais cette méthode ne s'étend pas à tous les cas algébriques qui sont susceptibles de réduction, comme nous allons le voir après les deux remarques suivantes.

135. 1°. Il n'est pas rare de trouver dans l'une des deux quantités proposées, un diviseur commun à tous ses termes. Quand on en trouve, et que ce diviseur n'est pas commun à tous les termes de l'autre quantité, on peut l'effacer dans la première quantité avant que de commencer la division. Le calcul n'en sera que plus simple, et le plus grand diviseur commun n'en sera point altéré.

Par exemple, dans $\frac{x^4-z^4}{x^5-x^3z^2}$ je vois que x^3 est commun aux deux termes du diviseur, et qu'il ne l'est pas à ceux du dividende. Il ne peut donc pas faire partie du plus grand commun diviseur que je cherche. Je l'efface donc, et par-là j'ai $\frac{x^4-z^4}{x^2-z^2}=x^2+z^2$ sans reste. D'où je conclus que x^2-z^2 est le diviseur cherché. Effectuant donc les deux divisions, je trouve $\frac{x^2+z^2}{x^3}$, expression plus simple que la première.

En général, toute quantité semblable à $\frac{bm+mx}{b^2n-nx^2}$ aura le même plus grand diviseur que $\frac{b+x}{b^2-x^2}$; et réciproquement. Soit donc que l'on divise, soit que l'on multiplie l'une des deux quantités données par une grandeur qui n'ait aucun diviseur commun avec l'autre, les résultats auront toujours le même plus grand commun diviseur que les deux quantités données.

136. 2°. Le changement de signes dans une de ces quantités, n'en produit aucun dans leur diviseur commun, pourvu qu'on les change tous à la fois dans cette quantité. Il est clair, par exemple, que si a^2-b^2 est divisible par $a-b$, il le sera encore par $-a+b$. Toute la différence sera dans les signes des quotiens.

Cela posé, cherchons le plus grand commun diviseur de..... $\frac{6x^3-6x^2y+2xy^2-2y^3}{12x^2-15xy+3y^2}$. On voit d'abord que tous les termes du dividende peuvent être divisés exactement par 2, mais non ceux du diviseur. On peut donc simplifier l'opération en divisant les premiers par 2.

Par la même raison, on peut diviser par 3 les termes du diviseur. Ainsi tout se réduit à trouver le plus grand diviseur commun de... $\frac{3x^3-3x^2y+xy^2-y^3}{4x^2-5xy+y^2}$.

Mais ici la méthode est en défaut, parceque le coefficient 3 n'est pas divisible par 4. Pour y suppléer, on multipliera tout le dividende par 4, et l'on divisera $12x^3-12x^2y+4xy^2-4y^3$ par $4x^2-5xy+y^2$. Le quotient sera $3x$, que l'on négligera à l'ordinaire : le reste sera $3x^2y+xy^2-4y^3$.

Suivant la méthode, il faudrait diviser $4x^2-5xy+y^2$ par ce reste. Mais avant de procéder à cette division, on effacera d'abord dans

tous les termes de ce reste la lettre y, qui leur est commune, et qui ne l'est pas à tous ceux du nouveau dividende. On aura donc $3x^2 + xy - 4y^2$ pour diviseur.

On remarquera ensuite que cette quantité ne peut pas diviser exactement $4x^2 - 5xy + y^2$, à cause des coefficiens. On multipliera donc celle-ci par 3, et on essayera la division. Le quotient sera 4, et le reste sera $-19xy + 19y^2$.

Ce second reste servira de diviseur à $3x^2 + xy - 4y^2$: mais auparavant on effacera dans les deux termes la quantité $19y$ qui leur est commune. Procédant alors à une troisième division, on aura $3x^2 + xy - 4y^2$ pour dividende ; $-x + y$ pour diviseur, et $-3x - 4y$ pour quotient exact. On peut donc assurer que $-x + y$ est le plus grand commun diviseur cherché; et si on effectue les divisions, on trouvera que $\frac{6x^3 - 6x^2y + 2xy^2 - 2y^3}{12x^2 - 15xy + 3y^2}$ se réduit à $\frac{-6x^2 - 2y^2}{-12x + 3y} = \frac{6x^2 + 2y^2}{12x - 3y}$; fraction qu'il n'est plus possible de réduire.

Soit proposé maintenant de trouver le plus grand diviseur commun de $\frac{3bcq + 30mp + 18bc + 5mpq}{24ad - 7fgq - 42fg + 4adq}$.

1°. J'ordonne ainsi la quantité, $\frac{(3bc + 5mp)\,q + 18bc + 30mp}{(4ad - 7fg)\,q + 24ad - 42fg}$.

2°. Pour rendre la division possible, il faudrait multiplier tout le dividende par $(4ad - 7fg)$: mais auparavant il faut être sûr que cette quantité ne divise pas exactement le diviseur lui-meme. Or par le fait elle le divise, et le quotient exact est $q + 6$.

Je substitue donc $q + 6$ au premier diviseur, et je cherche le plus grand commun diviseur de $\frac{(3bc + 5mp)\,q + 18bc + 30mp}{q + 6}$: il est visible que c'est $q + 6$ lui-même, puisque la division réussit.

Ainsi l'expression proposée peut se réduire à $\frac{3bc + 5mp}{4ad - 7fg}$. On trouvera d'autres exemples dans les Elémens d'Algèbre de M. Clairaut.

DE LA FORMATION DES PUISSANCES.

137. On distingue les degrés des puissances d'une quantité quelconque par les exposans de cette quantité. Ainsi a ou a^1 est la première puissance de a. La seconde est a^2, la troisième est a^3, etc. En général a^m est la puissance m de a, quelle que soit la valeur de m.

Cette quantité a est la *Racine* de ces divers produits ;

et la dénomination de cette racine dépend de la puissance correspondante.

On verra dans les *Elémens de Géométrie*, pourquoi la première puissance d'une quantité s'appelle aussi la *Puissance linéaire* de cette quantité ; et pourquoi la seconde puissance s'appelle le *Quarré*; de manière qu'au lieu de dire que c^2 est la seconde puissance de c, on dit que c^2 est le quarré de c. C'est encore de la Géométrie que dérive le nom de *Cube*, donné à la troisième puissance d'une quantité quelconque : les puissances qui sont au-dessus se désignent simplement par leurs exposans. Ainsi b^4 est la quatrième puissance de b, etc.

138. Réciproquement la racine seconde, ou la racine quarrée de c^2 est c. La racine troisième, ou la racine cubique de a^3 est a. La racine quatrième de x^4 est x, etc. etc.

Puisque la première puissance de a est a ou a^1, que la seconde puissance est a^2 ou $a.a$, que la troisième puissance est a^3 ou $a.a.a$, que la quatrième est a^4 ou $a.a.a.a$, etc., on peut en conclure que.....

139. Pour élever une quantité à une puissance donnée, il faut multiplier cette quantité par elle-même autant de fois moins une, que l'exposant de la puissance contient d'unités. Ainsi pour élever le nombre 9 à la troisième puissance, il faut le multiplier deux fois par lui-même, en disant d'abord $9.9=81$; puis $81.9=729$.

De même, le quarré de $\frac{1}{3}$ est $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$: son cube est $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{17}$; sa quatrième puissance est $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{81}$, etc. Le quarré de $\frac{1}{10}$ est $\frac{1}{100}$; son cube est $\frac{1}{1000}$; sa quatrième puissance est $\frac{1}{10000}$, etc.

D'où l'on voit que la valeur d'une fraction diminue à mesure qu'on l'élève à de plus hautes puissances, et que cette diminution est d'autant plus rapide, que le dénominateur est plus grand par rapport au numérateur.

140. Quant aux expressions algébriques. 1°. S'il s'agit d'un monome, on met à toutes ses lettres l'exposant de la puissance proposée. Ainsi la cinquième puissance de abc est $a^5b^5c^5$. La puissance m de $\frac{ab}{cd}$ est $\frac{a^mb^m}{c^md^m}$; et si le monome a un coefficient, on élève aussi

ce coefficient à la puissance indiquée. Le cube de $\frac{2ab}{5fg}$; par exemple, est $\frac{8a^3b^3}{125f^3g^3}$.

2°. S'il y a dans le monome d'autres exposans que l'unité, on les multiplie tous par celui de la puissance à laquelle on veut l'élever. Ainsi la quatrième puissance de a^3b^2 est $a^{12}b^8$; et en général la puissance m de $\frac{a^3b^n}{cd^q}$ est $\frac{a^{3m}b^{mn}}{c^m d^{mq}}$.

3°. Pour un polynome, il suffit quelquefois d'indiquer la puissance à laquelle on veut l'élever. Cela se fait, ou en le couvrant d'un trait au bout duquel on écrit l'exposant, ou en le renfermant entre deux crochets. Ainsi $\overline{a+b}$ et $(a+b)^m$ désignent également la puissance m du binome $a+b$.

141. Si $m=2$, alors le binome $a+b$, qui par sa généralité peut représenter tous les binomes possibles, doit être multiplié une fois par lui-même, et on trouve que

$$\begin{array}{rl} & a+b \\ \text{multiplié par} & a+b \\ \hline & a^2+ab \\ & \quad +ab+b^2 \\ \hline \text{donne.....} & a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Or a^2 est le quarré du premier terme du binome; $2ab$ est le double produit de ce premier terme par le second; b^2 est le quarré du second. Ainsi on doit conclure généralement que le quarré d'un binome quelconque contient trois termes, savoir: 1°. le quarré du premier terme; 2°. le double du premier terme multiplié par le second; 3°. le quarré du second.

Cette règle ne souffre aucune exception; et voilà comme l'Algèbre s'élève à des résultats généraux, pendant que l'Arithmétique n'y parvient que par analogie, en se traînant d'exemple en exemple.

Quant aux signes, ils sont tous positifs, lorsque les deux termes du binome ont le même signe; et lorsque ceux-ci ont des signes différens, le produit du double du premier par le second est le seul terme négatif.

En élevant au quarré le trinome $a+b+c$, on trouvera, réduction faite, $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$. C'est-à-dire que le quarré d'un trinome contient les quarrés de chaque terme en particulier, plus le double du premier par le second, plus le double du premier et du second par le troisième.

D'après cela, il est aisé de voir que le quarré de $(ax+yz)=a^2x^2+2axyz+y^2z^2$..... que celui de $(3mn-4m^2)=9m^2n^2-24m^3n+16m^4$..... et que $(x+\frac{1}{2}a)^2=x^2+ax+\frac{a^2}{4}$. On voit aussi que..... $(b+2c-y)^2=b^2+4bc+4c^2-2by-4cy+y^2$.

142. Remarquez que pour compléter le quarré d'un binome, lorsqu'on a déjà les deux premiers termes de ce quarré, il ne faut que leur ajouter le quarré de la moitié du *coefficient total* du second. (J'appelle ainsi tout ce qui affecte ce second terme, soit en chiffres, soit en lettres). Si j'avais, par exemple, x^2+2ax à compléter, je prendrais a, moitié de $2a$, coefficient total du second terme $2ax$, et j'ajouterais son quarré a^2 aux deux autres termes x^2+2ax, ce qui me donnerait alors le quarré parfait du binome $x+a$. Donc toutes les fois qu'on voudra compléter un quarré, ayant déjà deux termes de cette forme, x^2+ax, il n'y aura qu'à écrire $x^2+ax+\frac{a^2}{4}$. Ceci trouvera plus d'une fois son application.

143. Si $m=3$, alors le binome $a+b$ doit être multiplié deux fois de suite par lui-même; ou, ce qui est la même chose, son quarré doit être multiplié par la première puissance. Or toute réduction faite, on trouve que

$$\begin{array}{rl} & a^2+2ab+b^2 \\ \text{multiplié par}\ldots\ldots\ldots & a+b \\ \hline & a^3+2a^2b+ab^2 \\ & \quad +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline \text{donne}\ldots\ldots & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

On doit donc en conclure généralement que le cube d'un binome quelconque contient quatre termes; 1°. le cube du premier terme du binome; 2°. le triple du quarré

de ce premier terme multiplié par le second; 3°. le triple du quarré du second multiplié par le premier; 4°. le cube du second. Ou plus briévement; le cube d'un binome contient les cubes de ses deux termes, et les produits du triple du quarré de chacun de ces deux termes par l'autre.

Quant aux signes, ils sont tous positifs quand ceux du binome le sont; on vient de le voir dans le cube de $a+b$. Lorsque les deux signes du binome sont négatifs, tous ceux du cube le sont aussi.

Exemples. $(-m-2n)^3=-m^3-6m^2n-12mn^2-8n^3$ ... $-(a+1)^3=-a^3-3a^2-3a-1$. Le signe — mis avant la parenthèse annonce qu'il faut changer les signes de tous les termes qui y sont compris.) Lorsque des deux termes du binome, il y en a un négatif, ceux du cube le sont alternativement, de manière que les seuls termes négatifs du cube, sont ceux qui renferment les puissances impaires de la partie du binome affectée du signe —.

Exemple. $(-p+q)^3=-p^3+3p^2q-3p^1q^2+q^3$.. $(2ax-xx)^3=8a^3x^3-12a^2x^4+6ax^5-x^6$.

144. Si $m=4$, le binome $a+b$ doit être élevé à la quatrième puissance, et il en résulte cinq termes, $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

Si $m=5$, on aura par un procédé semblable la cinquième puissance de $a+b$, composé de six termes $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

Et ainsi des autres puissances d'un binome quelconque, qui toutes ont pareillement un terme de plus qu'il n'y a d'unités dans leurs exposans.

145. Mais s'il fallait passer par toutes les puissances intermédiaires, avant d'arriver à une puissance plus élevée dont on aurait besoin, on sent bien que le calcul en serait souvent fort long et toujours indirect. Les Géomètres du siècle dernier avaient tant de fois éprouvé cet inconvénient, qu'ils tournèrent leur attention vers la recherche d'une méthode qui pût les mener directement à leur but. Cette méthode, ils la trouvèrent; et Newton en eut la principale gloire.

Ce n'est pas encore ici le lieu de la démontrer : mais nous pouvons d'avance en présenter les résultats, comme une des choses les plus utiles qu'il y ait dans l'Algèbre.

146. 1°. Une puissance quelconque d'un binome algébrique ne pouvant être composée que de signes, de coefficiens, de lettres et d'exposans qui doivent en former les différens termes, il fallait avant tout, des règles générales pour ces diverses parties.

Or 2°. la règle des signes ne pouvait souffrir aucune difficulté. (122).

3° Celle des lettres n'en pouvait pas souffrir non plus. (124).

4°. Celle des exposans fut d'abord déduite par une simple analogie que voici. On avait remarqué que le premier terme de toutes les puissances auxquelles on élevait un binome, était formé de la première partie de ce binome, élevée à la puissance dont il s'agissait.

On avait remarqué aussi que dans les termes suivans, l'exposant de cette première partie diminuait successivement d'une unité, pendant que l'exposant de la seconde partie augmentait dans la même proportion.

On avait remarqué enfin, que cette diminution graduelle se continuait jusqu'au dernier terme, où la seconde partie du binome restait seule avec un exposant égal à celui de la puissance demandée.

De là on conclut que pour élever un binome quelconque $p+q$ à la sixième puissance, par exemple, on n'avait qu'à écrire, (abstraction faite des coefficiens) $(p+q)^6 = p^6 + p^5 q + p^4 q^2 + p^3 q^3 + p^2 q^4 + pq^5 + q^6$) et ainsi des autres puissances plus élevées.

5°. Restait donc la règle des coefficiens à trouver, et c'était la plus difficile. On avait bien remarqué que le coefficient du premier terme était toujours l'unité, et que celui du second terme était toujours l'exposant de la puissance proposée. Mais jusqu'à Newton, on n'avait fait qu'entrevoir la loi qui sert maintenant à déterminer tous les coefficiens.

Voici à-peu-près comment on l'avait devinée. En dépouillant successivement de leurs coefficiens les cinq

premières puissances d'un binome quelconque, on avait trouvé que ces coefficiens étaient,

pour la première puissance 1 , 1
pour la deuxième..... 1 , 2 , 1
pour la troisième..... 1 , 3 , 3 , 1
pour la quatrième..... 1 , 4 , 6 , 4 , 1
pour la cinquième..... 1 , 5 , 10 , 10 , 5 , 1

de manière que chaque premier coefficient de toutes ces puissances était 1, ainsi que le dernier, et que chacun des autres était la somme des deux coefficiens correspondans de la puissance immédiatement précédente. Ainsi les coefficiens de la cinquième puissance, à compter du second jusqu'à l'avant-dernier, se forment en disant $1+4=5 \ldots 4+6=10 \ldots 6+4=10 \ldots 4+1=5 \ldots$ Cette loi s'observant dans toutes les puissances que l'on avait calculées, la seule analogie portait à la regarder comme générale. Mais outre que l'analogie n'est point une démonstration, l'inconvénient de ne pouvoir connaître les coefficiensd'une puissance, sans la connaissance préalable de ceux de la puissance précédente, restait dans son entier. On s'avisa donc d'un autre expédient qui fournit la règle suivante, dont nous donnerons la démonstration (313).

147. Pour trouver le coefficient d'un terme quelconque de la puissance proposée d'un binome $p+q$, multipliez le coefficient du terme précédent par l'exposant que p a dans ce terme précédent, et divisez le produit par le nombre qui marque le rang de ce terme précédent. Le quotient sera toujours le coefficient cherché.

Exemple. On voudrait avoir le développement de la septième puissance de $p+q$ . . . Ecrivez,

$$(p+q)^7=\begin{cases} p^7+\frac{1\cdot 7}{1}p^6q+\frac{7\cdot 6}{2}p^5q^2+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{2.3}p^4q^3+\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{2.3.4}p^3q^4 \\ +\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{2.3.4.5}p^2q^5+\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2.3.4.5.6}pq^6+\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2.3.4.5.6.7}q^7 \end{cases}$$

148. Et si on veut généraliser les règles que nous venons d'indiquer, on trouvera que pour élever un binome quelconque $a+b$ à une puissance quelconque m, il faut écrire,

$$(a+b^m)=\begin{cases} a^m+ma^{m-1}b+\frac{m.m-1}{2}a^{m-2}b^2+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}a^{m-3}b^3 \\ +\frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4}a^{m-4}b^4 \end{cases}$$

Et ainsi de suite jusqu'à un dernier terme qui aura cette forme $\frac{m.m-1.m-2.....m-(m-1)}{2.3.....m}b^m$.

Si l'on veut maintenant appliquer cette formule à quelques exemples, on verra avec quelle promptitude elle les expédie. Soit donc proposé de trouver la neuvième puissance du binome $a+b$.

On fera $m=9$, et on substituera les valeurs convenables dans la formule, ce qui donnera

$$(a+b)^9=\begin{cases} a^9+9a^8b+\frac{9.8}{2}a^7b^2+\frac{9.8.7}{2.3}a^6b^3+\frac{9.8.7.6}{2.3.4}a^5b^4 \\ +\frac{9.8.7.6.5}{2.3.4.5}a^4b^5+\frac{9.8.7.6.5.4}{2.3.4.5.6}a^3b^6+\frac{9.8.7.6.5.4.3}{2.3.4.5.6.7}a^2b^7 \\ +\frac{9.8.7.6.5.4.3.2}{2.3.4.5.6.7.8}ab^8+\frac{9.8.7.6.5.4.3.2.1}{2.3.4.5.6.7.8.9}b^9. \end{cases}$$

Réduction faite, $(a+b)^9=a^9+9a^8b+36a^7b^2+84a^6b^3+126a^5b^4+126a^4b^5+84a^3b^6+36a^2b^7+9ab^8+b^9$.

Soit proposé maintenant de calculer les premiers termes de la millième puissance de $a+b$.

On supposera $m=1000$, et on trouvera $(a+b)^{1000}=a^{1000}+1000\,a^{999}b+\frac{1000.999}{2}a^{998}b^2+$ etc.

De la manière d'exprimer et de calculer toutes sortes de puissances, par le moyen de leurs exposans.

149. Puisque les degrés des puissances dépendent de leurs exposans, il est clair qu'il y a autant de puissances différentes d'une quantité quelconque b, qu'il peut y avoir d'exposans différens.

Or 1°. il y a une infinité de nombres entiers, voilà donc déjà une infinité de puissances différentes; et celles-là se conçoivent sans peine.

Mais 2°. il y a aussi une infinité de nombres fractionnaires. Or ceux-là peuvent-ils, à leur tour, servir d'exposans? et au cas qu'ils servent, quelles puissances indiquent-ils?

3°. Il y a de plus une infinité de nombres négatifs,

soit entiers, soit fractionnaires. A quelles puissances répondent-ils, quand ils servent d'exposans ?

Pour répondre à cette double question, nous allons développer la *Théorie des exposans*, l'une des plus importantes de l'Algèbre élémentaire.

150. On a vu (125) que le produit d'une quantité affectée d'un exposant, par cette même quantité affectée aussi d'un exposant, se trouvait tout de suite, en écrivant une seule fois cette quantité avec un exposant égal à la somme de ceux des facteurs. Ainsi $a^2 \times a^6 = a^8 \ldots\ldots b^3 \times b^7 = b^{10} \ldots$ Et généralement, $c^m \times c^n = c^{m+n}$.

Donc, par la raison contraire, si le dividende ne diffère du diviseur que par son exposant, leur quotient doit être la quantité qui leur est commune, affectée d'un exposant égal à la différence de ceux qu'ils avaient avant la division. Ainsi $a^8 : a^2 = a^{8-2} = a^6 \ldots\ldots$ $b^{10} : b^7 = b^{10-7} = b^3 \ldots$ $c^{m+n} : c^n = c^{m+n-n} = c^m$.

151. Cela posé, reprenons (129) la division de $a^3 : a^5$. On écrira, suivant la règle précédente, $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$. (On prononcera a élevé à la puissance -2, ou bien pour abréger, a puissance -2). Voilà donc des puissances négatives introduites dans le calcul par une suite de principes et d'exemples qui ne souffrent aucune difficulté. Mais nous avons trouvé (129) que $a^3 : a^5 = \frac{1}{a^2}$. Donc la quantité a élevée à la puissance négative -2, n'est autre chose que l'unité divisée par cette même quantité a élevée à la puissance positive 2.

152. Et comme au lieu des exposans 3 et 5, on peut en substituer une infinité d'autres, tels que leur différence soit également négative, il est évident que a^{-m} peut représenter en général toutes les puissances négatives d'une quantité quelconque. Or $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. Donc (et cette règle est d'un grand usage), toutes les fois qu'une quantité a un exposant négatif, elle équivaut à l'unité divisée par cette même quantité, affectée du même exposant, mais positif.

153. Soit maintenant la quantité $c^m : c^n$; on écrira pour

pour quotient c^{m-n}. Or il peut arriver 1°. que m soit plus grand que n ... 2°. que $m = n$ .... 3°. que m soit plus petit que n .... 4°. que $m - n$ donne un résultat fractionnaire, positif ou négatif.

Dans le premier cas, la quantité c doit être élevée à une puissance positive, marquée par le reste de m, quand on en a soustrait n.

Dans le second cas, l'exposant $m - n$ se réduit à 0; résultat qui paraît au moins singulier, la première fois qu'on le trouve. Ce résultat en effet indique la puissance zéro de c, et il semble que la puissance 0 d'une quantité quelconque, doit être 0. Elle équivaut pourtant à l'unité; car $a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$.

154. Donc une quantité quelconque élevée à la puissance 0, est toujours égale à l'unité.

Ainsi $a^0 = b^0 = (cd)^0 = (p+q)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{\varphi}{\lambda}\right)^0 = 1$.

Dans le troisième cas, m étant plus petit que n (ce qui s'exprime quelquefois ainsi, $m < n$; et pour exprimer que m est plus grand que n, on écrit $m > n$), la différence des deux exposans est négative. Par exemple, si $n = 2m$, on aura $a^m : a^n = a^m : a^{2m} = a^{m-2m} = a^{-m}$. Or $\frac{a^m}{a^{2m}} = (129, \text{IV}) \frac{1}{a^m}$.

Donc encore une fois, toute quantité affectée d'un exposant négatif, n'est autre chose que l'unité divisée par la puissance égale, mais positive de cette quantité. Ainsi $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ .... $(bc)^{-p} = \frac{1}{(bc)^p}$ .... $bc^{-p} = \frac{b}{c^p}$ .... $4^{-1} = \frac{1}{4}$ .... $6\varepsilon^{-m}\omega^{-r} = \frac{6}{\varepsilon^m \omega^r}$.

155. Il suit de là que l'on peut faire passer au numérateur toutes les quantités qui sont au dénominateur d'une fraction et réciproquement, sans altérer la valeur de la fraction. Il ne faut pour cela que changer les signes de leurs exposans.

Exemple. $\frac{1}{a} = a^{-1}$ ... $\frac{c}{f} = cf^{-1} = \frac{f^{-1}}{c^{-1}}$ ... $\frac{mn}{p^2q^3} = mnp^{-2}q^{-3}$ $= \frac{p^{-2}q^{-3}}{(mn)^{-1}} = \frac{1}{(mn)^{-1}p^2q^3}$ ... $\frac{\lambda}{\varphi^{-5}} = \lambda\varphi^5 = \frac{\varphi^5}{\lambda^{-1}} = \frac{1}{\lambda^{-1}\varphi^{-5}}$.

156. Dans le quatrième cas, où $m - n$ se réduit à un exposant fractionnaire, on a toujours une racine à extraire. Pour s'en assurer, et discerner en même temps le degré de cette racine, il faut se rappeler la manière dont on a formé les puissances.

Or nous avons dit (140) que pour élever une quantité à ses diverses puissances, il fallait multiplier son exposant par celui de la puissance à laquelle on voulait l'élever.

157. Donc, quand on voudra extraire une racine quelconque d'une quantité donnée, il faudra diviser l'exposant de cette quantité par celui de la racine.

Exemples. On demande la racine quarrée de b^2?

On écrira $b^{\frac{2}{2}}$ qui se réduit à b.... On demande la racine quatrième de φ^{12}? ... on écrira $\varphi^{\frac{12}{4}} = \varphi^3$ ... La racine m de c^{2m}?..... est $c^{\frac{2m}{m}} = c^2$.

158. La division ayant réussi dans tous ces exemples, on est sûr d'avoir exactement les racines demandées. Mais il arrive très-souvent que l'on ne peut diviser sans reste l'exposant de la quantité par celui de la racine; et alors il faut bien, de toute nécessité, se contenter d'une simple indication; ce qui introduit dans le calcul, les exposans fractionnaires dont l'usage est si fréquent.

Par exemple, si on demandait la racine quarrée de b, il faudrait, suivant la règle précédente, écrire $b^{\frac{1}{2}}$. Ainsi la puissance $\frac{1}{2}$ d'une quantité quelconque n'est autre chose que la racine quarrée de cette quantité.

Pour avoir la racine cubique ou troisième de b, il faudrait écrire $b^{\frac{1}{3}}$. Donc la puissance $\frac{1}{3}$ d'une quantité quelconque n'est autre chose que la racine cubique de cette quantité.

Il en est de même pour les puissances $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, etc. etc. qui répondent aux racines quatrième, cinquième, sixième, etc.

159. En général tout exposant fractionnaire annonce

une racine à extraire ; et le degré de cette racine est toujours égal au dénominateur de la fraction. Ainsi $a^{\frac{1}{n}}=$ la racine n de la quantité a .... $b^{\frac{m}{n}}=$ la racine n de la quantité b^m.

160. On a coutume de se servir de la lettre initiale r du mot racine, pour désigner toute extraction de racine à faire : mais afin que ce signe radical se distingue mieux, on a altéré sa forme ordinaire, et on l'écrit ainsi $\surd$; de manière que pour indiquer la racine quarrée de c, on écrit $\surd c$. On a donc $\surd c = c^{\frac{1}{2}}$.

Pour désigner la racine cubique de c, on écrit $\sqrt[3]{c}$. On a donc $\sqrt[3]{c}=c^{\frac{1}{3}}$. Pour désigner la racine quatrième de gf, on écrit $\sqrt[4]{(gf)}=(gf)^{\frac{1}{4}}$; et ainsi des autres, en affectant le signe radical du chiffre qui marque le degré de la racine.

On excepte le radical quarré, parceque l'on est convenu de prendre pour tel, celui qui n'a point d'exposant. Toutes les fois donc que l'on trouve des expressions de cette forme, $\surd a$ ... $\surd\left(\frac{bc}{a}\right)$ ... $\surd(a^2-b^2)$, c'est toujours de la racine quarrée de ces quantités qu'il s'agit. Et même le seul nom de racine s'applique toujours à la racine quarrée, desorte que pour en désigner une autre, on est convenu d'ajouter à ce mot le *numéro* qui la distingue.

161. Puisque les exposans fractionnaires annoncent des signes radicaux, on peut donc transformer toutes les quantités radicales en puissances fractionnaires ; ce qui est d'une grande utilité, comme on le verra par la suite. Cette transformation se fait en divisant par l'exposant du radical, les exposans de la quantité qui est sous le signe.

Exemples. $\surd(c^2g^4)=c^{\frac{2}{2}}g^{\frac{4}{2}}\ldots=cg^2\ldots\sqrt[3]{(b^6q^9)}$ $=b^{\frac{6}{3}}q^{\frac{9}{3}}=b^2q^3\ldots\sqrt[5]{(ab^2c^3)}=a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{3}{5}}$.

162. Dans les deux premiers exemples, la division a réussi ; et toutes les fois que cela arrive, on dit que l'extraction de la racine demandée peut s'effectuer. Ces sortes de racines s'appellent rationnelles ou commensurables. Mais quand l'exposant du radical n'est point un diviseur exact des exposans soumis au signe, comme cela est arrivé dans le troisième exemple, on dit alors que l'extraction est impraticable, et qu'il n'est pas possible d'obtenir autrement que par approximation, la racine demandée. On appelle ces racines, des quantités irrationnelles ou incommensurables. Quelques auteurs les appellent encore des racines sourdes ; ces trois mots sont synonymes.

163. La transformation réciproque des puissances fractionnaires, en quantités radicales, n'est pas d'un aussi grand usage : mais elle est tout aussi facile ; elle se fait, ainsi que nous l'avons déjà insinué, en donnant pour exposant au radical, le dénominateur de la fraction qui marque la puissance, et en soumettant à ce signe la même quantité, élevée à la puissance désignée par le numérateur de la fraction.

Exemples. $(3a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(3a)} \ldots (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x^2 - y^2)}$ $\ldots b^{\frac{3}{2}} = \sqrt{b^3} \ldots c^{\frac{4}{5}} p^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{(c^4 p)} \ldots (2\varphi - 3\varepsilon + 4\omega)^{\frac{2}{3}}$ $= \sqrt[3]{(2\varphi - 3\varepsilon + 4\omega)^2}$

Souvent il arrive que les quantités dont on veut extraire la racine, sont affectées d'un coefficient numérique ; et il faut bien alors savoir la manière de faire subir à toute sorte de nombres l'extraction convenable. On l'apprendra dans les trois Chapitres suivans.

DE L'EXTRACTION DES RACINES, ET EN PARTICULIER DE LA RACINE QUARRÉE.

164. L'EXTRACTION des racines est l'opération inverse de la formation des puissances. On cherche, par exemple, dans celle-ci le produit d'une quantité par elle-même, pour avoir son quarré. Dans l'autre, on a le quarré, et on cherche la racine.

Elle est très-aisée à trouver dans les quantités algébriques, quand elles sont commensurables; et comme nous venons d'indiquer la méthode générale pour toutes les quantités monomes, il ne reste qu'à traiter de l'extraction de la racine des polynomes. Commençons par la racine quarrée.

165. Soit la quantité $a^2 + 2ax + x^2$ dont on cherche la racine quarrée..... D'abord il est évident que si cette quantité, qui n'a que trois termes, est un quarré complet, sa racine ne peut être qu'un binome (141).

Il n'est pas moins évident ensuite, que le premier de ces termes est le quarré de la première partie du binome cherché; que le second terme est le double du produit des deux parties de ce même binome, et que le troisième est le quarré de la seconde partie.

Je suis donc sûr de trouver la première partie du binome en prenant la racine quarrée de a^2. Or $\sqrt{a^2} = a$; j'écris donc a à la racine. Puis je soustrais son quarré a^2 de la quantité proposée. Il me reste $2ax + xx$.

$$\begin{array}{rl} a^2 + 2ax + x^2 & \left\{ \begin{array}{l} \underline{a + x} \ldots \text{Rac.} \\ \\ \\ 2a \ldots \text{Divis.} \end{array} \right. \\ -a^2 & \\ 0 + 2ax + x^2 & \\ \underline{-2ax - x^2} & \\ 0 & \end{array}$$

Mais puisque $2ax$ doit être le produit du double de la première partie a de la racine par la seconde, il est clair que pour connaître cette seconde partie, il n'y a qu'à diviser $2ax$ par $2a$. Le quotient $+x$ me la fera connaître. Car s'il est vrai que $+x$ soit le second terme de la racine, son produit par $2a$, plus son quarré x^2 étant soustraits du reste que j'avais, il ne doit rien rester, Or pour avoir tout à la fois ce produit et ce quarré, je multiplie $(2a + x)$ par x; et j'ai $2ax + xx$. Soustraction faite, il ne reste rien; d'où je conclus que $a + x$ est la racine cherchée.

166. Dans des cas aussi simples, on voit à la seule inspection de la quantité donnée, si elle a une racine quarrée exacte, ou si elle n'en a point. Mais si on ne le voyait pas du premier abord, on ne tarderait pas à le reconnaître, en ordonnant la quantité (131), et en observant les règles suivantes.

I. Si la quantité proposée est un quarré parfait, composé de trois termes, on est sûr qu'elle a un binome pour racine.

II. Si les termes de cette quantité sont tous positifs, ceux de la racine seront tous positifs, ou tous négatifs. On voit bien en effet que la racine quarrée de $a^2 + 2ab + b^2$ est également $a + b$, ou $-a - b$ Mais si le second terme du quarré est négatif, l'un des deux termes de la racine (n'importe lequel) doit être négatif. Car $a - b$, et $-a + b$ servent également de racine à la quantité $a^2 - 2ab + b^2$.

167. C'est là l'origine de l'ambiguité du radical quarré, lequel est susceptible, comme l'on voit, du signe $+$ et du signe $-$. Aussi trouve-t-on assez souvent l'occasion de l'affecter de ce double signe $\pm$ que l'on prononce *plus* ou *moins*, et qui est toujours sous-entendu, quand on ne l'écrit pas.

La racine de c^2, par exemple, équivaut à $\pm\sqrt{c^2}$, c'est-à-dire, qu'elle est indifféremment $+c$ ou $-c$, sans que l'on puisse se décider pour une valeur plutôt que pour une autre; à moins que l'état de la question n'exclue une des deux valeurs, comme cela arrive quelquefois.

III. Après avoir au moins entrevu la possibilité de l'extraction projetée, cherchez la première partie de la racine. Vous la trouverez en divisant par 2 l'exposant du premier terme de cette quantité. Donc si vous soustrayez de ce premier terme le quarré de la racine trouvée, il ne vous restera plus que deux termes dans la quantité.

IV. Et de ces deux termes, l'un sera le double du produit des deux parties de la racine totale; l'autre sera le quarré de la seconde partie de cette racine. Tous deux peuvent également servir à faire connaître cette seconde partie. Le dernier, par la simple extraction de sa racine; l'autre en le divisant par le double de la partie déjà connue. Si on préfère cette division, c'est uniquement parcequ'elle est toujours applicable aux quantités numériques.

V. Le second terme de la quantité étant donc divisé

par le double de la première partie de la racine, vous aurez pour quotient la seconde partie, et c'est alors que, pour la vérifier, vous la multiplierez par le double de la première, plus par elle-même, afin de voir si ces deux produits soustraits des deux termes qui restaient dans la quantité, donnent zéro pour résultat. Quand cela arrive, l'opération est finie, et on a une racine exacte.

Application. On demande la racine quarrée de $4p^6 + 16p^3q^2 + 16q^4$.

1°. La racine de $4p^6$ est $2p^3$.

2°. Le double de $2p^3$ est $4p^3$

3°. Le quotient de $16p^3q^2$ divisé par $4p^3$, est $4q^2$.

4°. $4q^2$ est la racine de $16q^4$.

Donc $2p^3 + 4q^2$ est la racine demandée.

Voici les détails.

$$\begin{array}{l|l}
4p^6 + 16p^3q^2 + 16q^4 & 2p^3 + 4q^2 \ldots\ldots \text{Racine.} \\
\underline{-4p^6} & \\
\quad 0 + 16p^3q^2 + 16q^4 & 4p^3 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Diviseur.} \\
\qquad \underline{-16p^3q^2 - 16q^4} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

168. Pour que la racine soit un trinome, il faut que la quantité donnée soit non-seulement un quarré parfait mais encore qu'elle soit composée de six termes (141). Il en faudrait dix pour un quadrinome, et ainsi de suite. Mais à peine trouve-t-on une fois dans la vie ces sortes d'extractions à faire sur dix termes. Nous nous bornerons donc à un exemple de racine trinome.

Soit $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^3 + 2b^2c^3 + c^6$, dont on cherche la racine quarrée

$$\begin{array}{l|l}
a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^3 + 2b^2c^3 + c^6 & a^2 - b^2 - c^3 \ldots\ldots \text{Rac.} \\
\underline{-a^4} & \underline{2a^2 \ldots\ldots\ldots\ldots} \text{I. Div}^r. \\
\quad 0 - 2a^2b^2 + b^4 & 2a^2 - 2b^2 \ldots\ldots \text{II. Div}^r. \\
\qquad \underline{+2a^2b^2 - b^4} & \\
\qquad\qquad 0 - 2a^2c^3 + 2b^2c^3 + c^6 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{+2a^2c^3 - 2b^2c^3 - c^6} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Celle du premier terme est a^2, dont le quarré a^4 étant soustrait de la quantité donnée, on a pour reste les cinq autres termes $-2a^2b^2 + b^4$ etc. Le premier terme de la racine est donc a^2

Pour trouver le second, j'abaisse $-2a^2b^2+b^4$, et je divise $-2a^2b^2$ par $2a^2$. Le quotient est $-b^2$, qui, multiplié par $(2a^2-b^2)$, donne $-2a^2b^2+b^4$ pour produit. Je soustrais ce produit des deux termes abaissés, et comme la soustraction se fait sans reste, je vois que a^2-b^2 sont les deux premières parties de la racine.

Pour trouver la troisième, j'abaisse les trois derniers termes de la quantité, et je divise les deux premiers par $2a^2-2b^2$, quantité double de ce qui est déjà à la racine. Le quotient est $-c^3$, que je multiplie par $2a^2-2b^2-c^3$. Soustraction faite, il ne reste rien; donc $a^2-b^2-c^3$ est la racine cherchée.

169. Maintenant rien ne sera plus facile que d'appliquer aux nombres ces formules algébriques, surtout après avoir décomposé le quarré d'un nombre quelconque, comme nous allons y procéder.

On sait que le quarré de 9 est 81. Donc le quarré de $5+4$ doit être aussi 81. Or $5+4$ peut être comparé au binome $a+b$, en faisant $a=5$, et $b=4$. Ainsi on aura $81=a^2+2ab+b^2$, quantité dans laquelle $a^2=5^2=25\ldots 2ab=2.5.4=40\ldots b^2=4^2=16$.

$$\begin{array}{r} a^2=25 \\ 2ab=40 \\ b^2=16 \\ \hline 81 \end{array}$$

Mais comme $9=$ pareillement $6+3$, ou $7+2$, ou $8+1$, le même binome, en substituant ces diverses valeurs, donnerait toujours 81 pour quarré.

S'il fallait cependant retrouver deux de ces valeurs plutôt que deux autres pour racine, on sent bien qu'il n'y aurait pas moyen de les reconnaître, à cause du mélange que les chiffres auraient souffert dans la composition de 81; au lieu que dans les quantités algébriques, rien ne se mêle; tout est distinct jusqu'à la fin du calcul. Aussi reconnaît-on mieux la marche qu'il faut suivre dans l'extraction de leurs racines.

Le nombre 54 étant aussi décomposé en deux parties, $50+4$, on trouvera, substitution faite, que son quarré est.....

$$\left\{\begin{array}{r} a^2=2500 \\ 2ab=400 \\ b^2=16 \\ \hline \end{array}\right.$$
2916

Enfin si on décompose 523 en $500 + 20 + 3$, et que l'on fasse $a = 500 \ldots b = 20 \ldots c = 3$, on trouvera, que son quarré contient exactement les mêmes parties que celui de $a + b + c$. Ces parties sont (141).

$$\begin{aligned} a^2 &= 250000 \\ 2ab &= 20000 \\ b^2 &= 400 \\ 2ac &= 3000 \\ 2bc &= 120 \\ c^2 &= 9 \\ \hline \text{Donc } (523)^2 &= 273529 \end{aligned}$$

170. On peut donc élever toutes sortes de nombres au quarré, sans les multiplier par eux-mêmes. Il suffit de leur appliquer la formule du binome, et d'additionner les termes qui en résultent.

Encore un exemple. Quel est le quarré de 607 ?

Je suppose $a = 600 \ldots b = 7$, et je trouve $a^2 = 360000 \ldots 2ab = 8400 \ldots b^2 = 49$; donc $(607)^2 = 368449$.

171. Après nous être assurés que les quarrés des nombres contiennent les mêmes parties que les quarrés des quantités algébriques, nous ne pouvons pas douter que la méthode d'extraction ne soit la même, à quelques différences près, que le mélange des chiffres doit exiger. La première de ces différences est qu'il faut commencer l'opération par la gauche, au lieu que dans l'Algèbre, on réussirait également des deux côtés.

La seconde différence consiste à partager le nombre dont on veut extraire la racine quarrée, en tranches de deux chiffres chacune, en commençant par la droite, ce qui ne laissera dans tous les nombres impairs de chiffres, qu'un seul chiffre pour la dernière tranche.

172. Ce partage serait inutile, si les parties des quarrés numériques se présentaient toutes séparées, comme celles des quarrés algébriques. Mais ne formant qu'un seul tout, on est obligé de les diviser ainsi, pour savoir de combien de chiffres la racine doit être composée. C'est qu'en élevant au quarré différens nombres, on a reconnu, 1°. qu'un nombre simple ne peut avoir plus de deux chiffres à son quarré; 2°. qu'un nombre composé

de deux chiffres n'en saurait avoir plus de quatre à son quarré, et qu'en général, le quarré d'un nombre quelconque ne peut avoir tout au plus qu'un nombre de chiffres double de celui dont ce nombre est composé.

173. Il doit donc y avoir autant de chiffres à la racine quarrée d'un nombre, qu'il y a de tranches dans ce nombre. La racine de 1849, par exemple, doit en avoir deux, que l'on déterminera de la manière suivante.

On cherchera d'abord le plus grand quarré contenu dans 18 : c'est 16, dont on mettra à l'écart la racine 4. On soustraira ensuite de 18 ce quarré 16 qui représente ici a^2, et on écrira au dessous le reste 2.

A côté de ce reste, on abaissera la tranche suivante 49, et on aura 249 pour représenter les deux autres termes $2ab + b^2$ de la formule.

18,49	43.....Racine.
16	8.....Divis.
249	
249	
0	

Nous avons donc trouvé $a = 4$ dixaines; donc pour trouver le nombre b d'unités, il n'y aura plus qu'à diviser par $8 = 2a$, la quantité qui tient lieu de $2ab$. Or cette quantité est toujours renfermée dans le reste de la première tranche, joint au premier chiffre de la seconde. C'est donc ici 24 qui doit servir de dividende; ce que l'on peut marquer par un point mis sous le 4, qui est le premier des chiffres abaissés.

Divisant maintenant 24 par 8, le quotient sera 3, qu'il ne faut pas mettre à la racine sans être assuré qu'il a les qualités requises pour y être. On s'en assurera en le soumettant aux mêmes épreuves que la quantité b, c'est-à-dire, que l'on multipliera ce quotient $3 = b$ par 8 dixaines $= 2a$, jointes à 3 unités, afin de voir si le produit de 83 par 3 peut se soustraire de 249.

Comme ce produit donne le même nombre 249, la soustraction ne laisse point de reste. On est donc sûr alors que 3 est le second chiffre de la racine cherchée. Et la preuve que 43 est vraiment cette racine, c'est qu'en élevant 43 au quarré, on retrouve 1849.

Autres exemples. Quelle est la racine de 121 ?.... Réponse...11 sans reste.

```
1,21 { 11.....Racine.
1    { 2......Divis.
---
 21
 .
 21
 --
  0
```

Quelle est la racine de 9999 ?...Rép...99, avec 198 de reste.

```
99,99 { 99......Racine.
81    { 18......Divis.
----
1899
 .
1701
----
(198)
```

Quelle est la racine de 273529 ?...Rép... 523 sans reste. Car d'abord, on voit que cette racine doit avoir trois chiffres. On voit ensuite que le premier doit être un 5, parceque le plus grand quarré contenu dans 27 est 25. On mettra donc 5 à la racine, et on soustraira son quarré de 27. Il restera 2, à côté duquel on abaissera la seconde tranche 35; après quoi mettant un point sous le 3, on divisera 23 par 10. Le quotient sera 2.

Mais avant que de placer ce quotient à la racine, on l'ajoutera à la suite du diviseur 10 et on multipliera 102 par ce quotient. Le produit sera 204 qui peut être soustrait de 235. Le chiffre 2 est donc la seconde partie de la racine demandée, et comme on n'en est sûr qu'après cette épreuve, il ne faudra mettre qu'alors 2 à la racine. Reprenant ensuite le fil de l'opération, on dira :

Le reste de 235, quand on en a ôté 204, est 31, à côté duquel il faut abaisser la troisième tranche, 29. Le nouveau dividende sera donc 312, et pour diviseur on aura 104, qui est le double de 52 déjà mis à la racine.

Le quotient sera 3, que l'on vérifiera en multipliant 1043 par 3; et comme le produit 3129 est égal au reste de l'opération, on conclura que 523 est la racine demandée.

Digitized by Google

Voici le calcul :

```
27,35,29 { 523.........Raci.
25       { 10.........I. Div.
 235     { 104.......II. Div.
 204
  3129
  3129
     0
```

Enfin s'il fallait chercher la racine du nombre 4243600 je serais déjà sûr qu'elle doit être composée de quatre chiffres, et que le dernier doit être un zéro, au cas que le nombre proposé soit un quarré parfait. Je ne tarde pas à connaître ces quatre chiffres au moyen du calcul suivant.

```
4,24,36,00 { 2060...........R.
4          { 4...........I. D.
 2436      { 40.........II. D.
 2436      { 412.......III. D.
    0
```

174. Pour s'affermir de plus en plus dans la pratique de cette règle, on pourra s'exercer sur les exemples suivans.

$$\sqrt{728654} = D''.$$
$$\sqrt{1111088889} = E''.$$
$$\sqrt{900000027} = F''.$$

175. Comme il est très-rare qu'un nombre pris au hasard soit un quarré parfait, on ne doit guère s'attendre à trouver des racines exactes. Il y a presque toujours un reste après la dernière soustraction. Mais alors si on n'a pas besoin d'une très-grande exactitude, on néglige ce reste, dont il n'est pas possible de tirer une seule unité de plus pour la racine.

Si l'on veut cependant en tenir compte, on calculera des décimales pour la racine, en ajoutant successivement deux zéros à chaque reste, et en continuant l'extraction autant qu'on le jugera à propos.

Après avoir trouvé, par exemple, que 624 est la racine approchée de 389489, et qu'il reste 113, j'ajoute

deux zéros à ce reste ; et regardant 624 comme la première partie d'une racine composée de deux termes, je le double, pour avoir le troisième diviseur 1248.

Le dividende qui lui correspond, est 1130; le quotient qui en résulte est 0, que je mets au premier rang des décimales.

J'ajoute deux autres zéros à 11300, et je prends 1130000 pour dividende. Le diviseur est 12480. Le quotient est 9.

38,94,89	624,09, etc....R.
36	12.....I. D.
294	124.....II. D.
244	1248.....III. D.
50 89	12480....IV. D.
49 76	etc.
1130000	
1123281	
6719 etc.	

Avant de l'écrire à la racine, je le place à la suite de 12480, et je multiplie 124809 par 9. Le produit 1125281 pouvant être soustrait de 1130000, je mets 9 au second rang des décimales.

S'il fallait encore plus d'exactitude, on continuerait d'ajouter deux zéros chaque fois. Le calcul n'a plus d'autre difficulté que celle de la longueur.

176. On extrait la racine d'une fraction, en extrayant celle de chacun de ses termes. Ainsi $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$, puisque $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$. De même $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$. Mais quand le numérateur et le dénominateur ne sont pas des nombres quarrés, on ne fait qu'indiquer l'extraction en mettant le signe radical avant la fraction, ou bien on réduit la fraction en décimales (94), et l'on fait l'extraction de la racine, comme on vient de le pratiquer pour le reste des quarrés imparfaits.

177. Par tout ce détail, on voit assez que l'extraction des racines se rapporte à la division, comme la formation des puissances se rapporte à la multiplication.

On doit voir aussi que l'Algèbre simplifie beaucoup les raisonnemens qu'il faudrait faire pour démontrer par l'Arithmétique seule les règles de l'extraction, celle surtout qui prescrit de diviser chaque fois par le double de ce qui est à la racine. Mais ce n'est encore là qu'une faible preuve de la supériorité de l'Algèbre sur l'Arithmétique.

DE L'EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE.

178. On a trouvé des règles pour extraire la racine cubique, en raisonnant sur la nature des polynomes élevés au cube, comme nous l'avons fait pour la racine quarrée. Mais ces règles sont si compliquées, et d'ailleurs il est si rare de trouver l'occasion de les appliquer, que ce n'est presque pas la peine de les apprendre. Cependant pour ne pas les omettre tout-à-fait, nous les appliquerons à quelques exemples.

Soit proposé d'extraire la racine cubique de $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$. Il est clair qu'au cas qu'il y en ait une, elle doit être composée de deux termes. (143).

Cela posé, je vois que le premier terme de la quantité donnée est a^3, dont la racine cubique est a, que j'écris; je prends le cube a^3 de cette racine, et je l'ôte de la quantité proposée; reste..... $6a^2b+12ab^2+8b^3$.

Je dis ensuite : dans ce reste, il y a un produit du triple du quarré du premier terme a que je viens de trouver, par le second terme que je cherche; j'élève donc a au quarré a^2; je le triple et j'ai $3a^2$, par lequel je divise le reste, en disant $\frac{6a^2b}{3a^2}=2b$. Mais si $+2b$ est le second terme de la racine, la somme de son produit par $3a^2$, plus du produit de son quarré par $3a$, plus de son cube, doit être égale au reste de la quantité. Or cette somme est effectivement..... $6a^2b+12ab^2+8b^3$, comme le reste de la quantité : donc la racine cubique cherchée est $a+2b$.

179. Pour les nombres, il faut d'abord connaître les dix premiers cubes parfaits.

Cubes.....	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000.
Racine cub..	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

Ce qui a donné lieu de remarquer qu'un nombre ne peut avoir à son cube plus que le triple de ses chiffres : car 10, premier des nombres composés de deux chiffres, a pour cube 1000, premier des nombres composés de 4 chiffres. 100, premier des nombres de 3 chiffres, a pour cube 1000000, premier des nombres de 7 chiffres, etc. On peut même, par une semblable induction, conclure en général, qu'un nombre composés de n chiffres, n'en peut avoir en sa puissance p plus que pn n'en exprime.

Cela posé, soit le nombre 74088 dont on demande la racine cubique... Il faut le partager en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche, sauf à n'en laisser qu'un ou deux pour la dernière tranche. Il faut dire ensuite : la racine cubique la plus proche de la première tranche 74, est 4, j'écris 4 à la racine, j'élève 4 à son cube, et j'ai 64 que je soustrais de 74, reste 10. J'abaisse la seconde tranche 088 à côté du reste 10. J'élève au quarré la pre-

Digitized by Google

mière partie trouvée 4, laquelle doit valoir 40 à l'égard du second chiffre que nous cherchons; j'ai 1600 que je triple, et j'écris le produit 4800 pour diviseur. Puis je dis, $\frac{10088}{4800} = 2$, nombre qu'il faut éprouver avant de l'écrire à la racine. Pour cet effet je multiplie le diviseur 4800 par la seconde partie trouvée; le produit est 9600, que j'écris à l'écart; j'élève 2 au quarré 4, je le multiplie par 40, qui est la première partie de la racine, j'en multiplie le produit 160 par 3, et j'écris le nouveau produit 480 au-dessous de 9600. Enfin j'élève 2 au cube, et j'ai 8 que j'écris au-dessous de 480. J'ajoute ensemble les deux produits et ce cube, et parceque leur somme 10088 est égale au reste 10088, et qu'il n'y a plus de tranches à abaisser, je dis que la racine cubique de 74088 est précisément 42.

74,088	42..... Rac.	$a=40$		$3a^2b=9600$
64		Soit	Donc	$3ab^2=480$
—	4800..... Div^r.	$b=2$		$b^3=8$
10 088				
10 088				10088
—				
0				

Autre Exemple. Soit proposé d'extraire la racine cubique du nombre 5305472..... Je le divise par tranches à l'ordinaire, et je dis, la racine cubique la plus proche de la tranche 5, est 1; le cube de 1 est 1; je l'ôte du 5, reste 4. J'abaisse la seconde tranche, et j'ai 4305. Je dis, 1 étant la première partie de la racine, vaut 10 à l'égard de la seconde; le quarré de 10 est 100, son triple est 300, je divise 4305 par 300, en disant, en 43 combien de fois 3? il doit y être 14 fois; mais parcequ'on ne met jamais plus de 9 au quotient, et même qu'en y mettant 9 dans le cas présent, on y mettrait trop, comme il est aisé de s'en assurer par les règles précédentes, je trouve, après avoir essayé 9 et 8, qu'ils ne conviennent pas; j'essaye 7.

Et pour cela, je multiplie d'abord 300 par 7; j'ai 2100 pour produit: puis $7\times7=49$, ensuite $49\times10=490$, enfin $490\times3=1470$; j'écris 1470 au-dessous de 2100. Après quoi je dis: $7\times7\times7=343$, je l'écris au-dessous de 1470, j'ajoute ensemble 2100, 1470, et 343, et parceque la somme 3913 peut se soustraire du nombre 4305, je conclus que le chiffre 7 est le second de la racine que je cherche.

Comme il est resté 392 de la dernière sonstraction, j'abaisse à côté de ce reste la troisième tranche 472, et je regarde 17, que j'ai déjà trouvé, comme la première partie de la racine: elle vaut donc 170 à l'égard de la partie qui m'occupe; j'en prends le quarré 28900, je le triple, et j'ai 86700, par lequel je divise le troisième membre 392472, j'ai le quotient 4. Pour le vérifier, je multiplie le diviseur 86700 par 4, et j'écris au-dessous le produit 346800. Puis $4\times4=16$.... $16\times170\times3=8160$. J'écris 8160 au-dessous de 346800. J'écris encore au-dessous le cube de 4, qui est 64. J'ajoute ces trois quantités, et j'ôte leur somme 355024 du troisième membre 392472, reste 37448. Et, parcequ'il n'y a plus de tranches à abaisser, je dis que

la racine cubique demandée est 174, et que le nombre donné n'est pas un cube exact, mais qu'il a 37448 unités de trop.

Si l'on veut avoir égard à ce reste, il faut chercher des décimales pour la racine. On les trouve, en ajoutant aux restes autant de fois trois zéros que l'on veut avoir de décimales, et en continuant l'extraction, regardant chaque fois tout ce qui a déjà été trouvé à la racine, comme la première partie d'une racine dont on cherche la seconde. L'exemple fera mieux comprendre tout cela.

5,305,472	174,41 etc.	Rac.
1	300	I. Div^r.
4305	86700	II. Div^r.
3913	9082800	III. Div^r.
392472	912460800	IV. Div^r.
355024	etc.	
37448000		
36414784		
1033216000		
912513121		
120702879 etc.		

La longueur des opérations qu'il faut faire pour ces sortes d'extractions approchées, rend encore plus précieuses les deux méthodes suivantes.

Deux Méthodes pour extraire par approximation les Racines d'un degré quelconque.

180. La formule du binome est d'une grande utilité pour l'extraction des racines approchées, quand il n'y a pas moyen d'en avoir d'exactes; ce qui arrive très-souvent.

Si on demandait, par exemple, la racine quarrée de $a^2 - x^2$, il est clair (165) que par quelque méthode que ce fût, on ne parviendrait jamais à la trouver, d'une manière rigoureuse; desorte qu'en multipliant ensuite cette racine par elle-même, on reproduisît la quantité $a^2 - x^2$. On a recours alors aux méthodes d'approximation, qui sont la dernière ressource des calculs désespérés.

Ces méthodes sont des applications plus ou moins directes de la formule si connue pour élever un binome à une puissance quelconque (148.) Car telle est la généralité de cette formule, qu'elle s'étend à tous les cas des puissances fractionnaires, qui ne sont autre chose, comme l'on sait (159), que des racines à extraire.

Soit

Soit donc proposé de trouver la racine approchée de $a^2 - x^2$.... D'abord on comparera cette quantité avec celle du binome $(a+b)^m$, et on supposera que a^2 tient ici lieu de a, que $-x^2$ tient lieu de b; et que $m=\frac{1}{2}$. Puis on substituera ces trois valeurs aux lettres qui les représentent dans la formule.

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + m.\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3 + \text{etc.}$$

Et on aura, toute réduction faite,

$$(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}} - \text{etc.}$$

181. On eût trouvé, quoique d'une manière plus laborieuse, la même série, par la simple règle de l'extraction, telle que nous l'avons donnée (165). Car la racine quarrée de a^2 est a. Soustrayant a^2 de la quantité a^2-x^2, reste $-x^2$, qu'il faut diviser par $2a$. On a donc $-\frac{x^2}{2a}$ pour le second terme de la racine; son quarré est $\frac{x^4}{4a^2}$, et son produit par $2a$ est $-x^2$. Otant donc ces deux termes du premier reste $-x^2$, on aura pour second reste $-\frac{x^4}{4a^2}$ qu'il faudra diviser par le double de tout ce qui est déjà à la racine.

Ce nouveau diviseur est $2a - \frac{x^2}{a}$; on aura donc $-\frac{x^4}{8a^3}$ pour troisième terme de la racine. Le quarré de ce terme est $\frac{x^8}{64a^6}$, et son produit par $2a - \frac{x^2}{a}$ est $-\frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^6}{8a^4}$. Soustrayant donc ce produit du reste $-\frac{x^4}{4a^2}$, on aura pour troisième reste $-\frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6}$, que l'on divisera par le double de ce qui est déjà à la racine; et de cette division proviendra $-\frac{x^6}{16a^5}$, quatrième terme de la série. En continuant le même procédé, on trouverait les termes suivans; et voilà où l'on en était réduit, lorsque Newton publia sa formule.

182. Au lieu d'écrire les coefficiens tout réduits, comme nous l'avons fait (180), on eût pu les écrire tout au long, ce qui eût servi à faire connaître la loi qu'ils observent. Alors on eût trouvé que

$$(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{1}{2}.\frac{x^2}{a} - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{x^4}{a^3} - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{x^6}{a^5} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}.\frac{x^8}{a^7}$$
$$- \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}.\frac{x^{10}}{a^9} - \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12}.\frac{x^{12}}{a^{11}} - \text{etc. etc.}$$

où l'on voit que les nombres pairs sont les seuls qui entrent dans la composition des dénominateurs, tandis que les seuls nombres impairs se trouvent dans les numérateurs. Il est donc bien facile de pousser l'approximation aussi loin que l'on voudra.

Si au lieu de la quantité $a^2 - x^2$, on avait $a^2 + x^2$, le résultat serait le même, aux signes près, qui deviendraient alternatifs; car

$$(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = a + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{a} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{a^3} + \frac{1.3}{2.4.6}\,\frac{x^6}{a^5} - \text{etc.}$$

183. Les racines approchées des nombres qui n'en ont pas d'exactes, se calculent aisément par ces formules.

Exemple. On sait que la racine quarrée de 5 est entre 2 et 3. Pour la trouver d'une manière approchée, partageons 5 en deux parties, dont l'une soit 4, et l'autre 1. Nous aurons $a^2 = 4 \ldots\ldots x^2 = 1 \ldots\ldots$ et

$$(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = (4+1)^{\frac{1}{2}} = 2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{8} + \text{etc.}$$

En s'arrêtant aux deux premiers termes, on aurait $2+\frac{1}{4}$ pour la racine de 5; ce qui n'est pas tout-à-fait juste, puisque $2+\frac{1}{4}$, ou $\frac{9}{4}$ élevés au quarré, donnent $\frac{81}{16} = 5 + \frac{1}{16}$. Cette première approximation nous montre donc que la racine cherchée est entre 2 et $2+\frac{1}{4}$.

Si on calcule les trois premiers termes de la formule, on trouvera $2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}$, ou $2+\frac{15}{64}$, ou $\frac{143}{64}$ pour la racine. Or $(\frac{143}{64})^2 = \frac{20449}{4096} = 5 - \frac{31}{4096}$. La racine approchée est donc plus grande que $2+\frac{15}{64}$. Mais nous venons de voir qu'elle est moindre que $2+\frac{1}{4} = 2+\frac{16}{64}$. Elle est donc entre $2+\frac{16}{64}$ et $2+\frac{15}{64}$.

En calculant d'autres termes, on resserrerait de plus en plus les limites entre lesquelles est comprise la racine de 5, sans pouvoir cependant parvenir à sa vraie valeur; car la racine de 5 est incommensurable, c'est-à-dire, qu'il n'y a aucun nombre ni entier, ni fractionnaire, qui, multiplié par lui-même, puisse donner 5 pour produit. Cela est évident pour les nombres entiers, et on en trouvera sans beaucoup de peine la raison pour les nombres fractionnaires.

Autre exemple. Soit proposé de trouver la racine de 8. Je fais $8=9-1 \ldots a^2=9 \ldots x^2=1$, et je substitue ces valeurs

dans la formule $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}=a-\frac{1}{2}.\frac{x^2}{a}-\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{x^4}{a^3}-$ etc. Je trouve, en ne calculant que les deux premiers termes, $(9-1)^{\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{6}=2+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$. Cette valeur n'est pas bien exacte, puisque le quarré de $\frac{17}{6}$ est $\frac{289}{36}=8+\frac{1}{36}$. Mais en calculant les trois premiers termes, j'aurai $(9-1)^{\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{6}-\frac{1}{216}=\frac{611}{216}=3-\frac{37}{216}$; valeur plus approchée, puisque $(\frac{611}{216})^2=\frac{373321}{46656}=8+\frac{73}{46656}$.

Et pour mener encore plus rapidement l'approximation, je ferai $8=\frac{373321}{46656}-\frac{73}{46656}\ldots a^2=\frac{373321}{46656}$, ou $(\frac{611}{216})^2\ldots x^2=\frac{73}{46656}$; après quoi je calculerai les deux ou trois premiers termes de la formule. On trouvera le résultat sous la lettre G″.

184. L'extraction des racines cubiques se fait en suivant les mêmes procédés; il n'y a de différence que dans les substitutions de l'exposant. Pour avoir donc la racine cubique de $a+x$, on écrira

$$(a+x)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}a^{\frac{1}{3}-1}x+\frac{1}{3}\left(\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\right)a^{\frac{1}{3}-2}x^2+\text{etc.}$$

d'où l'on tirera

$$(a+x)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}x-\frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}x^2+\frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}x^3-\text{etc.}$$

Cette expression peut prendre aussi la forme radicale suivante (163):

$$\sqrt[3]{(a+x)}=\sqrt[3]{a}+\frac{\frac{1}{3}x}{\sqrt[3]{a^2}}-\frac{\frac{1}{9}x^2}{\sqrt[3]{a^5}}+\frac{\frac{5}{81}x^3}{\sqrt[3]{a^8}}-\frac{\frac{10}{243}x^4}{\sqrt[3]{a^{11}}}+\text{etc.}$$

Donc $\sqrt[3]{(1-y^3)}=1-\frac{y^3}{3}-\frac{y^6}{9}-\frac{5y^9}{81}-\frac{10y^{12}}{243}-\frac{22y^{15}}{729}-$ etc.

Quand il s'agit de la racine cubique d'un nombre, on parvient à l'obtenir au moyen des substitutions convenables.

Exemple. Quelle est la racine cubique de 2?.... Je décompose 2 en $1+1$, et faisant $a=1\ldots x=1$, j'ai $(1+1)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{5}{81}-\frac{10}{243}+$ etc.

Si je m'arrête aux deux premiers termes, la racine approchée devient $\frac{4}{3}$. Or $(\frac{4}{3})^3=\frac{64}{27}=2+\frac{10}{27}$. Donc cette valeur est trop grande de $\frac{10}{27}$.

Prenons au lieu de 2, la quantité qui lui est égale,

$\frac{64}{27}-\frac{10}{27}$, et supposons $a=\frac{64}{27}\ldots x=-\frac{10}{27}$; nous aurons $(\frac{64}{27}-\frac{10}{27})^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}-\frac{5}{72}$ pour les deux premiers termes. Réduisant $\frac{4}{3}-\frac{5}{72}$ à la quantité $\frac{91}{72}$, on trouvera que $(\frac{91}{72})^3=\frac{753571}{373248}=2+\frac{7075}{373248}$. Ainsi $\frac{91}{72}$ est déjà une racine fort approchée de celle que l'on demande.

Autre exemple. Quelle est la racine cubique de 100? Rép. $4+$ une fraction que l'on déterminera d'une manière approchée par le calcul suivant.

Soit $100=125-25$. (Le but de cette transformation est d'avoir pour a un cube parfait). Soit $125=a\ldots-25=x$. On aura, en ne calculant que les deux premiers termes de la formule,

$$(125-25)^{\frac{1}{3}}=(125)^{\frac{1}{3}}-\tfrac{1}{3}.125^{-\frac{2}{3}}.25-\text{etc.}=5-\tfrac{1}{3}.$$

Donc la première approximation donnera $\sqrt[3]{100}=4+\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$, quantité un peu trop grande, puisque $(\frac{14}{3})^3=\frac{2744}{27}=101\frac{17}{27}$.

On fera donc $100=\frac{2744}{27}-\frac{44}{27}$, et par de nouvelles substitutions, on trouvera pour racine plus approchée $\frac{2047}{441}=4+\frac{283}{441}$. Ce résultat surpasse encore la racine cubique de 100, puisque $(\frac{2047}{441})^3=\frac{8773357823}{85766121}=100+\frac{745727}{85766121}=100{,}008$, etc. L'approximation eût été plus prompte par la voie des Logarithmes.

Il en serait de même pour les racines quatrième, cinquième et suivantes.

Mais comme les approximations que l'on obtient par cette méthode sont quelquefois trop lentes, nous ajouterons celle que Halley inséra dans les *Transactions Philosophiques* de 1694.

185. *Seconde méthode.* Soit proposé généralement d'extraire par approximation la racine m d'une quantité quelconque $a^m\pm b$. On peut supposer que cette racine est représentée par la quantité $a+d$, a exprimant un nombre entier, et d la fraction décimale qu'il faut ajouter à ce nombre pour avoir la racine cherchée.

Cela posé, on aura $a+d=\sqrt[m]{(a^m\pm b)}$. Donc $(a+d)^m=a^m\pm b$. Donc $a^m+ma^{m-1}d+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}d^2+\ldots\text{etc.}=a^m\pm b$. Négligeant les termes où la fraction d est élevée aux puissances supérieures au quarré, effaçant de part et d'autre a^m, et divisant le reste par m, on aura $a^{m-1}d+\frac{m-1}{2}a^{m-2}d^2=\pm\frac{b}{m}$.

Multipliant ensuite par 2, divisant par $(m-1)a^{m-2}$, et ordonnant, on trouvera $d^2+\frac{2a}{m-1}d=\pm\frac{2b}{(m^2-m)a^{m-2}}$. Com-

plétant le quarré, extrayant la racine, et transposant, il viendra

$$d = \frac{-a}{m-1} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(m^2-m)\,a^{m-2}}\right)}.$$

Enfin, si l'on ajoute a aux deux membres de cette équation, on aura généralement pour l'extraction d'une racine approchée quelconque,

$$a+d = \sqrt[m]{(a^m \pm b)} = \frac{m-2}{m-1}a + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(m^2-m)\,a^{m-2}}\right)}.$$

De cette formule générale, dont Halley ne parle pas, découlent par de simples substitutions, toutes les formules particulières qu'il a insérées dans son mémoire. Leur principale utilité consiste à donner des approximations que les tables ordinaires de Logarithmes ne sauraient donner. Commençons par détailler ces formules.

$$\sqrt[3]{(a^3 \pm b)} = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 \pm \frac{b}{3a}\right)}$$

$$\sqrt[4]{(a^4 \pm b)} = \tfrac{2}{3}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{9}a^2 \pm \frac{b}{6a^2}\right)}$$

$$\sqrt[5]{(a^5 \pm b)} = \tfrac{3}{4}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{16}a^2 \pm \frac{b}{10a^3}\right)}$$

$$\sqrt[6]{(a^6 \pm b)} = \tfrac{4}{5}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{25}a^2 \pm \frac{b}{15a^4}\right)}$$

$$\sqrt[7]{(a^7 \pm b)} = \tfrac{5}{6}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}a^2 \pm \frac{b}{21a^5}\right)}$$

etc. etc. etc.

Maintenant faisons-en une application, en nous proposant de trouver la racine cinquième de 161900 avec 12 décimales.

Je divise par 5 le logarithme de 161900 qui est 5,2092468; j'ai 1,0418494, logarithme de 11,012, racine approchée; je fais $11{,}012 = a$; j'élève 11,012 à la cinquième puissance, et j'ai $a^5 = 161931{,}37873202072883 2$, qui excède 161900 de 31,378732020728832. Je fais cet excès $= b$, et j'ai $a^5 - b = 161900$; donc par la formule $\sqrt[5]{(a^5 - b)} = \frac{3}{4}a + \sqrt{\left(\frac{1}{16}aa - \frac{b}{10a^3}\right)}$, j'ai en substituant les nombres

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{(a^5-b)} &= 8{,}259 + \sqrt{(7{,}579009 - \tfrac{31{,}378732020728832}{13.53.60753728})} \\
&= 8{,}259 + \sqrt{(7{,}579009 - 0{,}00234983182882431593271 1)} \\
&= 8{,}259 + \sqrt{(7{,}576659168171175684067289)} \\
&= 8{,}259 + 2{,}752573190339 = 11{,}011573190339, \text{ racine cherchée.}
\end{aligned}$$

APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA RÉSOLUTION DE QUELQUES PROBLÊMES.

186. La résolution des problêmes mathématiques est fondée sur les rapports connus entre des choses que l'on sait et des choses qu'on ignore. Ces rapports s'appellent *les conditions du problême;* et quiconque est parvenu à exprimer algébriquement ces conditions, ne tarde guère à en déduire la connaissance de ce qu'il cherche.

Ce résultat est donc le fruit de la comparaison des quantités connues avec celles qui ne le sont pas. Les premières s'appellent *les données du problême*, et on a coutume de les représenter par les premières lettres, a, b, c, etc., ou α, β, γ, etc. Les autres portent simplement le nom de quantités *inconnues :* on les désigne par les lettres x, y, z, φ, ω, etc.

Toute formule qui exprime l'égalité de deux ou de plusieurs quantités, s'appelle généralement *Equation.* Le signe d'égalité partage l'équation en deux membres. Celui qui est à gauche s'appelle le *premier membre ;* l'autre est le second.

187. Le degré d'une équation dépend de celui de la plus haute puissance des inconnues qu'elle renferme. Ainsi toute équation qui ne contient pas d'inconnue plus élevée que la première puissance, est une équation du premier degré. Les exemples suivans, $x=a$.... $z+b=y-c$... $6\varphi-\epsilon=(c+c)\,\omega$ sont donc autant d'équations de ce genre.

On les appelle aussi quelquefois des *équations linéaires*, parceque les inconnues qu'elles renferment n'offrent qu'une seule dimension, comme les lignes.

Lorsqu'une équation contient une ou plusieurs inconnues élevées séparément au quarré, ou multipliées deux à deux, elle appartient aux équations du second degré. Telles sont les équations suivantes :

$x^2=a$.... $z^2+y^2=\varphi$.... $xy=b$.... $x^2+px=q$.

Pour qu'une équation soit du troisième degré, il

suffit qu'une de ses inconnues soit élevée au cube. Ainsi les équations suivantes

$$x^3 = c \ldots . x^3 + px^2 + qx = b \ldots . y^3 - my = nz^2$$

sont toutes du troisième degré. L'équation $xyz = f$ est de la même classe, parcequ'elle contient le produit de trois inconnues simples. On doit en dire autant de l'équation $xy^2 = g$.

Les équations du quatrième degré se distinguent avec la même facilité, et ainsi des autres. Mais de quelque degré qu'elles soient, le but général de leur résolution est de faire connaître la valeur des inconnues qu'elles renferment.

Pour atteindre ce but dans les équations du premier et du second degré, il ne faut qu'un peu d'habitude du calcul algébrique ; et on va voir avec quelle facilité cette habitude s'acquiert. La résolution des équations du troisième et du quatrième degré est sujette à des difficultés. Celle des équations du cinquième est encore à trouver; et on verra par la suite à quoi tiennent les obstacles qui ont rendu jusqu'à présent inutiles tous les efforts que l'on a faits pour y parvenir. Commençons par les équations du premier degré.

Résolution des Equations du premier degré.

188. Une équation est résolue quand on est parvenu à laisser toute seule dans un membre, l'inconnue dont on cherche la valeur, et à n'avoir dans l'autre membre que des quantités connues. Alors en effet le problême est résolu, puisqu'une quantité égale à des quantités connues, cesse d'être inconnue.

I. Problême. Un père a six fois autant d'âge que son fils, et la somme des deux âges est de 91 ans. Quel est l'âge du fils? quel est celui du père ?

Pendant que les Arithméticiens tâtonneront, l'Algébriste dira : J'appelle x l'âge du fils ; donc par l'énoncé du problême, l'âge du père sera $6x$. Or ces deux âges réunis doivent faire 91 ans ; donc $7x = 91$; et voilà le problême mis en équation.

A présent qu'il est, pour ainsi dire, traduit en langage algébrique, le reste de la solution n'est qu'un jeu. Si $7x=91$, dira-t-on, donc $x=\frac{91}{7}=13$; et parconséquent le fils a 13 ans. Le père en a donc 78; et la preuve en est que $13+78=91$; ce qui satisfait à la condition du problême.

189. Concluons de cet exemple, que, pour dégager l'inconnue, quand elle est affectée d'un coefficient quelconque, il faut diviser toute l'équation par ce même coefficient. Ainsi pour connaître la valeur de x dans l'équation suivante $ax=b$, on écrira $x=\frac{b}{a}$.

II. Problême. Quel est le nombre dont le tiers et le quart, ajoutés ensemble, font 63?

Ce nombre m'est inconnu; mais quel qu'il soit, je l'appelle x. Son tiers est donc $\frac{x}{3}$ et son quart sera $\frac{x}{4}$. Ces deux parties réunies doivent faire 63. J'ai donc pour équation du problême $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=63$.

Réduisant au même dénominateur, et ajoutant les deux fractions, j'aurai $\frac{7x}{12}=63$. Le coefficient de l'inconnue sera donc $\frac{7}{12}$, par lesquels je diviserai les deux membres de l'équation, suivant la règle précédente: ce qui me donnera $x=\frac{12.63}{7}=\frac{12.9.7}{7}=12.9=108$. Effectivement le tiers de 108 est 36, le quart de 108 est 27; et $36+27=63$.

190. Concluons de cet exemple que toutes les équations de cette forme $\frac{ax}{b}=c$, se résolvent en écrivant $x=\frac{bc}{a}$: c'est-à-dire, que pour dégager une inconnue affectée d'un coefficient fractionnaire, il faut multiplier tous les termes de l'équation par le dénominateur de ce coefficient, et les diviser par son numérateur.

III. Problême. On demande un nombre tel, qu'en le divisant par 5, on ait un quotient, qui, ajouté au produit de ce même nombre par 4, et au multiplicateur 4, fasse $12\frac{1}{2}$.

Si on appelle x le nombre demandé, on aura

$\frac{x}{5}+4x+4=12\frac{1}{2}$. Multipliant tout par le dénominateur 5, pour faire disparaître la fraction $\frac{x}{5}$, on aura $20x+x+20=62\frac{1}{2}$; d'où l'on tirera $21x+20=62\frac{1}{2}$.

191. Or toutes les fois que deux quantités sont égales, on peut ajouter ou soustraire de part et d'autre une même quantité; on peut tout multiplier ou tout diviser par le même nombre; on peut tout élever à une même puissance, sans détruire l'égalité des deux membres de l'équation.

Je puis donc soustraire 20, par exemple, de chacun des membres de l'équation $21x+20=62\frac{1}{2}$, et en déduire $21x=42\frac{1}{2}$. Mais par la première règle (189) on a $x=\frac{42\frac{1}{2}}{21}$; donc $x=2+\frac{1}{42}=\frac{85}{42}$; ce qui eût été un peu long à trouver par les tâtonnemens de l'Arithmétique.

192. Il suit de la remarque précédente que pour faire passer une quantité positive d'un membre dans un autre, on n'a qu'à effacer cette quantité dans le membre où elle est, et l'écrire dans l'autre membre avec le signe—. Ainsi toute équation de cette forme $x+a=b$, se réduit à celle-ci $x=b-a$.

Et réciproquement pour transporter d'un membre à l'autre une quantité négative, on l'effacera dans le membre où elle est, et on l'écrira dans l'autre membre avec le signe+.

Exemple. $x-m=p$; donc $x=p+m$. En général, si on a $x\pm c=h$, on en conclura que $x=h\mp c$. Cette règle est d'un grand usage.

193. Avec ce petit nombre de principes et d'opérations bien élémentaires, il n'y a point d'équation du premier degré qui ne se résolve très-promptement. Prenons pour exemple un des cas les plus compliqués; et proposons-nous de trouver la valeur de l'inconnue x dans l'équation suivante :

$$\frac{ax}{b}+\frac{cx}{f}+m=px+\frac{cx}{f}+n.$$

D'abord je vois que les deux membres contiennent

une même quantité $\frac{cx}{f}$, affectée du même signe. L'égalité subsistera donc, après que l'on aura retranché de part et d'autre cette quantité ; (quand on trouve ainsi précédés du même signe des termes communs aux deux membres, il ne faut pas manquer de les effacer). On n'aura donc plus qu'à résoudre l'équation,

$$\frac{ax}{b} + m = px + n.$$

Je vois ensuite que pour laisser x toute seule dans un membre, il faut que je transporte du même côté les quantités connues, et que l'autre membre soit formé seulement des termes qui contiennent x. La règle des transpositions observée me donne

$$\frac{ax}{b} - px = n - m.$$

194. *Remarque.* Quelquefois on est embarrassé pour savoir dans quel sens on fera ces sortes de transpositions : ici, par exemple, il n'y a plus de raison pour transposer le terme px dans le premier membre, que le terme $\frac{ax}{b}$ dans le second. Cela dépend uniquement de celui qui résoud le problême. La valeur de l'inconnue est la même dans les deux cas. Seulement elle est positive dans l'un et négative dans l'autre.

A présent que l'équation est transposée, il ne reste plus qu'à dégager l'inconnue ; et pour cela je multiplie tout par le dénominateur b, ce qui me donne

$$ax - bpx = bn - bm \text{ ou } (a - bp)x = (n - m)b.$$

A cette nouvelle préparation j'en fais succéder une autre, qui est celle de la division de toute l'équation par le coefficient de l'inconnue. Ce coefficient est $a - bp$: J'ai donc enfin,

$$x = \frac{(n-m)b}{a-bp}.$$

IV. Problême. A la suite d'une inondation il est tombé dans un même jour la moitié des maisons d'une ville ; il en est tombé le tiers le lendemain et le douzième dans les jours suivans : on n'en compte plus

que 63 sur pied. De combien de maisons cette ville était-elle composée avant l'inondation?

Soit x le nombre cherché ; $\frac{x}{2}$ sera l'expression du nombre de bâtimens écroulés le premier jour : $\frac{x}{3}$ et $\frac{x}{12}$ exprimeront combien il en est tombé dans les jours suivans, l'équation du problême sera donc:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{12}+63=x.$$

Supposons, pour abréger, que $63=a$, et que l'on multiplie toute l'équation par le plus grand dénominateur qui est ici 12. On aura.

$$6x+4x+x+12a=12x.$$

Réduisant..... $11x+12a=12x.$

Retranchant de part et d'autre la quantité commune $11x$, il restera pour solution du problême,

$$12a=x.$$

Cette ville renfermait donc dans son enceinte 756 maisons.

V. Problême. Trois amis que je désignerai, l'un par B, l'autre par C, et le troisième par D, ont pris en commun des billets de loterie. La mise de B + celle de C font 21#. Ce que B et D ont mis d'argent fait 24#. Les deux mises de C et D font 27#. Quelle est la mise de chacun?

Je suppose $a=21 \ldots e=24 \ldots f=27$; et j'appelle x la mise de B; donc $a-x$ est la mise de C, et $e-x$ est celle de D. Or l'énoncé du problême porte que ces deux dernières mises font 27#. Donc... $a-x+e-x=f$; d'où je tire

$$x=\frac{a+e-f}{2}=9^{\#}$$

ce qui me donne 12 et 15# pour les mises respectives de C et de D.

195. Au premier apperçu de ce problême, il paraissait indispensable de regarder les trois mises comme autant d'inconnues différentes : mais en y regardant de plus près, on a dû voir qu'une seule de ces mises étant

déterminée, les deux autres ne pouvaient manquer par là même d'être déterminées aussi. D'où nous conclurons que le nombre des inconnues ne dépend pas du nombre des questions particulières que l'énoncé d'un problême renferme; mais du degré de liaison qui existe entre les conditions du problême proposé.

Ce n'est pas, au reste, que l'on ne fût également parvenu à la solution du dernier, en introduisant trois inconnues dans le calcul. On en verra la preuve tout à l'heure : mais en général il faut toujours tendre aux solutions les plus simples; et c'est au tact particulier de chacun qu'il appartient uniquement de mettre sur la voie qui mène à ces sortes de solutions. Ni livres, ni maîtres ne peuvent donner la sagacité nécessaire pour démêler dans un problême ce qui en est le principal, et ce qui n'en est que l'accessoire. Les exemples cependant donnent une grande facilité : c'est pourquoi nous en ajouterons encore quelques-uns.

VI. Problême. Par le testament qu'un père a fait avant sa mort, le fils aîné doit prélever d'abord 1000 écus sur la masse des biens, puis prendre le sixième de ce qui restera. La part du second fils doit être formée, 1°. de 2000 écus; 2°. du sixième de ce qui restera. La part du troisième doit être composée de 3000 écus et du sixième de ce qui restera, et ainsi de suite jusqu'au dernier, dont la part sera le reste de celles de ses frères. Les dispositions du testament s'exécutent, et le partage de chacun des enfans se trouve égal. On demande, 1°. quel est le bien du père? 2°. combien il y a d'enfans? 3°. quelle est la part de chacun?

On serait porté à croire qu'il y a réellement trois inconnues dans ce problême. Cependant avec un peu de réflexion on verra que si le bien du père était connu, tout le reste le serait. Effectivement la part du fils aîné résultant de la somme de 1000 écus + du sixième de ce qui resterait, on n'aurait qu'à prélever ces mille écus sur le bien total, supposé connu, et puis on ajouterait à ces mille écus le sixième du reste pour connaître la part de l'aîné. Mais comme par l'énoncé

du problême toutes les parts doivent être égales, il suffirait de diviser le bien du père par la portion du fils aîné, pour connaître le nombre des parts, et par-conséquent celui des enfans. Cela posé, occupons-nous de la recherche du bien du père.

Je l'appelle x, et pour abréger je fais $a = 1000$ écus. Après quoi je raisonne ainsi : quand l'aîné aura pris mille écus, le reste du bien sera exprimé par $x - a$. Il doit prendre le sixième de ce reste, et ce sixième est $\frac{x-a}{6}$; sa part sera donc $a + \frac{x-a}{6}$, ou en réduisant au même dénominateur, $\frac{5a+x}{6}$. Cette part doit être égale à celle de chacun de ses freres; cherchons donc, par exemple, la valeur algébrique de la part du second, afin de l'égaler à la valeur déjà trouvée par celle de l'aîné.

Quand du bien total on a soustrait la part de l'aîné, le reste est exprimé par $x - \left(\frac{5a+x}{6}\right) = \frac{5x-5a}{6}$. Sur ce reste, le second fils doit prélever 2000 écus $= 2a$; il ne restera donc que $\frac{5x-5a}{6} - 2a = \frac{5x-17a}{36}$, dont il faut prendre le sixième, qui est $\frac{5x-17a}{36}$. Ajoutant ce sixième aux 2000 écus, on aura pour la part du second fils $2a + \frac{5x-17a}{36} = \frac{55a+5x}{36}$. Cela posé, on aura pour l'équation du problême,

$$\frac{5a+x}{6} = \frac{55a+5x}{36}.$$

Mais aussitôt qu'un problême du premier degré est mis en équation, il n'y a plus de difficulté. On trouve tout de suite la valeur de l'inconnue en la laissant seule dans un membre. Ici, par exemple, en multipliant par 36 les deux membres de l'équation, on aura

$$30a + 6x = 55a + 5x;$$

ôtant de part et d'autre les quantités communes qui sont $30a$ et $5x$, il viendra enfin pour la valeur du bien que le père laisse, $x = 25a = 25000$ écus.

Et parconséquent la part de chaque fils est de 5000 écus. Il y avait donc cinq frères.

VII. Problême. A et B se sont mis au jeu, ayant autant d'argent l'un que l'autre. Ils en ont perdu une partie; la perte de A est de 12#, celle de B est de 57#, et par là B n'a plus que le quart de l'argent qui reste à A. Combien avaient-ils avant le jeu ?

Ils avaient x#, et puisque la perte de A est de 12#, il lui reste $x-12$. La perte de B est de 57# : ce qui lui reste est donc $x-57$. Or la condition du problême est que pour égaler ces deux restes, il faut quadrupler le dernier; donc l'équation cherchée est

$$x-12=4(x-57);$$

donc $x=72$#.

VIII. Problême. Quel est le nombre dont le tiers et le cinquième diffèrent entre eux de 8 ?

Soit x ce nombre...Soit $a=8\ldots\frac{1}{3}=\frac{1}{m}\ldots\frac{1}{5}=\frac{1}{n}$, on aura $\frac{x}{m}-\frac{x}{n}=a$; donc $x=\frac{amn}{n-m}=60$; et en effet le tiers de 60 est 20, le cinquième de 60 est 12, et $20-12=8$.

IX. Problême On a divisé un nombre par 6, et le quotient s'est trouvé tel, qu'en l'ajoutant avec le diviseur et le dividende, on a eu pour somme totale 69. Quel est ce nombre ?

Soit $a=6\ldots b=69$. On aura $x+\frac{x}{a}+a=b$; donc $x=\frac{(b-a)a}{a+1}$, et substituant les valeurs de a et de b, on trouvera que $x=54$.

X. Problême. Etant données la somme et la différence de deux quantités, trouver chacune de ces quantités.

Soit a la somme, b, la différence, x la plus grande des deux inconnues, y la plus petite. On aura les deux équations suivantes :

$$x+y=a\ldots x-y=b.$$

Si on prend la valeur de x dans la première équation, on aura $x=a-y$.

Si on la prend dans la seconde, on trouvera $x=b+y$. Or ces deux valeurs étant nécessairement égales, on aura $a-y=b+y$; équation qui ne renfermant plus qu'une inconnue, se résout avec la plus grande facilité par une

simple transposition, en disant $a - b = 2y$; d'où l'on tire $y = \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$.

196. Or la valeur de y étant une fois connue, il n'y a plus qu'à la substituer dans l'équation $x = a - y$, ou $x = b + y$, pour trouver $x = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

On peut donc dire généralement (et cette généralité dans les résultats est encore une fois un des plus précieux avantages de l'Algèbre) « que toutes les fois que l'on connaît la somme et la différence de deux quantités, la plus grande se trouve en ajoutant la moitié de la somme à la moitié de la différence; et que la plus petite est égale à la moitié de la somme moins la moitié de la différence».

Applications. Deux frères ont 57 ans à eux deux; le frère aîné a 7 ans de plus que le cadet. Quel est l'âge de chacun?

La moitié de la somme est $28\frac{1}{2}$; la moitié de la différence est $3\frac{1}{2}$. L'aîné a donc 32 ans; le cadet n'en a que 25.

Une maison composée de deux étages a 35 pieds de haut; le premier étage est de 4 pieds plus élevé que le second. Quelle est la hauteur des deux étages?

$$a = 35 \ldots b = 4.$$

Donc $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 19\frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = 15\frac{1}{2}$.

Deux poids réunis pèsent 2878 livres, le moins lourd pèse 156 livres de moins que l'autre. Combien pèsent-ils chacun?

$a = 2878 \ldots b = 156$. Donc $x = 1517 \ldots y = 1361$.

197. Au lieu de résoudre ce petit problême en comparant les deux valeurs de x, on eût pu ajouter les deux équations $x + y = a \ldots x - y = b$, ce qui eût fait trouver tout de suite la valeur de $x = \frac{a+b}{2}$; et si on eût soustrait la seconde équation de la première, la valeur de y se serait trouvée avec la même promptitude. Mais cet abrégé ne se présente pas toujours d'une manière aussi facile.

Un père, avons nous dit (*page* 103) a six fois autant d'âge que son fils, et la somme des deux âges fait 91 ans.

Ne pourrait-on pas ramener ce problême à ceux qui ont deux inconnues ?

Soit x l'âge du père, y l'âge du fils. On aura

$$x = 6y \ldots . x + y = 91.$$

Soustrayant la première équation de la seconde, on trouvera que

$$y = 91 - 6y. \quad \text{Donc} \quad y = 13,$$

et parconséquent $x = 78$, comme nous l'avions trouvé par la première méthode qui est toujours préférable quand on peut l'employer.

198. Lorsqu'on a plusieurs inconnues, il faut les réduire successivement à une seule, ou, comme l'on dit, il faut les éliminer toutes, hors une dernière, qui se trouvant enfin en égalité avec des quantités connues, cesse d'être inconnue.

Cette élimination se fait en prenant d'abord la valeur d'une même inconnue dans deux équations différentes, et en égalant ces deux valeurs, pour avoir en y, par exemple, la valeur de x. C'est ainsi qu'après avoir trouvé dans le dernier problême $x + y = a \ldots x - y = b$, nous avons d'abord conclu $x = a - y \ldots x = b + y$, et puis $a - y = b + y$.

On peut aussi, après avoir pris la valeur d'une inconnue, substituer cette valeur partout où l'inconnue se trouve ; cela revient absolument au même.

199. L'élimination des inconnues ne peut donc être poussée jusqu'au bout, si on n'a pas autant d'équations que d'inconnues. Car il est bien clair que si on propose de trouver deux quantités x et y dont on ne connaît que la somme a, la condition unique du problême, exprimée par l'équation $x + y = a$, ne permet pas d'éliminer aucune des deux inconnues : en prenant en effet la valeur de x, par exemple, c'est-à-dire, en laissant x toute seule dans un membre, on n'apprend autre chose, sinon qu'elle est égale à une quantité $a - y$, aussi inconnue qu'elle. Ces sortes de problêmes, dans lesquels il y a plus d'inconnues que de conditions, s'appellent des *Problêmes indéterminés*. Nous en parlerons dans la suite.

XI. Problême. Une personne ayant des jetons dans ses deux mains, en prend un de la droite pour l'ajouter à ceux de la gauche, et par là il s'en trouve autant dans une main que dans l'autre. Si cette même personne eût fait passer deux jetons de la gauche dans la droite, cette dernière main en eût contenu le double de ce qui serait resté dans l'autre. Là-dessus on demande combien de jetons il y avait d'abord dans chaque main.

Soit x le nombre qu'il y en avait dans la droite; soit y le nombre de ceux de la gauche. On aura par la première condition.....$x-1=y+1$;
et par la seconde.....$x+2=2(y-2)$.

On pourrait prendre dans la première équation la valeur de x, et la substituer dans la seconde, pour n'avoir plus que l'inconnue y à évaluer : mais il est plus court de soustraire cette première équation de la seconde. Le résultat donnera $y=8$, et parconséquent $x=10$, nombres qui satisfont aux deux conditions du problême.

XII. Problême. Un orfèvre a fait payer 318# pour 3 onces d'or et 5 onces d'argent. Il a fait payer aussi 522# pour 5 onces d'or et 7 onces d'argent. A quel prix est donc l'once d'or? A quel prix est l'once d'argent?

Soient x et y les valeurs cherchées. Soient $a=318$# ...$b=522$, on aura

$$3x+5y=a....5x+7y=b.$$

Mais à cause des coefficiens différens qui affectent les mêmes inconnues, il n'est pas possible d'en éliminer aucune par la seule addition ou soustraction des deux équations, comme nous l'avons pratiqué ci-dessus. Il faut donc tâcher de donner dans ces deux équations un même coefficient à l'une des deux inconnues, pour pouvoir ensuite l'éliminer par cette voie. Or, pour cela, il suffit de multiplier la première équation par le coefficient que cette inconnue a dans la seconde, et de multiplier ensuite la seconde équation par le coefficient que cette même inconnue a dans la première.

Exemple. Je voudrais éliminer x des deux équations précédentes. Je multiplie la première par 5 (coefficient

de x dans la seconde), et la seconde par 3 (coefficient de x dans la première). Les produits sont

$$15x + 25y = 5a \ldots . 15x + 21y = 3\,b.$$

Je soustrais le second du premier; le reste est $4y = 5a - 3b$. Donc $y = 6^{\#}$. Je substitue cette valeur dans l'une des deux équations primitives, et j'en déduis $x = 96^{\#}$. Ces deux prix remplissent les conditions du problême.

On eût trouvé les mêmes valeurs par la substitution, mais le calcul eût été un peu plus long. Au reste, pour traiter ces sortes de problêmes avec toute la généralité dont ils sont susceptibles, nous résoudrons les deux équations suivantes,

$$px + qy = a \ldots . mx + ny = b.$$

En multipliant la première équation par m, et la seconde par p, nous aurons

$$mpx + mqy = am \ldots . mpx + npy = bp;$$

et en soustrayant la seconde de la première, il viendra

$$mqy - npy = am - bp;$$

donc..... $y\,(mq - np) = am - bp$;

et parconséquent..... $y = \frac{am - bp}{mq - np}$.

Reste à substituer cette valeur dans une des deux équations générales, pour trouver la valeur de x.

Substitution faite, on trouvera que $x = \frac{bq - an}{mq - np}$.

Et si on donne aux lettres m, n, p, q les valeurs respectives qu'elles ont dans l'énoncé du dernier problême, on verra que x et y seront respectivement $96^{\#}$ et $6^{\#}$, comme ci-dessus. Il y aura même cette facilité de plus, qu'en variant tant que l'on voudra les valeurs des données, on n'aura que de simples substitutions à faire dans les formules des valeurs de x et de y, pour résoudre tous les problêmes analogues à celui-là. Voilà pourquoi les solutions générales sont préférables, à tous égards, aux solutions particulières.

XIII. Problême. On a acheté trois chevaux, dont les prix sont tels, que le prix du premier plus la moitié du prix du second et du troisième, font 25 louis. Le prix du second plus le tiers du prix des deux autres, font 26 louis.

Le prix du troisième plus la moitié du prix des deux autres, font 29 louis. Quel est le prix de chaque cheval ?

En appelant x, y et z les trois prix demandés, on aurait pour équation du problême,

$$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=25\ldots y+\frac{x}{3}+\frac{z}{3}=26\ldots z+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=29;$$

et dans ces trois équations, après avoir fait disparaître les fractions, on éliminerait successivement deux inconnues x et y, par exemple, afin d'obtenir une dernière équation où il n'y eût plus que l'inconnue z. Mais cette voie, qui a d'ailleurs l'avantage d'être applicable à tous les cas d'élimination, est plus longue que la voie que nous allons suivre.

Et d'abord, pour éviter les fractions, soit $6x$ le prix du premier cheval; soit $6y$ le prix du second, et $6z$ le prix du troisième. Soit ensuite pour abréger le calcul, $a=25\ldots b=26\ldots c=29$.

Cela posé, on aura les trois équations suivantes:

$$\text{I. } 6x+3y+3z=a;$$
$$\text{II. } 6y+2x+2z=b;$$
$$\text{III. } 6z+3x+3y=c.$$

Or si on ajoute la première à la troisième, on trouvera

$$\text{IV. } 9x+6y+9z=a+c.$$

Et si on multiplie cette dernière équation par 2 (coefficient de x et de z dans l'équation II), il viendra

$$\text{V. } 18x+12y+18z=2a+2c.$$

Comparant ce résultat au produit de l'équation II multipliée par 9 (coefficient des mêmes inconnues x et z dans l'équation IV), on verra que ces deux inconnues y sont affectées du même coefficient. Donc, en soustrayant l'équation V de l'équation II multipliée par 9, ces deux inconnues seront éliminées du même coup.

Soustraction faite, il restera

$$\text{VI. } 42y=9b-2a-2c.$$

D'où l'on tire tout de suite :

$$6y=\frac{9b-2a-2c}{7}=\frac{234-5c-58}{7}=18 \text{ louis.}$$

C'est le prix du second cheval.

Pour avoir le prix du premier, je substitue la valeur de y dans les équations I et II, ce qui les change en celles-ci

$$6x + 9 + 3z = a \ldots . 2x + 18 + 2z = b;$$

puis je multiplie la première par 2, et la seconde par 3 (coefficiens respectifs de z), et j'ai

$$12x + 18 + 6z = 2a \ldots 6x + 54 + 6z = 3b.$$

Je soustrais la seconde de la première, et il vient

$6x - 36 = 2a - 3b$. Donc $6x = 8$ louis, et $6z = 16$.

Les trois prix demandés sont donc 8 louis pour le premier cheval, 18 pour le second, et 16 pour le troisième. Ces trois nombres satisfont aux trois conditions du problême, comme il est aisé de le vérifier, et il n'y en a pas d'autres qui puissent y satisfaire.

La résolution du problême V (page 107), où il s'agit de trois mises, semblait également exiger trois inconnues; et dans le fait, on en serait venu à bout très-facilement par cette méthode, si la première n'eût pas été encore plus facile. On s'y serait pris de la manière suivante.

Soient x, y, z les mises respectives des trois amis. Soit $a = 21 \ldots e = 24 \ldots f = 27$, comme ci-dessus. On aura, par les trois conditions du problême,

$$x + y = a \ldots x + z = e \ldots y + z = f.$$

Prenant la valeur de x dans la première équation, on aura $x = a - y$, et substituant cette valeur dans la seconde équation, afin d'en éliminer x, on trouvera $a - y + z = e$.

On pourrait ensuite prendre la valeur de y dans ce dernier résultat, et la substituer dans la troisième équation du problême; mais il est plus simple d'ajouter cette équation qui est $y + z = f$, à celle que l'on vient de trouver, $a - y + z = e$.

Par cette addition, l'inconnue y est éliminée, et il reste $a + 2z = f + e$; d'où l'on tire

$$z = \frac{f + e - a}{2} = \frac{27 + 24 - 21}{2} = 15.$$

Or la valeur de z étant une fois connue, celle de x se déduit de l'équation $x + z = e$; laquelle, en transposant et substituant, donne $x = 9$*. La substitution de la valeur de x dans l'équation $x + y = a$, ou celle de la

valeur de z dans l'equation $y + z = f$, donne aussitôt $y = 12$.

Résolution des Equations du second degré.

200. Toute équation du second degré peut être représentée par cette formule $x^2 + px = q$, dans laquelle p et q expriment des quantités connues. Celui-là donc aura résolu généralement toutes les équations du second degré, qui aura une fois trouvé la résolution de la formule proposée.

Or il est évident, 1°. que pour obtenir dans ce cas la valeur de x, il faut extraire la racine quarrée de l'équation $x^2 + px = q$. Il n'est pas moins évident, 2°. que si $p = 0$, cette équation se réduit à celle-ci $x^2 = q$; d'où l'on tire $x = \pm \sqrt{q}$.

Cette première supposition n'entraîne donc d'autre difficulté que celle de l'extraction des racines numériques. Le radical est affecté du double signe, à cause de la double valeur qui en résulte pour l'inconnue (167).

201. Mais si p est une quantité réelle, comme il arrive le plus souvent, alors il faut compléter le quarré du premier membre (142), et ajouter au second membre la même quantité qu'on aura ajoutée au premier. Or pour compléter ce qui manque à la quantité $x^2 + px$, pour en faire un quarré parfait, il faut ajouter $\frac{1}{4}p^2$; donc $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$.

Maintenant, lorsque deux quantités sont égales, leurs racines de même nom sont égales aussi; donc $\sqrt{(x^2 + px + \frac{1}{4}p^2)} = \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$, et parconséquent $x + \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$; d'où l'on tire

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)}.$$

202. Toutes les fois que la quantité représentée par q sera positive, le radical affectera une quantité positive, puisque $\frac{1}{4}p^2$ est nécessairement positif (122). Ainsi de deux choses l'une; ou la substitution des valeurs de q et de $\frac{1}{4}p^2$ produira un nombre quarré, auquel cas la quantité soumise au radical sera commensurable; ou cette substitution donnera un nombre qui ne sera point susceptible d'extraction de racine quarrée exacte; et

Digitized by Google

dans ce cas, la quantité radicale sera incommensurable; on ne pourra l'avoir que par approximation, mais au moins sera-t-elle réelle dans les deux cas.

203. Et à cause de l'ambiguité du signe $\pm$, il est évident que cette quantité réelle peut se prendre également en $+$ ou en $-$. Il en résulte donc deux valeurs différentes pour x; et comme en général les valeurs de l'inconnue s'appellent les *racines* de l'équation, on doit conclure que toute équation du second degré a deux racines.

L'une est.....$x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$;

L'autre est.....$x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$.

204. Mais ces racines ne sont pas toujours réelles; souvent elles sont imaginaires : or voici ce que l'on entend par des quantités imaginaires.

Supposons que sous le signe radical qui affecte $q + \frac{1}{4}p^2$, la quantité q soit négative. Cette supposition ne peut avoir que trois résultats. Le premier, que la quantité q soit moindre que $\frac{1}{4}p^2$; alors le positif l'emportera sur le négatif, et le reste de la soustraction sera réel.

Le second résultat est celui où la quantité négative q serait égale à la quantité positive $\frac{1}{4}p^2$. Alors le radical disparaîtrait, et la double valeur de x se réduirait à $-\frac{1}{2}p$; c'est-à-dire, que les deux racines de l'équation $x^2 + px = q$ seraient égales. Nous retrouverons l'occasion de parler de ces sortes de racines.

Enfin le troisième résultat est celui où q étant négatif, serait en même temps plus grand que $\frac{1}{4}p^2$. Alors la quantité négative surpassant la quantité positive, le reste serait négatif. Le signe radical affecterait donc une quantité négative.

205. Or la racine quarrée d'une quantité négative est imaginaire, c'est-à-dire, qu'il n'est pas possible de trouver une quantité qui, multipliée par elle-même, donne un produit négatif. En effet, ou cette quantité serait positive, ou elle serait négative; il n'y a pas de milieu. Or dans les deux cas son quarré doit être positif (122); donc la racine quarrée d'une quantité négative est impossible. Ainsi $\sqrt{-1}$....$\sqrt{-2}$....$\sqrt{-9}$.... $\sqrt{-a}$...$\sqrt{-b^2}$... $\sqrt{-(p^2 + 2pq + q^2)}$ sont autant

de quantités chimériques, ou, comme on dit ordinairement, toutes ces quantités sont autant d'imaginaires. Au reste, l'usage des imaginaires est fort étendu dans les calculs algébriques.

206. Après avoir parcouru tous les cas de la résolution générale des équations du second degré, il nous reste à en donner quelques applications; c'est ce que nous allons faire dans les problêmes suivans.

I. Problême. Trouver un nombre tel, qu'en ajoutant sept fois ce nombre à son quarré, la somme soit 144.

J'appelle x le nombre demandé; son quarré sera donc x^2, et la condition du problême sera exprimée par l'équation $x^2 + 7x = 144$.

Complétant le quarré, j'aurai $x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 144 + \frac{49}{4}$; d'où, en extrayant la racine quarrée, et transposant, je tirerai $x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{(144 + \frac{49}{4})}$.

Après quoi, réduisant au même dénominateur la quantité qui est sous le signe radical, je trouverai $x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{(\frac{625}{4})}$.

Or la racine quarrée de $\frac{625}{4}$ est $\frac{25}{2}$. Donc $x = -\frac{7}{2} \pm \frac{25}{2}$. Si on prend le signe supérieur $+$, on aura $x = -\frac{7}{2} + \frac{25}{2} = 9$. Si on prend le signe inférieur, on aura $x = -16$. Ainsi le problême dont il s'agit peut être résolu de deux manières; et en effet, si au quarré de 9 qui est 81, on ajoute sept fois 9 ou 63, la somme sera 144; comme aussi en prenant le quarré de -16, qui est 256, et ajoutant sept fois le nombre -16 (ou plutôt soustrayant sept fois 16), on trouvera 144. Voilà un exemple de la double solution dont les équations du second degré sont susceptibles.

207. Au lieu de faire tout au long le calcul de ce problême, je n'avais qu'à comparer son équation $x^2 + 7x = 144$ avec l'équation générale (200) $x^2 + px = q$. J'aurais eu $p = 7 \ldots q = 144$; et substituant ces valeurs dans la formule $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$, j'aurais trouvé tout de suite $x = 9$ et $x = -16$. Il est bon de s'accoutumer à ces sortes de comparaisons.

II. Problême. Trouver un nombre tel, qu'en soustrayant 2 de son quarré, le reste soit 1.

Si on ne s'appercevait pas d'abord que cela est impossible, le calcul ne tarderait pas à en faire sentir

l'impossibilité. Commençons par mettre ce problême en équation.

Soit x le nombre cherché, et nous aurons $x^2-2=1$; d'où en transposant nous conclurons $x^2=3$, et en extrayant $x=\pm\sqrt{3}$.

C'est donc la racine quarrée de 3 qui, prise soit en $+$, soit en $-$, satisferait à la condition du problême, et donnerait les deux solutions. Or on sait que cette racine est inassignable.

Pour rapporter cet exemple à la formule $x^2+px=q$, il faudrait faire $p=0\ldots q=3$, et alors l'équation $x^2=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$ donnerait par les substitutions convenables $x=\pm\sqrt{3}$, comme ci-dessus.

III Problême. Partager le nombre 10 en deux parties telles que leur produit soit 100.

Le simple énoncé de ce problême suffirait pour en faire sentir l'impossibilité : mais en tout cas le calcul la démontrera.

Soit $a=10\ldots b=100\ldots x=$ une des parties cherchées, l'autre sera donc $a-x$, et leur produit sera $ax-x^2$. On aura donc pour équation du problême $ax-x^2=b$; et transposant les deux membres, afin de rendre le quarré $-x^2$ positif, on aura $x^2-ax=-b$.

Comparant cette équation à la formule, on trouvera $p=-a\ldots q=-b$. Donc en substituant, on aura $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(-b+\frac{1}{4}a^2)}$, et mettant les valeurs de a et de b, il viendra

$$x=5\pm\sqrt{(-100+25)}=5\pm\sqrt{(-75)}.$$

Or la racine quarrée de toute quantité négative est imaginaire (205). Donc il est impossible de partager 10 en deux parties assez grandes pour que leur produit donne 100.

Voilà comme l'Algèbre résout toutes ces questions. On est sûr d'en trouver la solution, quand il y en a une, et quand il n'y en a point, l'Algèbre le fait connaître : que peut-on desirer de plus ?

IV. Problême. Plusieurs personnes voyageant ensemble, prirent une voiture qui devait les conduire

à leur destination, moyennant le prix convenu de 342#. Le voyage fait, trois de ces voyageurs s'échappèrent sans payer; mais ceux qui restèrent, suppléant à ce qui manquait par la fuite des autres, donnèrent chacun 19# de plus qu'ils n'auroient dû donner. On demande combien il y avait de voyageurs dans cette voiture.

Avant de résoudre ce problême, nous remarquerons que tout cet échafaudage de paroles ne sert souvent qu'à embrouiller la question. Commençons donc par la réduire à ses véritables termes.

Un nombre x de personnes doivent payer par égales portions la somme de 342#. Trois de ces personnes ne payant point leur quote-part, les autres payent pour elles, et il en coûte à celles-ci 19# de plus. Quel est ce nombre x?

Il faut d'abord mettre le problême en équation, ce qui ne sera pas difficile pour quiconque réfléchira un peu sur l'unique condition que l'énoncé renferme.

La somme de 342#, dira-t-on, doit résulter de tout ce que payent les voyageurs qui restent. Or le nombre des voyageurs est $x - 3$; la part de chacun n'eût été que de $\frac{342\#}{x}$, si tous eussent payé: mais comme trois d'entr'eux ne payent point, la part des autres est augmentée de 19#; ainsi l'équation du problême est,

$$\left(\frac{342}{x} + 19\right)(x - 3) = 342.$$

Faisant subir à cette équation les préparations nécessaires, on trouvera $x^2 - 3x = 54$; et comparant ce résultat avec la formule $x^2 + px = q$, on aura $p = -3$ .... $q = 54$; d'où on tirera.

$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{(54 + \frac{9}{4})} = \frac{3}{2} \pm \frac{15}{2} = 9$ ou -6. La première de ces deux solutions est évidemment celle que l'on cherche. La seconde indique seulement que le nombre -6 satisfait aussi à l'équation $x^2 + 3x = 54$. Il y avait donc neuf voyageurs, dont six, payant 57# chacun, ont formé la somme de 342#.

V. Problême. Un général voudrait disposer un corps de troupes en bataillon quarré : mais par son premier arrangement, il se trouve avoir 124 hommes de trop. Faisant une seconde disposition, il essaie de mettre un homme de plus sur chaque ligne, et alors il lui manque 129 hommes pour compléter son bataillon quarré. Quel est le nombre des troupes qu'il commande?

Soit $a = 124 \ldots b = 129 \ldots x =$ le nombre des soldats placés d'abord sur le front du bataillon; on aura $x + 1 =$ le nombre d'hommes qui par le second arrangement forment ce même front. En élevant au quarré ces deux expressions, on aura le nombre d'hommes que ces deux bataillons quarrés contiendraient. Mais puisque c'est avec le même nombre de troupes que cette double disposition a été faite, il est clair que l'on aura les deux manières suivantes d'exprimer ce nombre, et que de ces deux expressions résultera l'équation du problême.

$$x^2 + a = (x + 1)^2 - b = x^2 + 2x + 1 - b.$$

A la première inspection, on croirait que c'est un problême du second degré : mais si on ôte de part et d'autre la quantité x^2 commune aux deux membres, on ne trouvera plus qu'une équation du premier degré à résoudre, et sa résolution donnera $x = \frac{a+b-1}{2}$; formule qui par de simples substitutions fera connaître l'inconnue dans tous les cas semblables. Ici, par exemple, on trouvera que $x = 126$: d'où on conclura que $x^2 = 15876$, et parconséquent que $x^2 + a$, ou $15876 + 124 = 16000$. Ce général avait donc 16000 hommes sous ses ordres.

VI. Problême. On a divisé le nombre 230 en deux parties, telles que le produit de quatre fois la plus grande par six fois la plus petite, donne 144000. Quelles sont ces parties?

Soit $a = 230 \ldots b = 144000 \ldots m = 4 \ldots n = 6$. Si on appelle x l'une des deux parties, l'autre sera exprimée par $a - x$, et on aura pour équation générale des problêmes analogues à celui-là.

$$m(a - x)(nx) = b; \text{ d'où } mnax - mnx^2 = b.$$

Digitized by Google

Transposant les deux membres, et divisant par mn, on trouvera $x^2 - ax = -\frac{b}{mn}$; et comparant cette dernière équation avec $x^2 + px = q$, on fera $p = -a$ ... $q = -\frac{b}{mn}$; puis on substituera dans la valeur générale de $x^2 = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$, ce qui donnera $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{mn} + \frac{1}{4}a^2\right)} = 115 \pm \sqrt{(7225)}$, d'où $x = 200$, ou $= 30$.

VII. Problême. On demande s'il y a deux nombres tels que le double de leur somme soit égal au triple de leur produit, en supposant que le triple de leur produit est lui-même égal à la différence de leurs quarrés.

Soit x, le plus grand de ces nombres; y, le plus petit. Par la première condition, $2(x + y) = 3xy$; par la seconde, $2(x + y) = x^2 - y^2$.

De cette dernière équation on déduit $x = y + 2$, ce qui change la précédente en $4y + 4 = 3y^2 + 6y$; d'où (201) $y = -\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{13}$, et $x = \frac{5}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{13}$. Effectivement le double de ces deux nombres, le triple de leur produit, et la différence de leurs quarrés sont trois quantités égales dont chacune est $\frac{8}{3} \pm \frac{4}{3}\sqrt{13}$.

208. Les solutions précédentes suffiront pour trouver celles des problêmes suivans. On pourra s'y exercer, quand on n'aura rien de mieux à faire; car les méthodes une fois comprises, il ne faut pas trop insister sur les exemples, ni s'appesantir sur les détails.

On demande à un homme combien il a d'écus. Il répond : si vous ajoutez ensemble la moitié, le tiers, et le quart de ce que j'en ai, la somme surpassera d'un le nombre que vous demandez ?

Un père a 50 ans; son fils en a 12. Quand est-ce que l'âge du père ne sera que le triple du fils ?

Une personne charitable voulut un jour faire l'aumône à plusieurs pauvres, et donner également à tous. D'abord elle avait projeté de donner 3 sous à chacun, mais il lui aurait fallu 9 sous de plus; elle ne leur en donna donc que 2, et il lui en resta 2. Combien y avait-il de pauvres? Combien cette personne avait-elle de sous?

Un ouvrier n'avait plus que 6^{fr} lorsqu'on lui paya cinq semaines de travail. Quinze jours après il avait

déjà dépensé les trois quarts de tout son argent : mais ayant reçu le prix de son travail pour ces quinze jours, il se trouva avoir 21#. Que gagnait-il par semaine ?

Le testament d'un oncle porte que chacun de ses neveux aura 12000# et chacune de ses nièces 9000 sur la somme de 120000# qu'il leur laisse après sa mort. Par cette disposition il ne reste rien de cette somme. Si au contraire chaque nièce eût eu 12000#, et chaque neveu 9000# il serait resté 9000#. Trouver le nombre des neveux et celui des nièces.

Un chasseur promet à un autre de lui donner une somme b, toutes les fois qu'il manquera une pièce de gibier. Cet autre à son tour s'engage à payer une somme c, toutes les fois qu'il la tuera. Après un nombre n de coups de fusil, il peut arriver, ou que les deux chasseurs ne se doivent rien, ou que le premier, soit redevable au second, ou le second au premier, d'une quantité d. On demande une formule qui fasse connaître dans les trois cas combien il y a eu de coups manqués.

Trouver un nombre tel qu'en le divisant en m parties égales, le produit de toutes ces parties soit égal à celui de $m + 1$ parties égales du même nombre ; de manière, par exemple, que le produit des deux moitiés de ce nombre soit égal au produit de ses trois tiers.

Une personne ayant doublé au jeu l'argent qu'elle avait avant que de jouer, donne un louis à ses domestiques. Gagnant une seconde fois de quoi doubler l'argent qui lui reste, elle met à la loterie un louis qui ne lui rapporte rien. Entrant au jeu pour la troisième fois, et doublant son argent, elle ne se trouve plus avoir qu'un louis dans sa poche. Combien avait-elle d'argent d'abord ?

A, B et C ont chacun un certain nombre d'écus que l'on ne connaît pas. Tout ce que l'on en sait se réduit à ceci. A distribuant de ses écus à B et à C, a doublé les nombres respectifs qu'ils en avaient déjà. B distribuant à son tour les siens, a doublé ceux qui restaient entre les mains de A et ceux que C avait

alors. Enfin C a doublé de même ceux que A et B avaient au moment de sa distribution; et tout cela fait, chacun s'est trouvé en avoir 16. Combien en avaient-ils en commençant ?

Avec un nombre quelconque a de cartes, on fait un nombre quelconque b de tas dont chacun contient un égal nombre quelconque c de points. On a compté ces points de manière que la première carte de chaque tas vaut onze points, si c'est un as; dix points, si c'est une figure, et ainsi de suite : les autres cartes du même tas ne sont comptées que pour un point chacune. Quand tous ces tas sont faits, on vous remet le nombre d des cartes qui restent, et on vous propose de deviner la somme des points formés par les seules premières cartes de tous les tas. Comment la devinerez-vous ?

Etant donné le produit π, de deux poids, et leur différence δ, chercher combien chacun de ces poids-là pèse.

On suppose connues la somme de deux nombres et la somme de leurs cubes : trouver ces nombres.

Quel est le nombre dont p fois la puissance m est égale à g fois la puissance $m+2$?

Nous traiterons des Equations des degrés plus élevés, après avoir expliqué ce qui regarde les proportions.

DES RAPPORTS ET DES PROPORTIONS.

209. ETANT données deux quantités quelconques, on peut soustraire l'une de l'autre, pour savoir quelle est leur différence : on peut aussi diviser l'une par l'autre, pour connaître leur quotient.

Le résultat de la première opération est de marquer la quantité dont une grandeur surpasse l'autre; le résultat de la seconde est de marquer le nombre de fois qu'une grandeur en contient une autre. Le premier résultat s'appelle le *Rapport* ou la *Raison Arithmétique* de ces quantités. Le second s'appelle le *Rapport* ou la *Raison Géométrique* de ces mêmes quantités; (démo-

minations assez mal imaginées, mais que l'usage a pourtant consacrées).

Comparant, par exemple, 39 avec 13, pour savoir de combien 49 surpasse 13, j'écris $39 - 13 = 26$, et je dis que la raison arithmétique de 39 à 13 est 26.

En comparant ces deux mêmes nombres 39 et 13 pour savoir combien de fois 13, par exemple, est contenu dans 39, je divise 39 par 13, et le quotient 3 exprime la raison géométrique de 39 à 13.

Si on eût divisé 13 par 39, le quotient eût été $\frac{1}{3}$ (54). Or rien n'oblige à diviser plutôt la première quantité par la seconde, que la seconde par la première. Il suffira donc de prévenir, une fois pour toutes, que dans les exemples suivans nous estimerons les rapports géométriques en divisant la seconde quantité par la première.

210. Comme toute comparaison suppose au moins deux termes, on est convenu de les appeler l'un l'*Antécédent*, l'autre le *Conséquent* de la raison, soit arithmétique, soit géométrique qui en résulte. Ainsi *tout rapport arithmétique consiste dans la différence qu'il y a entre l'antécédent et le conséquent; et tout rapport géométrique s'exprime par le quotient d'un de ces deux termes divisé par l'autre.*

211. Lorsque deux quantités ont entr'elles une différence égale à celle qui règne entre deux autres quantités, on dit alors que ces quatre termes sont en *proportion arithmétique*. Les nombres 7 et 4, par exemple, diffèrent entr'eux de la même quantité 3, que les nombres 8 et 5; ainsi ces quatre nombres sont en proportion, et pour l'indiquer on est convenu d'écrire.

$$7 . 4 : 8 . 5, \text{ ou } 7 . 4 = 8 . 5$$

ce qui signifie 7 est à 4 comme 8 est à 5; ou le rapport arithmétique de 7 à 4 est égal au rapport arithmétique de 8 à 5.

Il suit de là que *deux raisons arithmétiques égales forment toujours une proportion arithmétique*. Voici quelques exemples de ces sortes de proportions.

$$24 . 12 : 60 . 48 \ldots . 1002 . 1000 : 2 . 0$$

$$18\tfrac{2}{3} . 14\tfrac{1}{3} = 11 . 6\tfrac{2}{3} \ldots . 19\tfrac{1}{5} . 23 = 24\tfrac{3}{5} . 28\tfrac{1}{5} .$$

212. Lorsqu'il règne entre deux quantités un même quotient qu'entre deux autres, ces quatre quantités sont en *proportion géométrique*. Si on divise, par exemple, 12 par 6, le quotient est 2; et si on divise 18 par 9, le quotient est encore 2. Ainsi les nombres 6, 12, 9 et 18 forment une proportion géométrique que l'on indique de la manière suivante :

6 : 12 :: 9 : 18... ou 6 : 12 = 9 : 18, ou $\frac{12}{6} = \frac{18}{9}$.

On prononce 6 est à 12 comme 9 est à 18, ou ce que 9 est à 18.

Concluons donc que *deux raisons géométriques égales forment toujours une proportion géométrique.*

Exemples 2 : 6 : : 5 : 15... 7 : 63 : : 1 : 9.

$\frac{5}{17} : \frac{10}{17} : : 1 : 2 \ldots \frac{3}{8} : \frac{6}{16} : : 1 : 1.$

213. Le premier et le dernier terme d'une proportion s'appellent *extrêmes*. Le second et le troisième s'appellent les *moyens*.

Quand on compare deux raisons géométriques ensemble, il arrive quelquefois que l'antécédent de la première est à son conséquent, comme le conséquent de la seconde est à son antécédent : on dit alors que ces deux derniers termes sont en *raison inverse* des deux premiers. Les quatre nombres suivans sont dans ce cas-là 13 ; 26... 14 ; 7. Dans les cas où le premier antécédent est à son conséquent comme le second antécédent est à son conséquent, on dit que les deux derniers termes sont en *raison directe* des deux premiers.

214. On appelle *proportions continues* toutes celles où le conséquent de la première raison sert d'antécédent à la seconde. On en distingue de deux sortes; les proportions continues arithmétiques, et les proportions continues géométriques.

Exemple des premières.. : 10. 18 : 18. 26.

On écrit pour abréger..... ÷ 10. 18. 26.

Exemples des derniers..... 6 : 24 :: 24 : 96.

On écrit..... ∺ 6 : 24 : 96.

Dans les deux cas, le second terme s'appelle le *moyen proportionnel*. Seulement on ajoute le mot arithmétique ou géométrique, suivant la nature des rapports dont ce terme fait partie.

215. Quand on écrit plusieurs raisons égales de suite, on a un certain nombre de quantités proportionnelles entre elles : mais quand le conséquent de la première de ces raisons sert d'antécédent à la seconde, et que le conséquent de la seconde sert d'antécédent à la troisième, et ainsi des autres, la suite de ces raisons égales, forme une *progression* dont l'espèce se détermine par la nature des raisons qui la composent. Voici, par exemple, une progression arithmétique.

1. 3 : 3. 5 : 5. 7 : 7. 9 : etc. On écrit ÷ 1. 3. 5. 7. 9. etc.

La progression suivante est géométrique ;

1 : 2 :: 2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16 :: etc. On écrit ÷ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : etc.

216. En général on appelle progression arithmétique toute suite de termes qui comparés deux à deux successivement, ont entre eux une même différence : et on appelle progression géométrique toute suite de termes tels que la division successive de l'un par l'autre ramène toujours le même quotient.

Des Proportions Arithmétiques.

217. S'il était possible d'avoir une formule générale des proportions arithmétiques, tout ce que l'on aurait démontré relativement à cette formule, s'étendrait généralement à tous les cas particuliers.

Or une proportion arithmétique, avons-nous dit (211), ne peut être formée que par deux raisons arithmétiques égales : donc si nous parvenons à trouver deux de ces raisons exprimées généralement, il en résultera l'expression générale des proportions arithmétiques.

Pour trouver ces deux raisons, soit a l'antécédent de la première ; soit b son conséquent ; soit d la différence de ces deux termes. On aura $a - b = \pm d$, suivant que a sera plus grand ou plus petit que b ; et par conséquent (192) $b = a \pm d$. Mais on peut représenter toute raison arithmétique par celle de $a . b$; donc en substituant la valeur de b, on peut aussi représenter toute raison arithmétique par celle de $a : a \pm d$.

Cela posé, toute autre raison arithmétique pouvant être

être représentée par celle de $c.f$, il faut que $c-f=\pm d$, pour que cette raison soit égale à celle de $a.\ b$ (210). De l'équation $c-f=\pm d$, on tirera donc $f=c\mp d$; ainsi toute raison arithmétique égale à celle de $a.\ a\mp d$ peut être représentée par celle de $c.\ c\mp d$. Nous avons donc l'expression de deux raisons arithmétiques égales, et parconséquent la formule cherchée pour toutes les proportions arithmétiques. Cette formule est,

$$a.\ a\mp d : c.\ c\mp d.$$

218. De là nous conclurons, 1°. que dans une raison arithmétique quelconque l'antécédent diminué ou augmenté de la différence est égal au conséquent.

219. Nous conclurons, 2°. que *dans toute proportion arithmétique la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.* Car si on ajoute les extrêmes de la formule précédente, on trouvera $a+c\mp d$; et si on ajoute les moyens, on retrouvera les mêmes termes. L'égalité des extrêmes et des moyens a donc lieu dans la formule; et parconséquent elle a lieu dans tous les cas des proportions arithmétiques. C'est même la plus utile de leurs propriétés. Ainsi toutes les fois que l'on aura $a.\ b : c.\ d$, on en inférera $a+d=b+c$.

220. Nous conclurons, 3°. que si dans une proportion arithmétique, il y a un des deux extrêmes inconnu, sa valeur se trouvera tout de suite, en soustrayant l'autre extrême de la somme des moyens.

Exemple. On demande le quatrième terme de la proportion $17.29 : 13.\ x$. On a (219) $17+x=29+13$; donc $x=42-17=25$.

Si le terme inconnu est un des deux moyens, on voit bien ce qu'il faut faire pour avoir sa valeur.

221. 4°. Dans toute proportion arithmétique continue, la somme des extrêmes est double du terme moyen proportionnel. Car alors la proportion $a.\ b : c.\ d.$, se change en celle-ci $a.\ b : b.\ d$; d'où on tire $a+d=2b$.

222. 5°. Pour trouver le moyen proportionnel arithmétique x entre deux termes a et b, on écrira $a.\ x : x.\ b$. Puis $\frac{a+b}{2}=x$; c'est-à-dire, que le moyen propor-

tionnel arithmétique entre deux quantités données est égal à la moitié de la somme de ces quantités.

223. 6°. Puisqu'une progression arithmétique est toujours une suite de termes entre lesquels il règne une même différence, on doit voir que la formule suivante convient à toutes ces progressions, parceque chaque terme y diffère également de celui qui le précède.

$$\div a . a \mp d . a \mp 2d . a \mp 3d . a \mp 4d . a \mp 5d . \text{etc.}$$

Le signe supérieur est pour les progressions décroissantes; le signe inférieur est pour les progressions croissantes.

224. 7°. Ce qui est vrai dans cette nouvelle formule, doit donc trouver son application dans toutes les progressions arithmétiques. Or dans cette formule, la somme des termes également éloignés des extrêmes est toujours constante; c'est-à-dire, qu'elle est égale à la somme de ces extrêmes, ou à la somme des moyens, ou au double du moyen, quand il y a un nombre impair de termes. Prenons pour exemple le second terme $a \mp d$, et l'avant-dernier $a \mp 4d$. Leur somme est de $2a \mp 5d$. Les extrêmes sont a et $a \mp 5d$, dont la somme est évidemment la même. Les moyens sont $a \mp 2d$ et $a \mp 3d$ dont la somme est également $2a \mp 5d$.

On peut vérifier ces résultats sur les nombres suivans, par exemple,

$$\div 7 . 12 . 17 . 22 . 27 . 32 . 37 . 42 . 47 .$$

225. 8°. On a remarqué dans la formule des progressions arithmétiques, qu'un terme quelconque était égal à la somme du premier terme a et du produit de la différence commune d par le nombre des termes précédens. Donc on peut avoir un terme quelconque dans une progression arithmétique dont on connaît le premier terme a, la différence d, et le nombre n des termes.

Le terme cherché étant appelé ω, on aura toujours $\omega = a \mp d(n - 1)$.

226. 9°. Dans cette même formule, on a remarqué que la différence du premier terme a au dernier $a \mp 5d$.

est égale au produit de la différence commune d par 5, nombre des termes moins un : et on en a conclu que dans toutes les progressions arithmétiques croissantes on devait avoir $\omega - a = d(n-1) = dn - d$, en appelant ω le dernier terme, a le premier, d la différence, et n le nombre des termes. C'est ainsi que dans la progression $\div$ 4.9.14.19.24.29.34.39. on trouve que $39 - 4 = 5(8-1) = 5.7 = 35$.

Le même résultat a lieu dans les progressions décroissantes, en appelant leur premier terme ω et le dernier a.

Exemple. La différence des deux extrêmes de la progression $\div$42.35.28.21.14, est $28 = 42 - 14 = 7(5-1) = 7.4$

227. 10°. En considérant de nouveau la formule générale des progressions, on a vu que la somme de tous ces termes était égale au produit des deux extrêmes par la moitié du nombre des termes. On a vu, par exemple, que la somme des extrêmes, $a + a \mp 5d$. ou $2a \mp 5d$ multipliée par 3, moitié du nombre des termes, donnait pour produit $6a \mp 15d$. Or la somme de tous les termes $\div a.a \mp d.a \mp 2d.a \mp 3d.a \mp 4d.a \mp 5d$ donne aussi $6a \mp 15d$. Donc la somme des termes d'une progression arithmétique quelconque est égale au produit de la somme des extrêmes par la moitié du nombre des termes.

Appelant donc a et ω les deux extrêmes, s la somme des termes, n leur nombre, on aura généralement

$$s = (a + \omega)\frac{n}{2} = \frac{an + \omega n}{2}.$$

On peut donc dire aussi que la somme des termes d'une progression arithmétique est toujours égale à la moitié du produit de la somme des extrêmes par le nombre des termes, ou au produit du terme moyen, (si le nombre des termes est impair) par le nombre des termes. Tous ces produits sont égaux.

Il est donc bien aisé de calculer la somme des coups frappés par une horloge, à chaque tour du cadran.

228. Après tous ces détails, on ne trouvera point de difficulté dans la résolution des deux problêmes suivans.

I. Problême. Etant donnés deux termes a et ω, comment insérer entre eux un nombre m de moyens proportionnels, de manière qu'il en résulte une progression arithmétique ?

Ce problême sera résolu aussitôt que l'on connaîtra la différence de la progression cherchée. Or on sait (226) que $\omega - a = d(n - 1)$ et on voit que dans ce cas, $n - 1 = m + 1$; donc $\frac{\omega - a}{m+1} = d$. Divisant donc la différence des deux termes donnés par le nombre m des moyens proportionnels, augmenté d'une unité, on aura toujours pour quotient la différence cherchée.

Exemples. On voudrait intercaler six termes proportionnels-arithmétiques entre 3 et 32. Faites $a = 4$ ... $\omega = 32$ ... $m = 6$, et vous aurez $\frac{\omega - a}{m+1} = \frac{28}{7} = 4 = d$. Ainsi la progression demandée sera

$$: 4.8.12.16.20.24.28.32.$$

Entre 13 et 7 on voudrait insérer quatre termes qui fissent une progression arithmétique.

Je fais $\omega = 13$... $a = 7$... $m = 4$, et j'ai $d = \frac{13-7}{5} = \frac{6}{5}$. Mais comme la progression est décroissante, il faut soustraire de chaque terme la différence commune. ainsi la progression sera : $13.11\frac{4}{5}.10\frac{3}{5}.9\frac{2}{5}.8\frac{1}{5}.7$.

229. II. Problême. On suppose que le premier terme soit représenté par a, que le dernier soit représenté par ω, la différence par d, le nombre des termes par n, et leur somme par s : et on demande des formules qui fassent connaître immédiatement la valeur de deux quelconques de ces quantités, les trois autres étant supposées connues.

Solution. De l'équation $\omega - a = dn - d$, on tirera d'abord quatre formules différentes pour les valeurs respectives de a, ω, d et n. (Mais avant que d'entrer dans aucun détail, il est à propos de prévenir le Lecteur que ce problême est rarement utile. On peut donc en négliger la solution, et passer tout de suite aux proportions géométriques). Ces quatre formules sont :

I. $a = \omega - dn + d$... III. $d = \frac{\omega - a}{n - 1}$.

II. $\omega = a + dn - d$... IV. $n = 1 + \frac{\omega - a}{d}$.

De l'équation $2s = an + \omega n$ (227), on tirera ces quatre autres formules

V. $a = \frac{2s}{n} - \omega$... VII. $n = \frac{2s}{a + \omega}$.

VI. $\omega = \frac{2s}{n} - a$... VIII. $s = \frac{an + \omega n}{2}$.

Et si dans l'équation $2s = an + \omega n$, vous substituez la valeur de ω prise dans l'équation $\omega - a = dn - d$, vous aurez $2s = 2an + dnn - dn$, d'où vous tirerez les quatre formules suivantes,

IX. $a = \frac{s}{n} - \frac{dn + d}{2}$... XI. $n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d} + \frac{a^2}{d^2}\right)}$.

X. $d = \frac{2s - 2an}{nn - n}$... XII. $s = an + \frac{dnn - dn}{2}$.

Substituant ensuite dans la même équation $2s = an + \omega n$, la valeur de a prise dans l'équation $\omega - a = dn - d$, vous trouverez $2s = 2\omega n - dnn + dn$, équation qui vous donnera quatre nouvelles formules

XIII. $\omega = \frac{s}{n} + \frac{dn - d}{2}$... XV. $n = \frac{1}{2} + \frac{\omega}{d} + \sqrt{\left(-\frac{2s}{d} + \frac{1}{4} + \frac{\omega}{d} + \frac{\omega^2}{d^2}\right)}$.

XIV. $d = \frac{2\omega n - 2s}{nn - n}$... XVI. $s = \omega n - \frac{dn^2}{2} + \frac{dn}{2}$.

Substituant enfin dans $2s = an + \omega n$, la valeur de n prise dans la première équation, vous aurez.... $2s = a + \omega + \frac{\omega^2 - a^2}{d}$, d'où se tirent les quatre dernières formules.

XVII. $a = \frac{1}{2}d + \sqrt{(-2ds + \frac{1}{4}d^2 + \omega d + \omega^2)}$... XIX. $d = \frac{\omega^2 - a^2}{2s - a - \omega}$.

XVIII. $\omega = -\frac{1}{2}d + \sqrt{(2ds + \frac{1}{4}d^2 - ad + a^2)}$... XX. $s = \frac{a + \omega}{2} + \frac{\omega^2 - a^2}{2d}$.

Et si l'on veut disposer ces vingt formules de manière à reconnaître dans l'instant celle qui doit donner la valeur demandée, on peut les arranger de la manière suivante :

Etant donnés	Trouver	FORMULES.
ω, d, n	a	$a = \omega - dn + d.$
ω, n, s		$a = \frac{2s}{n} - \omega.$
ω, d, s		$a = \frac{1}{2}d + \sqrt{(-2ds + \frac{1}{4}d^2 + \omega d + \omega^2)}.$
d, n, s		$a = \frac{s}{n} - \frac{dn + d}{2}.$
a, d, n	ω	$\omega = a + dn - d.$
a, n, s		$\omega = \frac{2s}{n} - a.$
a, d, s		$\omega = -\frac{1}{2}d + \sqrt{(2ds + \frac{1}{4}d^2 - ad + a^2)}.$
d, n, s		$\omega = \frac{s}{n} + \frac{dn - d}{2}.$
a, ω, n	d	$d = \frac{\omega - a}{n - 1}.$
a, n, s		$d = \frac{2s - 2an}{nn - n}.$
a, ω, s		$d = \frac{\omega^2 - a^2}{2s - a - \omega}.$
ω, n, s		$d = \frac{2\omega n - 2s}{nn - n}.$
a, ω, d	n	$n = 1 + \frac{\omega - a}{d}.$
a, ω, s		$n = \frac{2s}{a + \omega}.$
a, d, s		$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d} + \frac{a^2}{d^2}\right)}.$
ω, d, s		$n = \frac{1}{2} + \frac{\omega}{d} + \sqrt{\left(-\frac{2s}{d} + \frac{1}{4} + \frac{\omega}{d} + \frac{\omega^2}{d^2}\right)}.$
a, ω, n	s	$s = \frac{an + \omega n}{2}.$
a, d, n		$s = an + \frac{dnn - dn}{2}.$
a, d, ω		$s = \frac{a + \omega}{2} + \frac{\omega^2 - a^2}{2d}.$
ω, d, n		$s = \omega n - \frac{dnn + dn}{2}.$

APPLICATIONS. I. On sait, d'après les observations de Galilée, que les espaces parcourus en vertu de la gravité par un corps qui descend du repos, croissent suivant la progression des nombres impairs 1, 3, 5, 7 etc.; c'est-à-dire, qu'un corps tombant par la seule impression de la gravité, parcourt à-peu-près 15 pieds dans la première seconde de sa chute, 45 pieds dans la seconde suivante, et ainsi de suite. On demande combien il aura parcouru de pieds au bout de six secondes ?

Ce problême se réduit à trouver la somme d'une progression arithmétique dont le premier terme $a = 15$ pieds, dont la différence $d = 30$, et dont le nombre des termes $n = 6$.

Je prends donc pour le résoudre la seconde formule des valeurs de s, et j'ai

$$s = an + \frac{(dn - d)\,n}{2} = 90 + \frac{(180 - 30)\,5}{2} = 540.$$

Ainsi le corps dont il s'agit aura parcouru 540 pieds après 6″ de chute.

II. Un voyageur voudrait bien arriver en 4 jours à sa destination, en accélérant chaque jour sa marche de 3 lieues. Pour exécuter son dessein, il est obligé de faire 29 lieues $\frac{1}{2}$ le dernier jour. On demande combien il a dû faire le premier jour.

Ce problême se résout par la formule qui donne la valeur de a quand on connaît ω, d, n. On a donc

$$a = \omega - dn + d = 20\tfrac{1}{2}.$$

Ce voyageur doit donc faire 20 lieues $\frac{1}{2}$ le premier jour, et par la formule $s = \omega n - \frac{dnn + dn}{2}$, on trouverait que la route qu'il a faite dans ces quatre jours est de 100 lieues.

III. Si on eût demandé en combien de jours ce voyageur aurait parcouru les cent lieues, en faisant 20 lieues $\frac{1}{2}$ le premier jour, 3 de plus le jour suivant, et ainsi de suite, on se serait servi de la formule qui donne la valeur de n, quand a, d, s sont connus. Cette formule est

$$n = \tfrac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \tfrac{1}{4} - \frac{a}{d} + \frac{a^2}{d^2}\right)};$$

et l'on aurait trouvé $n = 4$, après avoir fait les opérations convenables.

IV. Une personne a été mise à l'amende pendant plusieurs mois de suite. Elle a payé 6# pour le premier mois, et 102# pour le dernier. Chaque mois l'amende était plus forte de 12#; combien de mois l'a-t-elle payée ?

Ici on connaît $a = 6\#\ldots\omega = 102\#\ldots d = 12$, et on cherche n. On prendra donc la formule suivante :

$$n = 1 + \frac{\omega - a}{d} = 1 + \frac{102 - 6}{12} = 9;$$

et on trouvera que l'amende a dû être payée pendant 9 mois.

V. Dans un amas de boulets de canon disposés en progression arithmétique croissante, je suppose 1°. qu'il y ait 18 rangs dont chacun soit formé par un nombre de boulets plus grand de 2 que le rang qui le précède ; 2°. qu'il y ait en tout 360 boulets ; et je demande combien il y en a dans le dernier rang.

Puisque l'on connaît d, n, s, on aura

$$\omega = \frac{s}{n} + \frac{d(n-1)}{2} = 20 + 17 = 37.$$

VI. Les mêmes choses étant posées, combien y a-t-il de boulets dans la première rangée ?

$$a = \frac{s}{n} - \frac{d(n-1)}{2} = 20 - 17 = 3.$$

DES PROPORTIONS GÉOMÉTRIQUES.

230 Soit appelé a l'antécédent d'une raison géométrique quelconque ; soit appelé b le conséquent de cette même raison, on aura $\frac{b}{a}$ pour l'expression générale du rapport qu'il y a entre ces deux termes (209). Soit q ce rapport ; on aura $\frac{b}{a} = q$, d'où l'on tirera $b = aq$. Ainsi

partout où sera b, on pourra substituer aq; ce qui change la raison de $a : b$ en celle de $a : aq$. On peut donc représenter toute raison géométrique quelconque par celle de $a : aq$; c'est-à-dire, que *dans les raisons géométriques, le conséquent est toujours égal à l'antécédent multiplié par le quotient qui exprime le rapport de ces deux termes.*

231. Soit appelé c l'antécédent d'une autre raison quelconque ; soit d le conséquent de cette raison. On aura $\frac{d}{c}$ pour l'expression du rapport qui se trouvera entre ces deux termes; et si ce rapport est égal à celui de $\frac{b}{a}$, on aura $\frac{d}{c}=q$; d'où l'on tirera $d=cq$. On pourra donc substituer la raison de $c : cq$, à celle de $c : d$. Ainsi les deux rapports que l'on suppose égaux entre a et b, et entre c et d, peuvent être remplacés par ceux de $a : aq$, et de $c : cq$.

232. Donc *toute proportion géométrique est généralement représentée par la formule* a : aq :: c : cq. Parconséquent les propriétés de cette formule s'étendent à toutes les proportions géométriques. Or dans cette formule le produit acq des extrêmes est égal au produit aqc des moyens. Donc généralement, *dans toutes les proportions géométriques, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.* Proposition remarquable par l'usage continuel que l'on en fait dans toutes les parties des Mathématiques.

233. Et de là il suit 1°. qu'étant donné trois termes d'une proportion dont on ne connaît pas le quatrième, il est fort aisé de trouver ce quatrième terme. Car s'il est un des extrêmes, comme dans la proportion $a : b :: c : x$, on aura tout de suite $ax=bc$, et parconséquent $x=\frac{bc}{a}$. S'il est un des moyens, comme dans la proportion $a : y :: c : d$, on aura tout de même $ad=cy$, et $y=\frac{ad}{c}$.

234. Donc un terme quelconque d'une proportion géométrique est égal, si c'est un moyen, au produit des extrêmes, divisé par l'autre moyen; et si c'est un

extrême, il est égal au produit des moyens, divisé par l'autre extrême.

Exemple. On demande le quatrième terme de la proportion $3 : 18 :: 5 : x$.

Faites $3x = 18.5$, et concluez que

$$x = \frac{18.5}{3} = 6.5 = 30.$$

On demande le troisième terme de la proportion $7 : 63 :: x : 18$.

Vous aurez $7.18 = 63x$; donc $x = \frac{7.9.2}{7.9} = 2$.

235. De l'égalité du produit des extrêmes à celui des moyens, il suit, 2°. que de toute proportion géométrique représentée par celle de $a : b :: c : d$, on peut toujours tirer une équation, qui est $ad = bc$.

236. Réciproquement, d'une équation quelconque on peut toujours déduire une proportion; et comme on a souvent besoin de ces sortes de transformations, nous en donnerons ici plusieurs exemples.

Si on a $mn = pq$, on conclura que $m : p :: q : n$; proportion bien juste, puisque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Si on avait $a^2 - x^2 = b^2 - y^2$, on en déduirait (126) $a + x : b + y :: b - y : a - x$.

Etant donné l'équation $1 - z^2 = \omega$, on trouverait $1 + z : \omega :: 1 : 1 - z$.

Enfin de l'équation $xy = 1$, on tirerait la proportion suivante, $x : 1 :: 1 : y$, ou $\div x : 1 : y$, que l'on sait (214) être une proportion géométrique-continue.

237. Or dans toutes les proportions de cette espèce, le produit des extrêmes est égal au quarré du moyen proportionnel Car si dans la proportion générale $a : b :: c : d$, on suppose $c = b$, on aura la proportion continue $a : b :: b : d$, qui donne $ad = b^2$.

Donc pour insérer un moyen proportionnel-géométrique x entre deux quantités connues a et d, il faut extraire la racine quarrée du produit de ces deux quantités. C'est ainsi que pour trouver le moyen proportionnel entre 3 et 12, on fait $\div 3 : x : 12$, et que l'on a $x^2 = 36$; ce qui donne $x = 6$.

238. De la propriété fondamentale des proportions géométriques, il suit, 3°. que l'on peut faire subir à quatre grandeurs proportionnelles tous les changemens qui n'altèrent pas la proportion. On peut donc mettre les extrêmes à la place des moyens (inversion que l'on trouve annoncée dans plusieurs ouvrages par le mot *invertendo*) : on peut aussi mettre un moyen à la place de l'autre, ou un des extrêmes à la place de l'autre extrême (changement exprimé par le mot *alternando*), sans détruire la proportion qui subsistait auparavant entre ces quatre termes. En un mot, tous les changemens que l'on peut faire dans une proportion géométrique, sans détruire l'égalité du produit des moyens au produit des extrêmes, laissent subsister la proportion. Si on a, par exemple, $a : b :: c : d$, aucune des inversions ou permutations suivantes ne troublera l'égalité des deux rapports

$$b : a :: d : c \quad b : d :: a : c \quad d : b :: c : a$$
$$a : c :: b : d \quad c : a :: d : b \quad c : d :: a : b.$$

Car on voit que toutes ces proportions donnent également $ad = bc$. Si l'on veut même en former une infinité d'autres par voie d'addition, de soustraction, de multiplication, de division, etc., on le pourra toujours, pourvu qu'on fasse les mêmes opérations sur deux raisons égales. On peut dire, par exemple, que si $a : b :: c : d$, on a

$$a \pm b : b :: c \pm d : d; \text{ ou } a : a \pm b :: c : c \pm d.$$
$$a \pm b : a \mp b :: c \pm d : c \mp d \ldots na : b :: nc : d.$$

On a aussi $a^m : b^m :: c^m : d^m \ldots a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} :: c^{\frac{1}{n}} : d^{\frac{1}{n}}$. Car puisque $ad = bc$, on a $a^m d^m = b^m c^m$, et $a^{\frac{1}{n}} d^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} c^{\frac{1}{n}}$.

239. En général, toutes les fois que l'on a des quantités proportionnelles entre elles, leurs puissances de même nom sont proportionnelles aussi. Leurs racines n'étant que des puissances fractionnaires, celles de même nom forment toujours une proportion.

240. Il suit, 4°. que si on a deux proportions géométriques représentées,

L'une par. . . . . , $a : aq :: c : cq$,
L'autre par. . . . . $g : gp :: h : hp$.

Leurs produits, terme par terme, sont aussi proportionnels; desorte que l'on aura,

$$ag : agpq :: ch : chpq.$$

Il suffit, pour s'en convaincre, de comparer le produit des extrêmes avec celui des moyens. D'ailleurs pq est le quotient des deux conséquens divisés par leurs antécédens; donc les deux raisons sont égales. Pareillement si on divise les quatre termes d'une proportion par les quatre termes d'un autre, les quotiens seront en proportion.

241. 5°. Soit une suite de termes proportionnels représentée par $a : aq :: c : cq :: e : eq :: g : gq$; on a remarqué qu'il régnait un même quotient q entre la somme des antécédens $a + c + e + g$ de cette formule et la somme des conséquens $aq + cq + eq + gq$, qu'entre un antécédent quelconque a et son conséquent aq, ou même qu'entre un nombre quelconque de ces antécédens et le même nombre de conséquens. Et de cette remarque on a conclu que dans une suite de raisons géométriques égales, quelles qu'elles soient, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un seul antécédent est à son conséquent; ou comme un nombre quelconque d'antécédens est au même nombre des conséquens.

On pourrait dire aussi que cette proportion a lieu généralement dans tous les cas semblables, puisque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens dans la formule suivante qui peut représenter tous les cas pareils:

$$a + c + e + g : (a + c + e + g)\,q :: a : aq :: a + c + e : (a + c + e)\,q.$$

242. Ici nous remarquerons, 1°. qu'étant donnée une raison géométrique quelconque, on peut en former une suite d'autres qui lui seront parfaitement égales, soit en multipliant, soit en divisant ses deux termes par

une même quantité. Car soit $a : aq$ la raison donnée; soit m le multiplicateur de ces deux termes; on aura pour produit am et amq, qui ont visiblement entre eux le même rapport q qui existait entre a et aq.

Si on eût divisé par n ces deux termes, les quotiens $\frac{a}{n}$ et $\frac{aq}{n}$, auraient eu pareillement le même rapport q. Une raison géométrique ne change donc pas de valeur, soit que l'on multiplie, soit que l'on divise ses deux termes par une même quantité.

Or toute fraction peut être regardée comme une raison géométrique. Il est donc démontré [ce que nous n'avions pu qu'insinuer (49)] que la multiplication ou la division des deux termes d'une fraction quelconque par une même quantité n'altère jamais la valeur de cette fraction.

Et de là il suit évidemment que deux quantités quelconques ont entre elles le même rapport, que leurs moitiés, leurs tiers, leurs quarts, et toutes leurs parties semblables. Ainsi on a toujours,

$$a : b :: \tfrac{1}{2} a : \tfrac{1}{2} b :: \tfrac{1}{10} a : \tfrac{1}{10} b :: \frac{1}{p} a : \frac{1}{p} b.$$

243. Nous remarquerons, 2°. que l'on appelle en général raison composée, le rapport des produits de deux ou de plusieurs raisons géométriques quelconques, multipliées antécédent par antécédent, et conséquent par conséquent. On dit, par exemple, que la raison de $mnp : qrs$ est une raison composée de trois raisons simples $m : q \ldots n : r \ldots p : s$ qui peuvent être mises aussi sous cette forme $\frac{m}{q}, \frac{n}{r}, \frac{p}{s}$.

Mais quand une raison est composée de deux raisons égales, on dit alors que c'est une raison doublée. Ainsi la raison de $ab : abqq$ est la raison doublée des raisons simples et égales de $a : aq$ et de $b : bq$. Quand il y a trois raisons égales, le rapport des produits respectifs s'appelle une raison triplée, etc.

244. Or la raison doublée de deux autres est égale à celle des quarrés d'une quelconque de ces raisons. Et la raison triplée est la même que celle des cubes d'une

des trois raisons qui lui servent de facteurs. Car soient les deux raisons égales $a : aq$ et $b : bq$; il est évident que la raison doublée $ab : abq^2$ est exprimée par le même quotient q^2, que la raison des quarrés $a^2 : a^2q^2$ des deux premiers termes, ou celle de $b^2 : b^2q^2$, quarré des deux derniers.

Ce qui regarde l'égalité de la raison triplée à celle des cubes d'une des trois raisons simples, se démontre de la même manière.

245. Cherchons maintenant les propriétés des progressions géométriques ; et pour les trouver d'une manière générale, tâchons de les déduire d'une formule qui représente toutes les progressions de cette espèce.

On sait (215) qu'une progression géométrique est une suite des termes qui tous à l'exception du premier et du dernier sont alternativement antécédens et conséquens d'une suite de raisons égales. Or l'égalité de ces raisons se manifeste par l'identité du quotient qui les exprime. Donc la formule suivante peut représenter toute progression géométrique :

$$\div\!\!\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 \ldots aq^n.$$

246. 6°. Dans cette formule on voit que les exposans de q sont en progression arithmétique, puisqu'à cause de $q^0 = 1$ (154), on peut y faire ce léger changement.

$$\div\!\!\div aq^0 : aq^1 : aq^2 : aq^3 : aq^4\, aq^5 : aq^6 \ldots aq^n.$$

On voit aussi qu'en faisant $a = 1$, cette dernière formule devient $\div\!\!\div\ q^0 : q^1 : q^2 : q^3 : q^4 \ldots : q^n$; et qu'alors elle exprime la suite des puissances entières d'une quantite quelconque q. Ainsi les puissances successives et entières d'une même quantité forment toujours une progression géométrique. Il n'en est pas de même des puissances successives et fractionnaires, parceque leurs exposans $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. ne sont pas en progression arithmétique.

En général, toutes les fois que les exposans de diverses puissances d'une même quantité sont en progression arithmétique, les termes affectés de ces exposans sont en progression géométrique.

Exemples. $\div\div q^2 : q^5 : q^8 : q^{11} : q^{14}$ etc... $\div\div b : b^3 : b^5 : b^7 : b^9$ etc. La même chose se démontre généralement par la formule $\div\div cq^m : aq^{m+1d} : aq^{m+2d} : aq^{m+3d}$, etc. dont les exposans sont en progression arithmétique quelconque, et dont les termes sont évidemment en progression géométrique, puisqu'il règne entre eux un même quotient q^d.

247. 7°. Reprenant la formule générale..... $\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4$, etc. nous observerons que le produit de deux termes également éloignés des extrêmes y est égal au produit des extrêmes, lequel à son tour est égal au produit des moyens, si le nombre des termes est pair, ou au quarré du moyen, si le nombre des termes est impair. Car $aq \times aq^3 = a \times aq^4 = aq^2 \times aq^2$; donc toutes les progressions géométriques ont la même propriété.

248. Et puisque les proportions continues ne sont que des progressions de trois termes, nous conclurons généralement, comme nous l'avons déjà fait (237), que dans toute proportion géométrique - continue, le produit des extrêmes est égal au quarré du moyen proportionnel.

249. 8°. Considérant la même formule, nous observerons aussi que son premier terme est au troisième, comme le quarré du premier est au quarré du second; puisque l'on a $a : aq^2 :: a^2 : a^2q^2$. Cette propriété a donc lieu dans toutes les progressions géométriques.

On a pareillement $a : aq^3 :: a^3 : a^3q^3$. Donc le premier terme d'une progression géométrique quelconque est au quatrième, comme le cube de ce premier terme est au cube du second.

En général, deux termes quelconques de cette formule sont entre eux comme le premier et le second élevés à la puissance marquée par l'intervalle qui sépare les deux termes dont il s'agit.

250. 9°. Dans la formule des progressions, on voit qu'un terme quelconque est égal au produit du premier par le quotient élevé à une puissance marquée par le nombre des termes précédens. Le sixième terme, par exemple, aq^5, n'est autre chose que le produit du premier terme a par le quotient q élevé à la cinquième

puissance. Appelant donc ω le terme que l'on cherche, et désignant par n le nombre de tous les termes de la progression, on aura généralement $\omega = aq^{n-1}$; formule qui va bientot nous être utile.

251. De ce qui précède, on déduit facilement la valeur de la somme s des termes d'une progression géométrique quelconque, dont on connaît le premier terme a, le dernier ω, et le quotient q. Car tous les termes d'une progression, hors le dernier, étant antécedens, on peut représenter la somme des antécédens par $s - \omega$; et tous les termes de cette même progression, hors le premier, étant conséquens, la somme des conséquens peut être représentée par $s - a$. Mais nous savons (241) que dans une suite de raisons géométriques égales, et parconséquent dans toute progression géometrique, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un antécédent quelconque est à son conséquent. On a donc $s - \omega : s - a :: a : aq$; d'où l'on tire d'abord $saq - a\omega q = sa - aa$; puis $sq - \omega q = s - a$; ensuite $sq - s = \omega q - a$; enfin $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$.

Cette formule, jointe avec la précédente, va nous servir à résoudre un problême analogue à celui que nous avons déjà résolu (229) pour les progressions arithmétiques : mais pour en saisir tous les résultats, il faut avoir lu auparavant ce qui a rapport aux Logarithmes, et aux Equations des degrés supérieurs. On peut donc passer tout de suite au chapitre suivant, quand on ne connaît pas ces deux théories.

252. I. Problême. Etant données dans une progression géométrique trois des quantités suivantes, a le premier terme, ω le dernier, n le nombre des termes, s leur somme, q le quotient, trouver immédiatement l'une des deux autres.

La première formule $\omega = aq^{n-1}$, en donne trois autres, desorte que l'on a,

$$\text{I. } \omega = aq^{n-1} \ldots \text{III. } n = 1 + \frac{L\omega - La}{Lq}.$$

$$\text{II. } a = \frac{\omega}{q^{n-1}} \ldots \text{IV. } q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}.$$

La

La seconde formule $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$ en donne trois nouvelles, et l'on a

$$\text{V. } s = \frac{\omega q - a}{q - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{VII. } \omega = s - \frac{s + a}{q}.$$

$$\text{VI. } a = \omega q - sq + s \ldots\ldots \text{VIII. } q = \frac{s - a}{s - \omega}.$$

Substituant dans la seconde la valeur de ω prise dans la première équation, on trouvera

$$\text{IX. } s = a\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \ldots \text{ XI. } n = \frac{\text{L}(sq - s + a) - \text{L}a}{\text{L}q}.$$

$$\text{X. } a = s\left(\frac{q - 1}{q^n - 1}\right) \ldots \text{XII. } q^n - \frac{s}{a}q + \frac{s}{a} - 1 = 0.$$

Si on substitue dans la même formule $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$, la valeur de $a = \frac{\omega}{q^{n-1}}$, on aura

$$\text{XIII. } s = \frac{\omega}{q^n - 1}\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \ldots \text{ XV. } n = 1 + \frac{\text{L}\omega - \text{L}(\omega q - sq + s)}{\text{L}q}.$$

$$\text{XIV. } \omega = s\,q^{n-1}\left(\frac{q - 1}{q^n - 1}\right) \ldots \text{XVI. } q^n - \frac{s}{s - \omega}q^{n-1} + \frac{\omega}{s - \omega} = 0.$$

Enfin substitution faite de la valeur de $q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$, dans la même équation $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$, les quatre dernières formules seront

$$\text{XVII. } s = \frac{\omega^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{\omega^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}} \ldots \text{XIX. } (s - \omega)\,\omega^{\frac{1}{n-1}} = (s - a)\,a^{\frac{1}{n-1}}.$$

$$\text{XVIII. } n = 1 + \frac{\text{L}\omega - \text{L}a}{\text{L}(s - a) - \text{L}(s - \omega)} \ldots \text{XX. } (s - a)\,a^{\frac{1}{n-1}} = (s - \omega)\,\omega^{\frac{1}{n-1}}.$$

On peut maintenant disposer ces vingt formules en table, comme nous l'avons déjà fait pour les progressions arithmétiques. Cet arrangement sera plus favorable à la résolution des problêmes particuliers.

Etant donnés	Trouver	FORMULES.
ω, q, n	a	$a = \frac{\omega}{q^{n-1}}.$
ω, s, n		$(s-a)\,a^{\frac{1}{n-1}} = (s-\omega)\,\omega^{\frac{1}{n-1}}.$
ω, q, s		$a = \omega q - sq + s.$
q, n, s		$a = s\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right).$
a, q, n	ω	$\omega = aq^{n-1}.$
a, s, n		$(s-\omega)\,\omega^{\frac{1}{n-1}} = (s-a)\,a^{\frac{1}{n-1}}.$
a, q, s		$\omega = s - \frac{s+a}{q}.$
q, n, s		$\omega = sq^{n-1}\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right).$
a, ω, n	q	$q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}.$
a, n, s		$q^n - \frac{s}{a}q + \frac{s}{a} - 1 = 0.$
a, ω, s		$q = \frac{s-a}{s-\omega}.$
n, ω, s		$q^n - \frac{s}{s-\omega}q^{n-1} + \frac{\omega}{s-\omega} = 0.$
a, ω, q	n	$n = 1 + \frac{L\omega - La}{Lq}.$
a, ω, s		$n = 1 + \frac{L\omega - La}{L(s-a) - L(s-\omega)}.$
a, q, s		$n = \frac{L(sq - s + a) - La}{Lq}.$
ω, q, s		$n = 1 + \frac{L\omega - L(\omega q - sq + s)}{Lq}.$
a, ω, n	s	$\frac{\omega^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{\omega^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}.$
a, q, n		$s = a\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right).$
a, ω, q		$s = \frac{\omega q - a}{q-1}.$
ω, n, q		$s = \frac{\omega}{q^{n-1}}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right).$

Digitized by Google

253. APPLICATIONS. I. On a tiré, à cinq reprises différentes, du vin d'un tonneau, en suivant une progression géométrique croissante, dont le dernier terme est 243 pintes, et dont le quotient est 3. Combien de pintes a-t-on dû tirer la première fois ?

Soit $\omega = 243 \ldots q = 3 \ldots n = 5$: et on aura par la première des vingt formules $a = \frac{\omega}{q^{n-1}} = \frac{243}{3^4} = \frac{243}{81} = 3$. C'est-à-dire, que l'on a tiré 3 pintes de vin la première fois.

II. Une personne ayant joué à quitte-ou-double contre une autre, a perdu dix fois de suite. Elle avait joué 3# la première fois : que perd-elle après la dixième ?

Les données sont $a = 3^{\#} \ldots q = 2 \ldots n = 10$, et on cherche ω. Je trouve la valeur demandée, par la cinquième formule $\omega = aq^{n-1} = 3.\ 2^9 = 3.\ 512 = 1536$.

III. On suppose que la population d'un pays où les mœurs et la liberté règnent avec l'abondance, s'est accrue uniformément tous les ans d'une manière si rapide que de dix mille ames qu'il y avait d'abord, il s'en est trouvé 14641 au bout de cinq ans ; suivant quelle progression a dû se faire cet accroissement ?

$a = 10000 \ldots \omega = 14641 \ldots n = 5$, et on demande q. Jetant donc les yeux sur la troisième case, où toutes les valeurs de q sont réunies, je prends la formule

$q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$, et j'ai $q = \sqrt[4]{\frac{14641}{10000}} = \frac{11}{10}$. L'accroissement annuel a donc dû être de $\frac{1}{10}$.

IV. Pour s'être obstiné à plaider, il en a coûté 121000# à un plaideur forcené. Le premier procès ne lui coûte que cent pistoles, mais aussi le dernier lui a coûté 81000#. On sait d'ailleurs que les frais des autres ont été moyens-proportionnels entre ces deux extrêmes : on voudrait savoir combien ce plaideur a perdu de procès ?

Soit $a = 1000^{\#} \ldots \omega = 81000^{\#} \ldots s = 121000^{\#}$; on trouvera la valeur de n par la formule

$$n = 1 + \frac{L\omega - La}{L(s-a) - L(s-\omega)},$$

qui donne

$$n=1+\frac{L81000-L1000}{L120000-L40000}=1+\frac{L\left(\frac{81000}{1000}\right)}{L\left(\frac{120000}{40000}\right)}=1+\frac{L81}{L3}=1+\frac{4L3}{L3}=5.$$

V. Un dissipateur a mangé tout son bien en cinq mois de temps; chaque mois il quadruplait sa dépense, et le premier mois il avait dépensé cent louis. On demande quel était son bien ?

$a=2400^{\#}\ldots.\ q=4\ldots.\ n=5$; ainsi la valeur de s se déduira de la formule....

$$s=a\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)=2400\left(\frac{4^5-1}{3}\right)=800.1023=818400^{\#}.$$

Ces applications sont plus que suffisantes pour diriger dans tous les cas le choix que l'on doit faire des formules convenables.

254. II. Problême. Insérer un nombre m de moyens-proportionnels-géométriques entre deux termes donnés a et ω.

Solution. Si $m=1$, on a aussitôt $\div a : x : \omega$; donc $x=\sqrt{a\omega}$.

Si $m=2$, on aura $\div a : x : y : \omega$ et pour déterminer x, on se rappellera (249) que $a : \omega :: a^3 : x^3$, et on en conclura que $ax^3=a^3\omega\ldots..$ que $x^3=a^2\omega\ldots..$ que $x=\sqrt[3]{a^2\omega}$

La valeur de x étant une fois connue, on déterminera celle de y par la proportion suivante $a : \sqrt[3]{a^2\omega} :: y : \omega$ dont tous les termes élevés au cube donnent..... $a^3 : a^2\omega :: y^3 : \omega^3$; et parconséquent $a^3\omega^3=a^2\omega y^3$; donc $y=\sqrt[3]{a\omega^2}$.

Plus généralement : soit m un nombre quelconque; la question se réduira à déterminer le quotient q d'une progression dont on connaît déjà le premier terme a, le dernier ω, et le nombre des termes n, qui dans le cas présent peut être représenté par $m+2$. Or la neuvième formule donne, $q=\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$; donc $q=\sqrt[m+1]{\frac{\omega}{a}}$. Ainsi la progression cherchée aura la forme suivante,

$$\div a : \sqrt[m+1]{a^m\omega} : \sqrt[m+1]{a^{m-1}\omega^2} : \sqrt[m+1]{a^{m-2}\omega^3}\ldots : \omega.$$

Et si l'on veut en faire une application, en insérant quatre moyens-proportionnels, par exemple, entre a et ω, on n'aura qu'à substituer 4 au lieu de m, on trouvera

$$\div\div a : \sqrt[5]{a^4\omega} : \sqrt[5]{a^3\omega^2} : \sqrt[5]{a^2\omega^3} : \sqrt[5]{a\omega^4} : \omega.$$

255. III. Problême. Entre les termes consécutifs d'une progression géométrique, insérer un nombre p de moyens-proportionnels.

Soit représentée par $\div\div aq^0 : aq^1 : aq^2 : aq^3 : aq^4 :$ etc. la progression dont il s'agit. Il est évident que si vous insérez entre les exposans consécutifs de ses termes un nombre p de moyens proportionnels-arithmétiques, les termes affectés de ces exposans seront les moyens-proportionnels-géométriques que l'on demande (246). Ainsi pour insérer cinq de ces termes dans la formule, on écrira

$$\div\div aq^0 : aq^{\frac{1}{6}} : aq^{\frac{2}{6}} : aq^{\frac{3}{6}} : aq^{\frac{4}{6}} : aq^{\frac{5}{6}} : aq : aq^{\frac{7}{6}} : aq^{\frac{8}{6}} : \text{etc.}$$

Dans le calcul des Logarithmes, on peut se servir de cette espèce d'interpolation.

On trouve dans les ouvrages du P. Mersenne, un exemple connu des amateurs de la musique. Il s'agissait de partager l'octave en douze semi-tons égaux, pour former ce que les musiciens appellent l'*accord égal*, et pour cela il fallait insérer onze moyens-proportionnels-géométriques entre 1 et 2. Le P. Mersenne les a calculés en nombres par la formule suivante, que l'on trouve aussi dans la *Génération Harmonique* de M. Rameau, et dans plusieurs autres ouvrages.

$$\div\div 1 : 2^{\frac{1}{12}} : 2^{\frac{2}{12}} : 2^{\frac{3}{12}} : 2^{\frac{4}{12}} : 2^{\frac{5}{12}} : 2^{\frac{6}{12}} \ldots : 2.$$

DE LA REGLE DE TROIS,

Et de quelques autres Règles qui en dépendent.

256. Etant donnés trois termes, on a souvent besoin d'en connaître un quatrième qui leur soit proportionnel; et ce quatrième terme se trouve, comme l'on sait (234), d'une manière bien facile. La règle que l'on met alors en usage, s'appelle *la Règle de Trois* : ce n'est qu'une

simple application de la propriété fondamentale des proportions géométriques (232).

L'usage est de distinguer deux sortes de règles de Trois ; l'une que l'on appelle *directe*, l'autre que l'on appelle *inverse*.

Soit proposé, par exemple, de déterminer le prix de 25 marcs d'argent, en supposant que le marc coûte $52^{\#}$. Il est évident que le prix inconnu doit être au prix donné, dans le même rapport que les 25 marcs sont à un seul marc. Appelant donc x le prix que l'on cherche, on aura $1^{m} : 25^{m} :: 52^{\#} : x$, d'où on tirera $x = \frac{52 \cdot 25}{1} = 1300^{\#}$.

Si on eût proposé de trouver le prix de 70 marcs dans l'hypothèse qu'il en eût coûté $714^{\#}$ pour 14 marcs, on eût dit $14^{m} : 70^{m} :: 714^{\#} : x^{\#}$, et on aurait conclu que $x = \frac{70 \cdot 714}{14} = 3570$. Ces deux exemples sont du nombre des règles de trois directes.

Mais si on proposait cette question, 57 ouvriers ont fait un certain ouvrage en 5 jours ; combien faudrait-il de jours à 19 ouvriers pour faire le même ouvrage ?

La règle de trois serait inverse, parceque le temps nécessaire pour achever un même travail est en raison inverse du nombre des travailleurs. Aussi disposerait-on les trois termes connus autrement que dans les règles de trois directes ; on écrirait par exemple, ... $57^{\text{ouv.}} : 19^{\text{ouv.}} :: x : 5^{j}$. Et on trouverait $x = 15$; c'est-à dire, qu'il faudrait 15 jours pour que 19 ouvriers fissent le même ouvrage que 57 ouvriers auraient fait en 5 jours.

257. Remarquez, 1°. que si l'un des deux premiers termes d'une règle de trois est multiple de l'autre, on peut simplifier le calcul, en réduisant à la plus simple expression l'espèce de fraction qui en résulte. Au lieu d'écrire $57 : 19 :: x : 5$ ou $\frac{57}{19} = \frac{x}{5}$, on peut écrire $3 : 1 :: x : 5$, et en général, toutes les fois qu'il y a moyen d'introduire l'unité dans une proportion, il ne faut jamais y manquer, parcequ'alors le terme que l'on cherche, est le produit ou le quotient des deux autres. Par exemple, une des proportions précédentes, $14 : 70 :: 714 : x$ eût pu se réduire à une beaucoup plus simple, $1 : 5 :: 714 : x$. Et quand bien même on ne ra-

mènerait pas à l'unité un des termes connus, il suffit que l'on puisse le ramener du moins à un plus petit nombre, pour ne pas laisser échapper cette réduction.

258. Remarquez, 2°. que pour discerner les règles de trois inverses, on n'a qu'à comparer ensemble les termes qu'elles renferment, afin de voir si le rapport des deux premiers est l'inverse du rapport des deux autres. La moindre réflexion suffit pour connaître l'ordre dans lequel ces termes doivent être placés. On en pourra juger par les deux exemples suivans :

Six escadrons ont consommé un magasin de fourrage en 54 jours; en combien de jours l'eussent consommé neuf escadrons?

Plus il y a de chevaux, et moins il faut de temps pour la même consommation. La règle est donc inverse. Ainsi $6^e:9^e:x^j:54^j$. Donc $x=\frac{54\cdot 6}{9}=36^j$.

Autrement. $2\times 3:3\times 3:x:54$. D'où $2:3::x:54$; et $x=\frac{2}{3}.\ 54=36$.

Si pour un meuble particulier il faut 6 aunes d'une étoffe large de $\frac{2}{3}$, combien en faut-il d'une étoffe large de $\frac{3}{4}$?

Il est clair que plus l'étoffe est large, moins il en faut. On a donc $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}::x:6$, et réduisant au même dénominateur, $\frac{8}{12}:\frac{9}{12}::x:6$. D'où, $8:9::x:6$, ou $8:x::9:6$, ou encore $8:x::3:2$, ce qui donne $x=\frac{16}{3}=5^{aunes}+\frac{1}{3}$.

259. Remarquez, 3°. que dans une règle de trois inverse, on peut placer le terme inconnu au quatrième rang; il ne faut que changer de place les deux premiers termes. Ainsi, au lieu d'écrire $57:19::x:5$, on peut écrire $19:57::5:x$. Cela revient au même. Au reste, les règles de trois directes sont presque les seules dont on fasse usage dans les différentes parties des Mathématiques.

260. Soit proposé maintenant de résoudre cette question. 20 hommes ont fait 160 toises en 15 jours; combien 30 hommes en feront-ils en 12 jours?

On appelle règles de trois *composées* ces sortes de problêmes où il entre plus de trois termes connus. Pour trouver alors le terme que l'on cherche, on réduit la question à des règles de trois simples On peut dire, par exemple; si 20 hommes ont fait 160 toises,

combien 30 hommes en feront-ils dans le même temps ?

$$20:30::160:x\ ;\ \text{ou},\ 2:3::160:x=240.$$

Donc en 15 jours 30 hommes feront 240 toises. Mais on suppose qu'ils ne doivent travailler que pendant 12 jours. On aura donc $15:12::240:x$; ou $5:4::240:x$, ou même, $1:4::48:x=192^t$. C'est le nombre cherché.

Il eût été facile de le trouver en disposant ainsi les termes.... $\left\{\begin{matrix}20^h.\ 30^h.\\15^j.\ 12^j.\end{matrix}\right.::160^t.\ x.$ et en multipliant 20 par 15 et 30 par 12. Car 20 hommes qui travaillent 15 jours, font 300 journées de travail, pendant que 30 hommes qui travailleront 12 jours, en feront 360. Mais si 300 journées de travail ont produit 160 toises, il est clair que 360 journées en produiront 192 ; parceque $300:360$, ou $30:36$, ou $5:6::180:192$.

On peut même résoudre cette question sans employer la règle de trois, en disant ; 160 toises en 15 jours font $\frac{160}{15}$ par jour, dont la vingtième partie, ou $\frac{160}{15.20}$ est l'ouvrage que fait chaque homme par jour. 30 hommes feront donc $30\times\frac{160}{15.20}$, ou $\frac{30.160}{15.20}$ chaque jour ; et par-conséquent en 12 jours ils feront $\frac{12.30.160}{15.20}=\frac{12.2.8}{1.1}=192$.

Nous n'insisterons pas sur des choses aussi aisées. Quand on a un peu d'habitude du calcul, ces règles se présentent naturellement à l'esprit, ou on en imagine d'autres qui valent quelquefois mieux.

La règle de trois est du plus grand usage dans toutes les parties des Mathématiques. Elle sert beaucoup aussi dans quelques autres que nous allons parcourir.

261. *Règles de Compagnie*. Deux négocians ont mis 12000# en société dans le commerce, et ils ont gagné 1350#. Ils veulent partager ce gain à raison de leurs mises, qui sont 8000# pour le premier négociant, et 4000# pour le second. Que doit-il revenir à chacun ?

La réponse est aisée ; car la mise totale 12000#, est au gain total 1350#, comme la mise de chaque négociant est au gain qu'il doit faire. On a donc,

$12000:1350::8000:x$; ou $1200:135::8000:x$; ou encore, $400:45::8000:x$; ou bien $80:9::8000:x$; ou enfin, $1:9::100:x=900^{\#}$; c'est le gain du premier.

Ce qui reste de 1350# est le gain du second. Rien n'est plus facile.

Trois amis ont fait une bourse commune pour le jeu. Le premier a donné 117#; le second 72; le troisième 54. Ils ont perdu 93#. Quelle est la perte de chacun?

$$243 : 93 :: \begin{cases} 117 : x = \dfrac{117 \times 93}{243} = 44 + \frac{189}{243}. \\ 72 : x = \dfrac{72 \times 93}{243} = 27 + \frac{135}{243}. \\ 54 : x = \dfrac{54 \times 93}{243} = \dfrac{20 + \frac{162}{243}}{93}. \end{cases}$$

On eût pu diviser d'abord les deux premiers termes par 3, et diviser ensuite par 9 le quotient du premier, et chacun des troisièmes termes, en disant :

$$81 : 31 :: \begin{cases} 117 : x. \\ 72 : x. \\ 54 : x. \end{cases}$$

$$\text{Puis } 9 : 31 :: \begin{cases} 13 : x = 44 + \frac{7}{9}. \\ 8 : x = 27 + \frac{2}{9}. \\ 6 : x = 20 + \frac{6}{9}. \end{cases}$$

On vérifie ces sortes de règles en ajoutant les pertes ou les gains de tous les associés. La somme doit toujours être la perte totale ou le gain total.

262. Lorsqu'outre les mises particulières, il y a encore des temps différens, la règle de compagnie s'appelle *composée*.

Exemple. A, B et C ont gagné 1660# 12s avec un fonds qu'ils avaient mis en société. Il s'agit de partager ce gain en raison des mises. Celle de A est de 4500# pendant 6 mois; celle de B est de 3000# pendant 8 mois. C a mis 2250# pendant 10 mois.

Multipliez d'abord chaque mise par le temps qu'elle a été employée, et dites ensuite : la somme de tous ces produits est au gain total, comme chaque produit en particulier est à la partie proportionnelle de gain que je cherche.

4500	3000	2250
A.... 6	B.... 8	C.... 10
27000	24000	22500

La somme de ces produits est 73500; d'ailleurs $12^s = \frac{6}{10}$ de livre. J'ai donc

$$73500 : 1660{,}6 :: \begin{cases} 27000 : x. \\ 24000 : x. \\ 22500 : x. \end{cases}$$

Ou bien, divisant par 300 le premier terme et chacun des troisièmes,

$$245 : 1660{,}6 :: \begin{cases} 90 : x = 610^{\#} + \frac{4}{245}. \\ 80 : x = 542 + \frac{58}{245}. \\ 75 : x = 508 + \frac{85}{245}. \\ \hline \qquad\qquad 1660^{\#} + \frac{147}{245}. \end{cases}$$

La fraction $\frac{147}{245}$ se réduit à $\frac{3}{5} = 12^s$.

263. *La Règle d'Alliage* consiste, ou à trouver le prix moyen d'un mélange formé de plusieurs choses différentes, dont les quantités et le prix sont donnés, ou à trouver dans quelle proportion il faut prendre de chacune de ces choses, lorsque leurs prix et le prix moyen sont connus.

Premier cas A quel prix faudrait-il vendre le marc d'un alliage formé avec 6 marcs d'argent à $48^{\#}$, et 12 marcs d'argent à $36^{\#}$, pour n'y rien perdre ni gagner?

Multipliez chaque partie de l'alliage par son prix respectif, et divisez la somme des produits par celle des quantités mêlées; le quotient sera le prix moyen.

$$\begin{array}{ll} 6 \times 48^{\#} = 288 & \qquad \frac{720}{18} = 40^{\#}, \text{ prix cherché.} \\ \underline{12 \times 36} = \underline{432} & \\ 18 \qquad\quad 720 & \end{array}$$

Cette méthode est fondée sur la règle de trois que voici. La somme des marcs est à celle de leur prix, comme un seul marc de l'alliage est au prix moyen. Cette proportion, qui est évidemment juste, donne $18 : 720 :: 1 : x = \frac{720}{18} = 40$.

On vérifie le premier cas de la règle d'alliage, en évaluant tout le mélange au prix moyen.

Il eût été facile de trouver une formule algébrique qui eût indiqué la méthode dont nous venons de nous servir.

SECOND CAS. Le prix moyen et celui de chaque partie de l'alliage étant connus, il peut arriver, 1°. qu'aucune des quantités dont le mélange doit être formé, ne soit fixée ; 2°. qu'il y en ait une qui le soit; 3°. que l'on soit restreint à une certaine quantité d'alliage. Les exemples vont éclaircir tout cela.

1°. Un marchand de vin voudrait mêler du vin à 15^{f} la pinte avec du vin à 8^{f}, pour en avoir qu'il pût vendre 12^{f} la pinte. Combien doit-il prendre de chaque espèce pour faire ce mélange ?

Après avoir ainsi disposé les trois prix... 12 $\left\{\begin{array}{l}15...4\\8...3\end{array}\right.$ je prends la différence 3 de 12 à 15, et je la mets vis-à-vis 8. Je place réciproquement vis-à-vis 15 la différence 4 de 12 à 8, et je conclus que 3 pintes de vin à 8^{f} mêlées avec 4 pintes de vin à 15 feront du vin à 12^{f}. Cela est évident par la compensation qui se fait des deux prix, l'un supérieur l'autre inférieur au prix moyen.

264. Il ne faut pas cependant conclure de cette compensation, que les nombres 4 et 3 soient les seuls qui satisfassent aux conditions du problême. Car c'est ici une question indéterminée qui a une infinité de solutions, même en nombres entiers. Il suffit, pour les trouver, de prendre deux nombres qui soient dans le même rapport que 4 et 3 ; et pour cela, il n'y a qu'à les doubler, tripler, etc.

Si le mélange devait être fait avec du vin à 15^{f}, à 10 et à 8, pour avoir encore du vin à 12, on s'y prendrait à-peu-près de la même manière. C'est-à-dire, qu'après avoir comparé 15 et 8 avec le prix moyen 12, et disposé réciproquement les différences 3 et 4, on comparerait 15 et 10 avec le prix moyen 12, et on disposerait réciproquement aussi leurs différences 3 et 2. Voyez l'exemple.

6 pintes de vin à 15 sous, 3 pintes de vin à 10^{f} et 3 pintes à 8, mêlées ensemble, feraient donc 12 pintes de vin a 12^{f}. S'il devait entrer dans le mélange

$$12\left\{\begin{array}{l}15..4.2=6.\\10..3.\\8..3\\\hline\quad 12\end{array}\right.$$

quatre, cinq, ou six sortes de vin à différens prix, on les comparerait successivement deux à deux avec le prix

moyen, en observant de ne comparer à-la-fois que deux prix, l'un plus fort, l'autre plus faible que le prix moyen.

2°. Dans un temps de disette, un boulanger veut faire du pain avec de l'orge, du seigle et du froment, et le vendre 4 sous la livre. Il a 8 boisseaux et demi de froment qui feraient du pain à 5^{s} la livre. Le pain fait avec le seigle seul reviendrait à 3^{s} 8^{d}. Celui qu'il ferait avec l'orge coûterait 1^{s} 6^{d}. On demande combien il doit mêler de seigle et d'orge avec ces 8 boisseaux et demi de froment, pour faire du pain à 4^{s} la livre ?

Le prix moyen est ici 48^{d}. J'en prends les différences avec les autres prix, comme dans l'exemple précédent, et je dis :

$$48 \left\{ \begin{array}{l} 60 \ldots 30 \ldots 4. \\ 44 \ldots 12 \\ 18 \ldots 12 \end{array} \right.$$

Pour faire du pain à 4^{s} la livre avec les prix marqués, on pourrait donc prendre 34 boisseaux de froment avec 12 boisseaux de seigle et 12 boisseaux d'orge. Mais puisque la quantité de froment est fixée, il est clair que s'il faut 12 boisseaux de seigle et 12 d'orge sur 34 de froment, il en faudra sur 8 $\frac{1}{2}$ une quantité proportionnelle que je déterminerai par cette règle de trois,

$$34 : 8\tfrac{1}{2} :: 12 : x = 3 \text{ boisseaux} \left\{ \begin{array}{l} \text{de seigle.} \\ \text{d'orge.} \end{array} \right.$$

Il en est de même pour un plus grand nombre de choses à mêler, quand on connaît leurs prix et la quantité de l'une d'entre elles.

3°. On a trois sortes de café. La livre du premier vaut 50^{s}, celle du second en vaut 38, celle du troisième 24. Trouver dans quelle proportion il faut les mêler pour en faire 64 livres que l'on puisse vendre 30^{s} ?

Prenez les différences comme ci-dessus, et après les avoir ajoutées, dites : la somme des différences est à la quantité de mélange que l'on veut faire, comme chaque différence en particulier, est à la quantité qu'il faut prendre de tel ou tel café.

$$30 \left| \begin{array}{l} 50 \ldots 6 \\ 38 \ldots 6 \\ 24 \ldots 20.8 \\ \hline \quad\quad 40 \end{array} \right. \quad 40 : 64 :: \left\{ \begin{array}{l} 6 : x = 9\tfrac{3}{5}. \\ 6 : x = 9\tfrac{3}{5}. \\ 28 : x = 44\tfrac{4}{5}. \\ \hline \quad\quad 64 \end{array} \right.$$

265. La règle de fausse position sert à trouver un nombre inconnu par le moyen d'un nombre supposé. Soit proposé, par exemple, de trouver un nombre dont la moitié, le quart et le cinquième fassent 456.

Je suppose que ce nombre est 20. Mais il est clair que la moitié, le quart et le cinquième de 20 ne font que 10. Ma supposition est donc fausse. Elle n'en servira pas moins cependant à me faire connaître le nombre demandé. Car puisque deux quantités sont toujours entre elles comme leurs parties semblables (242), on peut les regarder, l'une comme la somme des antécédens d'une suite de termes proportionnels, l'autre comme la somme des conséquens. Or ces deux sommes sont entr'elles (241), comme un nombre quelconque d'antécédens est au même nombre de conséquens, et réciproquement; donc la moitié, plus le quart, plus le cinquième de 20 sont à la moitié, plus au quart, plus au cinquième du nombre que je cherche, comme le nombre 20 lui-même est au nombre cherché. J'ai donc $19 : 456 :: 20 : x = 480$.

Trois négocians ont perdu 2400# en société. Cette perte devant être répartie à proportion des mises, et la mise du premier négociant étant égale à la somme des deux autres, pendant que celle du second est double de celle du troisième; on demande quelle doit être la perte de chacun?

Si je suppose que la mise du troisième est de 3#, celle du second doit être de 6, et celle du premier de 9. D'où je conclus que

$$18 : 2400, \text{ ou } 3 : 400 :: \begin{cases} 3 : x = 400. \\ 6 : x = 800. \\ 9 : x = 1200. \end{cases}$$

Une infinité d'autres nombres formés suivant les mêmes conditions que 18, auraient donné le même résultat.

Combien faudrait-il de temps pour remplir un bassin, en ouvrant tout à la fois quatre robinets, dont le premier seul le remplirait en 2 heures, le second en 3, le troisième en 5, et le quatrième en 6?

Supposons qu'il fallût une heure, et voyons si le bassin se trouverait rempli. Il est clair que dans cet intervalle le premier robinet en remplirait la moitié, que le second

en remplirait le tiers, etc., et qu'ainsi les quatre à la fois fourniraient dans une heure de quoi remplir $\frac{36}{30}$ ou $\frac{6}{5}$ du bassin. Il ne faut donc pas une heure. Pour déterminer au juste ce qu'il faut, on dira

$$\tfrac{6}{5}:\tfrac{5}{5}, \text{ ou } 6:5::1^h:x=\tfrac{5^h}{6}=50'.$$

266. Il arrive souvent qu'une première supposition ne suffit pas pour résoudre ces petits problêmes : on en fait alors une seconde. C'est ce que l'on appelle *la règle de double fausse position.*

Exemple. On demande deux nombres dont la différence soit 8, et dont la somme soit 16.

Supposons que le plus petit de ces deux nombres soit 1 ; nous aurons 9 pour le plus grand, et 10 pour leur somme. Mais nous devons avoir 16 pour leur somme ; nous sommes donc en erreur de 6.

Supposons maintenant que le plus petit des deux nombres cherchés soit 3, ce qui donnera 11 pour le plus grand. On aura 14 pour leur somme, et 2 pour erreur.

Mais nous savons d'ailleurs (196) que le plus petit nombre cherché doit être 4, et nous voyons que « la première erreur est à la seconde, comme la différence entre le premier nombre supposé et le nombre cherché, est à la différence entre le second nombre supposé, et le même nombre cherché », puisqu'on a $6:2::3:1$. Reste donc à trouver une méthode qui fasse connaître le nombre cherché, dans tous les cas où il y a proportion entre les erreurs et les différences, dont nous venons de parler.

267. Soit donc x le nombre cherché ; soit a le premier nombre supposé, b le second, c la première erreur, d la seconde. Il est clair que toutes les fois qu'il y aura proportion entre les erreurs et les différences indiquées, on aura $c:d::x-a:x-b$, et que parconséquent $x=\frac{bc-ad}{c-d}$.

Donc « pour trouver, par la règle de double fausse position, le nombre cherché, il faut multiplier chaque nombre supposé par l'erreur qui répond à l'autre nombre

supposé, et diviser la différence de ces deux produits par la différence des deux erreurs ».

Nous avons supposé, dans l'exemple qui précède, que les deux erreurs étaient de même signe. Si elles eussent été de signes contraires, il eût fallu alors diviser la somme des mêmes produits, par la somme des erreurs; puisque d, par exemple, étant une quantité négative, la formule devient $x = \frac{bc + ad}{c + d}$.

Donc la formule générale sera $x = \frac{bc \pm ad}{c \pm d}$.

268. Toutes les fois que les deux nombres supposés ne satisferont point à l'énoncé du problême, on voit bien qu'il suffirait de ramener l'un des deux au nombre cherché, par une correction convenable. Soit donc y cette correction; soit d la plus petite erreur; soit b le nombre qui l'a produite, et le reste comme ci-dessus.

Il est clair que si b est plus petit que x, on aura $b + y = x = \frac{bc - ad}{c - d}$; ce qui donnera $y = \frac{(b - a)d}{c - d}$.

Mais si b est plus grand que x, alors $b - y = x = \frac{bc - ad}{c - d}$, d'où l'on tire $y = \frac{(a - b)d}{c - d}$. C'est-à-dire, que dans les deux cas, il faut multiplier la différence des deux nombres supposés par la plus petite erreur, et diviser ce produit par la différence des erreurs, lorsqu'elles ont le même signe, ou par leur somme, quand elles ont des signes différens. Le quotient est toujours la correction cherchée.

269. Rapprochons maintenant les diverses opérations de la règle de double fausse position. Elles consistent à supposer un nombre que l'on assujétit aux conditions du problême. S'il y satisfait, comme cela arrive quelquefois, le problême est résolu. S'il n'y satisfait pas, on marque l'erreur, soit positive, soit négative, et on suppose un autre nombre, que l'on applique de même aux conditions du problême. S'il en résulte une nouvelle erreur, on la marque comme la précédente. Ensuite on multiplie la première erreur par le second nombre, et la seconde erreur par le premier. Cela fait, on divise la somme des deux produits par celle des deux erreurs,

lorsque les signes de ces erreurs sont différens. S'ils sont les mêmes, c'est la différence des produits qu'il faut diviser par la différence des erreurs. Le quotient est le nombre cherché.

Exemple. Pour engager un ouvrier paresseux à travailler, on lui promet un écu par jour, à condition que les jours où il ne travaillera pas, il ne recevra rien, et qu'il perdra au contraire 24^s chaque fois. Au bout de 15 jours l'ouvrier ne reçoit que $24^{\#}$. Combien de jours a-t-il travaillé ?

Je suppose qu'il a travaillé pendant 6^j; mais je vois que dans cette supposition il n'aurait dû recevoir que $7^{\#}\ 4^s$. Il en a cependant reçu 24. Je suis donc en erreur de $16^{\#}\ 16^s$, ou de $16{,}8^{\#}$ en moins; d'où je conclus que cet ouvrier a travaillé plus de 6 jours.

Supposons donc qu'il ait travaillé pendant 12 jours, et voyons quel en sera le résultat. L'ouvrier aurait dû recevoir $32^{\#}\ 8^s$: il n'en a pourtant reçu que 24. L'erreur est donc de $8^{\#}\ 8^s$, c'est-à-dire, $8{,}4^{\#}$ en plus.

Je dispose ainsi les deux nombres supposés et les erreurs correspondantes

$$\begin{array}{cc} 6^j & 12^j \\ -16{,}8 & +8{,}4; \end{array}$$

puis je multiplie le premier nombre par la seconde erreur, et le second nombre par la première. Les produits sont 50,4 et 201,6. Je les ajoute, et divisant leur somme 252 par celle des erreurs (qui est 25,2) je trouve 10 pour quotient. C'est le nombre cherché.

Si les deux nombres supposés avaient donné deux erreurs de même signe, j'aurais divisé seulement la différence des produits par celle des erreurs.

Exemple. Après avoir trouvé, par la première supposition, que cet ouvrier a travaillé pendant plus de 6 jours, je suppose qu'il a travaillé pendant 9. L'erreur sera encore en moins, de $4^{\#}\ 4^s = 4{,}2^{\#}$. J'ai donc

$$\begin{array}{cc} 6^j & 9^j \\ -16{,}8 & -4{,}2; \end{array}$$

puis, $6 \times 4{,}2 = 25{,}2 \ldots\ldots 9 \times 16{,}8 = 151{,}2 \ldots\ldots$

151,2

$151,2 - 25,2 = 126 \ldots\ldots 16,8 - 4,2 = 12,6 \ldots\ldots$ et $\frac{126}{12,6} = 10$, comme ci-dessus.

La formule de la correction s'applique aisément à ces petits problêmes. Ici, par exemple, on aurait $y = \frac{(9-6)4,2}{16,8-4,2} = \frac{12,6}{12,6} = 1$; ce qui indique que le second nombre supposé, 9, doit être augmenté d'une unité, pour être égal au nombre que l'on cherche.

La plupart des problêmes du premier degré, qui ont déjà été résolus ou proposés (197 et 208), peuvent se résoudre facilement par la règle de double fausse position, qui ne paraît d'abord fondée que sur un simple tâtonnement, mais qui n'en est pas moins ingénieuse ni moins utile aux yeux des géomètres, et surtout des astronomes.

270. IV. La règle d'intérêt a pour but de fixer la somme due pour de l'argent prêté sous certaines conditions.

On peut les varier à l'infini, et c'est ce qui rend assez compliqué le calcul nécessaire en plusieurs cas. Nous nous bornerons à ceux qui sont le plus en usage; et laissant à chacun le soin de résoudre par la règle de trois ceux qui en sont susceptibles, nous considérerons la chose un peu plus généralement.

1°. Si un usurier a prêté 15600# à huit pour cent par an, quelle somme faudra-t-il lui donner dans cinq ans pour le rembourser, et lui payer en même temps l'intérêt de son argent?

Soit $p = 15600$#, que l'on appelle le principal, ou le fonds, ou le capital. Soit $t = 5$ ans, ou le temps pendant lequel l'intérêt court. Soit $r =$ ce que rapporte 1# dans un an, ou en général dans le temps que 100# en rapportent 8. (On trouve la valeur de r en disant, si 100# en rapportent 8, que rapportera 1# dans le même temps? $100:8::1:r = 0,08$). Soit enfin $s =$ la somme due, tant pour le fonds que pour les intérêts.

Cela posé, nous aurons $1\#:r::p\#:x = pr =$ l'intérêt du principal pour un an. Mais si au bout d'un an l'intérêt est pr, il sera prt au bout d'un temps t: car $1:pr::t:x = prt$. Réunissant donc le principal (p)

et l'intérêt (prt), on aura généralement la somme demandée (s) $= p + prt$; d'où l'on tire; $p = \frac{s}{rt+1}$ ... $r = \frac{s-p}{pt}$ .... $t = \frac{s-p}{pr}$.

Substituons les valeurs, et nous trouverons

$$s = 15600 + 15600 \times 0{,}08 \times 5 = 21840^{\#}.$$

Si la question eût été énoncée de cette manière. Au bout de cinq ans il a été payé tant pour le fonds que pour les intérêts à 8 pour cent, la somme de 21840#. Quel était le fonds? On eût substitué ces valeurs dans la formule $p = \frac{s}{rt+1}$, qui eût donné 15600#. On trouverait de même le temps ou l'intérêt.

271. 2°. Un commerçant doit payer cent pistoles chaque année à un de ses confrères; mais comme il a besoin de son argent, il le prie de ne pas en exiger pendant 8 ans, promettant de payer à cette époque tous les arrérages avec les intérêts à 5 pour 100.

J'appelle a ce qui est dû chaque année, soit rente, ou annuité, soit pension, etc. J'appelle r l'intérêt de 1# pendant un an; t le temps après lequel seront payés les intérêts et arrérages, dont je désigne la somme par s; et je dis. La rente ne doit être payée qu'à la fin de l'année. Le commerçant ne devra donc aucun intérêt pour la première année. Mais à la fin de la seconde il devra ar d'intérêt; à la fin de la troisième, $2ar$; et ainsi de suite jusqu'à la fin de la dernière, où les intérêts dus seront exprimés par $ar(t-1)$.

Or ces intérêts forment une progression arithmétique, dont le premier terme est zéro, le dernier $= ar(t-1)$, et le nombre des termes $= t$. Leur somme est donc (227) $\frac{t(t-1)ar}{2}$, et cette somme réunie à ce qui est dû pour la rente, doit former la somme des arrérages et des intérêts. Donc $s = art\frac{(t-1)}{2} + at = (r(t-1)+2)\frac{at}{2}$; ce qui donne $a = \frac{2s}{(r(t-1)+2)t}$ ... $r = \frac{2s-2at}{at(t-1)}$ ... $t = \sqrt{\left[\frac{2s}{ar} + \left(\frac{2-r}{2r}\right)^2\right]} + \frac{r-2}{2r}$.

Substituant les valeurs, on trouvera

$$s = (0{,}05 \times 7 + 2)\,\tfrac{8000}{2} = 9400^{\#}.$$

Et si on connaissait s, r, t, on trouverait a par la formule $a = \frac{2s}{(r(t-1)+2)t}$, etc. etc.

272. Ces sortes de questions appartiennent à ce que l'on appelle règle d'intérêt simple. Les deux suivantes se résolvent par la règle d'intérêt composé. On appelle ainsi l'intérêt qui provient du fonds et des intérêts de ce fonds.

3°. Une partie des biens d'un pupille consiste dans une somme de 20000# que son tuteur a placé à 5 pour 100. Au bout d'un an la personne qui avait emprunté cette somme, la rembourse et en paye l'intérêt convenu. Le tuteur trouvant aussitôt une occasion de placer cet argent au même intérêt, forme un nouveau capital de la somme des 20000# et de l'intérêt qu'elle a produit pendant un an, et place ce capital. Il place de même à la fin de la troisième année le fonds, et l'intérêt de la seconde, et ainsi de suite pendant six ans. Que doit-il à son pupille pour cette partie de son administration ?

Soit $p = 20000^{\#}$ qui font ici le principal; soit $t = 6$ ans; $s =$ la somme due par le tuteur; $r =$ l'intérêt simple d'une livre; $q = 1^{\#} + r =$ une livre plus son intérêt. On trouve q par cette proportion. Si 100# en produisent 105 au bout d'un an, que produira 1# ? ou $100 : 105 :: 1 : q = 1{,}05$.

Il est clair maintenant que si 1# produit q pendant un an, q produira la seconde année q^2; car $1 : q :: q : q^2$ La somme due pour 1# et pour son intérêt pendant deux ans sera donc q^2. Elle sera q^3 pour trois ans, et q^t pour un nombre t d'années. Mais puisque 1# produit q^t dans un temps t, p# produiront pq^t dans le même temps. on aura donc

$$s = pq^t = 20000 \times 1{,}05^6 = 20000 \times 1{,}3401 = 26802^{\#}$$

dont le tuteur est redevable à un ou deux sous de moins.

La formule $s = pq^t$ donne $p = \frac{s}{q^t} \ldots q = \sqrt[t]{\frac{s}{p}}$, ou $Lq = \frac{Ls - Lp}{t} \ldots t = \frac{Ls - Lp}{Lq}$. Les Logarithmes abrègent beaucoup le calcul dans les problêmes de ce genre.

273. Un banquier perçoit en 1783 une rente de 2400#, et il place ce revenu à quatre pour 100, en 1784. Il recevra donc à la fin de 1784, la somme de 2400#, pour sa rente, et 96# pour l'intérêt de celle qu'il avait perçue en 1783. Son projet est de placer ainsi tous les ans jusqu'en 1791 la rente de l'année précédente avec les intérêts des autres années. On demande combien il recevrait d'argent, si à la fin de 1790 les personnes qui lui ont emprunté, le remboursaient toutes à la fois.

Soit $a = 2400\# \ldots t = 8$ ans... $r = 0{,}04 =$ l'intérêt annuel d'une livre, $q = 1\# + r = 1{,}04 \ldots s =$ la somme demandée; et nous aurons $a =$ ce qui est dû au banquier en 1783; $2a + ar = a + aq =$ ce qui lui est dû en 1784; $a + aq + aq^2 =$ ce qui lui est dû en 1785; et ainsi de suite jusqu'à ce qui lui sera dû à la fin d'un nombre t d'années; l'expression de cette dette est $a + aq + aq^2 \ldots + aq^{t-1}$.

Or la somme de cette progression est (252)

$$\frac{q \times q^{t-1} - 1}{q - 1} \times a = \frac{q^t - 1}{r} \times a.$$

La somme due après un nombre t d'années est donc généralement exprimée par $s = \frac{q^t - 1}{r} \times a$; formule qui donne ici $s = \frac{(1{,}04)^8 - 1}{0{,}04} \times 2400 = 22114\#$ à deux ou trois sous près.

Elle donne aussi $a = \frac{rs}{q^t - 1} \ldots t = L\frac{\left(\frac{rs}{a} + 1\right)}{Lq} \ldots$ $\frac{s}{a} q - q^t = \frac{s - a}{a}$, en substituant $q - 1$ au lieu de r. Or cette dernière équation donnera au moins une valeur approchée pour q, si elle n'a pas de diviseur commensurable. On pourra donc en déduire la valeur de r,

qui étant multipliée par 100, fera connaître le taux de l'intérêt, toutes les fois que t, s et a seront connus.

Quelques notions sur les Séries.

274. On appelle *Série* ou *Suite* un assemblage de termes qui, pris consécutivement, croissent ou décroissent suivant une même loi : telles sont les progressions arithmétiques, géométriques, etc.

On appelle *Suite finie*, celle dont le nombre des termes est limité, et suite infinie celle que l'on suppose continuée jusqu'à l'infini.

Les suites dont les termes vont en augmentant de grandeur, s'appellent *divergentes*, et celles dont les termes décroissent de grandeur, s'appellent *convergentes*. Une suite diverge ou converge d'autant plus rapidement, que chaque terme croît ou decroît plus sensiblement à l'égard de celui qui le précède.

Voyons d'abord de quel usage est pour le calcul des séries la Méthode des *coefficiens indéterminés*.

On appelle ainsi une méthode fort connue des géomètres, par la grande utilité dont elle est, et par l'esprit d'invention qui y règne. Cette méthode a pour but de faire connaître la suite des termes que l'on peut déduire de certaines quantités algébriques. Mais pour la rendre bien intelligible, il faut l'appliquer à quelques exemples.

275. Supposons donc que l'on veuille réduire en série la quantité $\frac{\varphi}{p+x}$. On le pourrait sans doute, soit par le seul procédé de la division, soit par la formule du binome, mais on le peut aussi par la méthode suivante :

Soient A, B, C, D, E, etc. des quantités telles que l'on ait l'équation.

$$\frac{\varphi}{p+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

Cette supposition est très-permise, puisque les quantités A, B, C, etc., sont susceptibles de toutes les

valeurs que pourra exiger la suite du calcul, et que la quantité x se trouve successivement élevée à toutes ses puissances. L'essentiel est de déterminer les valeurs de ces coefficiens : or pour cela, on a imaginé d'abord de multiplier le second membre de l'équation par le dénominateur $p+x$ de la première, et on en a tiré, en ordonnant

$$\varphi = \begin{cases} Ap + Bpx + Cpx^2 + Dpx^3 + Epx^4 + \text{etc.} \\ \quad + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.} \end{cases}$$

Puis en transposant φ, on a eu

$$0 = \begin{cases} Ap + Bpx + Cpx^2 + Dpx^3 + Epx^4 + \text{etc.} \\ -\varphi + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.} \end{cases}$$

Après quoi on a dit... Puisque le second membre se réduit à zéro, il n'y a qu'à supposer que les quantités intermédiaires A, B, C, etc., opèrent cette réduction, de manière que tout se détruise, colonne par colonne : car alors on aura autant d'équations que d'inconnues, ce qui fera connaître les valeurs de ces quantités.

On a donc... $Ap - \varphi = 0$... $Bpx + Ax = 0$... $Cpx^2 + Bx^2 = 0$.. $Dpx^3 + Cx^3 = 0$.. $Epx^4 + Dx^4 = 0$.. etc. etc.

La première équation donne $Ap = \varphi$; d'où l'on tire $A = \frac{\varphi}{p}$... On substitue cette valeur dans la seconde équation, et on trouve $B = -\frac{\varphi}{p^2}$... On substitue de même la valeur de B dans la troisième équation, et on trouve que $C = \frac{\varphi}{p^3}$. Enfin, tout calcul fait, on a $\frac{\varphi}{p+x} = \frac{\varphi}{p} - \frac{\varphi x}{p^2} + \frac{\varphi x^2}{p^3} - \frac{\varphi x^3}{p^4} + \frac{\varphi x^4}{p^5} -$ etc. et la loi de la série est si manifeste, que l'on peut aisément pousser le calcul aussi loin que l'on voudra.

Soit proposé maintenant de réduire en série $\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}$. Je suppose que

$$\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

J'ai donc

$$a^2 = (a^2 + 2ax - x^2)(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

$$\text{ou} \quad a^2 = \left\{ \begin{array}{l} a^2A + a^2Bx + a^2Cx^2 + a^2Dx^3 + \text{etc.} \\ \quad + 2aAx + 2aBx^2 + 2aCx^3 + \text{etc.} \\ \qquad\qquad - \quad Ax^2 - \quad Bx^3 - \text{etc.} \end{array} \right\}$$

d'où je conclus $a^2 = a^2A$, et parconséquent $A = 1$; ensuite $a^2B + 2aA = 0$, qui donne $B = -\frac{2}{a}$. Le même procédé me fait trouver $C = \frac{5}{a^2} \ldots . D = -\frac{12}{a^3}$, etc.; d'où $\frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2} = 1 - \frac{2x}{a} + \frac{5x^2}{a^2} - \frac{12x^3}{a^3}$, etc.

276. Quand il y a deux termes dans le numérateur, on les égale respectivement aux deux termes homogènes de la série déjà multipliée par le dénominateur. Ainsi pour avoir la suite que donne $\frac{1 + 2x}{1 - x - x^2}$, on supposerait d'abord $1 + 2x = (1 - x - x^2)(A + Bx + Cx^2 + \text{etc.})$ on effectuerait ensuite la multiplication, et après avoir trouvé $A = 1$, et $B = 3$, on déterminerait comme à l'ordinaire C, D, etc.; d'où résulterait

$$\frac{1 + 2x}{1 - x - x^2} = 1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + 11x^4 + 18x^5, \text{ série}$$

bien aisée à continuer, puisque chaque coefficient est la somme des deux coefficiens qui précèdent, et que x est élevée successivement à toutes ses puissances. Cette série est du nombre de celles que l'on appelle *Récurrentes*, parceque pour former chaque terme, il faut avoir recours à ceux qui le précèdent.

277. Soit proposé d'extraire la racine quarrée de $a^2 - x^2$, que nous connaissons déjà (180). Supposez $\sqrt{(a^2 - x^2)} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \text{etc.}$ qui donne d'abord,

$$a^2 - x^2 = \left\{ \begin{array}{l} A^2 + 2ABx^2 + \quad B^2x^4 + 2ADx^6 + \text{etc.} \\ \qquad\qquad + 2ACx^4 + 2BCx^6 + \text{etc.} \end{array} \right.$$

ensuite $A^2 = a^2 \ldots . 2ABx^2 = -x^2$; d'où $A = a \ldots .$ $B = -\frac{1}{2a}$; ce qui donne $C = -\frac{1}{8a^3} \ldots . D = -\frac{1}{16a^5}$;

ensorte que la série $A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 +$ etc. devient $a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$, etc. On calculera de même E, F, etc., si l'on veut un plus grand nombre de termes.

278. Il y a trois principales suites de nombres. Celles des nombres *figurés* ou de différens ordres, celles des nombres *polygones*, et celles des puissances.

Les suites des nombres figurés commencent ainsi :

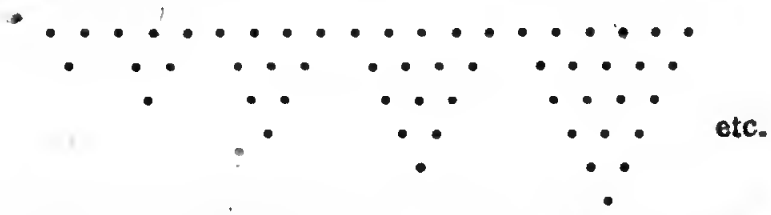
Nombres	constans ou du premier ordre.....	1, 1, 1, 1, 1, 1, etc.
	naturels ou du second ordre.....	1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.
	triangulaires ou du troisième ordre...	1, 3, 6, 10, 15, 21, etc.
	pyramidaux ou du quatrième ordre...	1, 4, 10, 20, 35, 56, etc.

La loi des suites des nombres figurés est, que chacun de leurs termes doit être la somme des termes correspondans de la suite précédente. Ainsi la seconde suite est formée par l'addition continuelle des unités; les termes de la troisième suite sont formés par l'addition continuelle de la seconde. Par exemple, $1 + 2 = 3 \ldots 1 + 2 + 3 = 6 \ldots 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \ldots 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, etc.

II. Les nombres polygones sont des nombres formés par la somme des termes consécutifs d'une progression arithmétique qui commence par 1. Et ces nombres s'appellent *triangulaires*, *quarrés*, *pentagones*, *hexagones*, etc., selon que la différence qui règne dans la progression est 1, 2, 3, 4, etc.

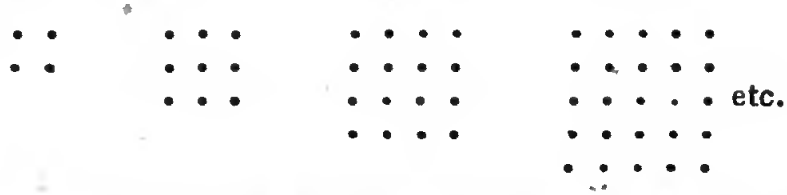
Progressions arithmétiques.		*Nombres polygones.*	
1, 2, 3, 4, 5, etc.	Diff...1.....	1, 3, 6, 10, 15, etc.	triangulaires.
1, 3, 5, 7, 9, etc.	Diff...2.....	1, 4, 9, 16, 25, etc.	quarrés.
1, 4, 7, 10, 13, etc.	Diff...3.....	1, 5, 12, 22, 35, etc.	pentagones.
1, 5, 9, 13, 17, etc.	Diff...4.....	1, 6, 15, 28, 45, etc.	hexagones.

On les appelle *polygones*, parcequ'ils expriment les divers nombres dont on peut disposer les unités en triangle, ou en quarré, ou en quelqu'autre polygone régulier. Par exemple, la suite des nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, etc., tire sa dénomination de ce que 3 unités, ou 6, ou 10, ou 15, ou 21, etc., peuvent être arrangées en triangle, de la manière suivante :



La suite des nombres quarrés 1, 4, 9, 16, etc. est ainsi appelée, parceque l'on peut donner une forme quarrée aux unités qu'ils

contiennent ; on peut les disposer, par exemple, de la manière suivante :



Il en est de même pour les nombres pentagonaux et ceux qui sont au-dessus. Plusieurs auteurs des deux derniers siècles ont beaucoup travaillé sur ces nombres ; mais ce genre de travail est si ingrat, que l'on a jugé à propos de l'abandonner presque tout-à-fait.

279. III. La troisième espèce de suite comprend celle des diverses puissances des nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, etc. Or l'opération principale qu'il y ait à faire sur les suites, consiste à trouver leur somme, et nous allons voir comment on peut la déterminer dans quelques cas.

De la sommation des Séries.

280. On peut faire sur les suites toutes les opérations de l'Arithmétique; mais la plus utile de toutes, et en même temps la plus difficile, consiste à les sommer, c'est-à-dire, à réduire en une seule expression finie tous les termes d'une suite donnée. C'est ordinairement en cette expression que consiste la solution des Problêmes dans lesquels les suites entrent, et ces problêmes sont nombreux.

Nous ne pouvons pas entrer dans un grand détail sur ce sujet, qui fait une des plus considérables parties de l'Analyse ; nous expliquerons seulement la manière de sommer quelques suites principales.

L'art de sommer les suites se borne, pour ainsi dire, à trouver la méthode d'en sommer quelques-unes qui servent de formules, auxquelles on ramène, s'il est possible, les suites que l'on veut sommer. Par exemple, ayant trouvé une formule pour sommer une progression géométrique décroissante à l'infini, on pourra toujours sommer les suites que l'on décomposera en plusieurs autres dont les termes seront en progression géométrique décroissante. (On désigne infini par ce signe, ∞ ; d'où $\frac{1}{\infty}$, $\frac{a}{\infty}$ etc. sont des infiniment petits).

Soit $\div\div \frac{d}{b} : \frac{d}{bq} : \frac{d}{bq^2} : \frac{d}{bq^3} : \frac{d}{bq^4} \ldots\ldots\ldots : \frac{d}{bq^\infty}$, une progression infinie décroissante (en supposant q plus grand que l'unité). Si on l'écrit dans un ordre renversé $\div\div \frac{d}{bq^\infty} \ldots : \frac{d}{bq^4} : \frac{d}{bq^3} : \frac{d}{bq^2} : \frac{d}{bq} : \frac{d}{b}$, on la rendra croissante, et en y appliquant la formule $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$ (251), dans laquelle $\omega = \frac{d}{b} \ldots\ldots a = \frac{d}{bq^\infty}$, on aura $s = \frac{\frac{dq}{b} - \frac{d}{bq^\infty}}{q - 1}$; négligeant ensuite le terme infiniment petit $\frac{d}{bq^\infty}$, et réduisant, on trouvera $s = \frac{dq}{bq - b}$; formule propre à donner la somme de toute progression géométrique décroissante à l'infini.

281. *Exemple.* On a vu (94) que la fraction $\frac{1}{3}$ pouvait être transformée par approximation en celle-ci 0, 333 etc.; mais que pour rendre cette transformation rigoureuse, il faudrait pousser l'approximation jusqu'à l'infini. La preuve en est que la somme de la progression $\div\div \frac{3}{10} : \frac{3}{100} : \frac{3}{1000}, \ldots \frac{3}{10^\infty}$, qui en résulte, est véritablement $\frac{1}{3}$. Car si on écrit d'abord cette progression, de manière à la rendre croissante, on aura $\frac{3}{10^\infty} \ldots \frac{3}{1000} : \frac{3}{100} : \frac{3}{10}$; et si on fait ensuite les substitutions convenables dans la formule $s = \frac{dq}{bq - b}$, on trouvera que $s = \frac{30}{100 - 10} = \frac{1}{3}$. Donc la somme de 0,99999, etc. est 1; comme la formule le donne.

Soit proposé maintenant de trouver en fraction ordinaire la valeur de 0.181818 à l'infini je fais $d = 18 \ldots$ $b = 100 \ldots q = 100$; et je trouve

$$s = \frac{1800}{10000 - 100} = \frac{1800}{9900} = \frac{2}{11}.$$

Soit 0,142857 142857 142857, etc., fraction periodique infinie dont on demande la valeur en fraction

ordinaire; je fais $d = 141857..$ $b = 1000000 = q$; et je trouve que la formule $s = \frac{dq}{bq - b}$ se réduit à $\frac{1}{7}$, comme nous le savions déjà (96).

282. Cherchons à présent le moyen de sommer une suite de fractions dont les numérateurs soient en progression arithmétique, et les dénominateurs en progression géométrique. Cette suite est $\frac{a}{b}, \frac{a+d}{bq}, \frac{a+2d}{bq^2}, \frac{a+3d}{bq^3}$, etc. Mettez-la d'abord sous cette forme

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{bq} + \frac{d}{bq}, \frac{a}{bq^2} + \frac{d}{bq^2} + \frac{d}{bq^2}, \frac{a}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3}, \text{ etc.}$$

De là vous pourrez déduire les séries suivantes, qui ne sont que des progressions géométriques :

$$\because \frac{a}{b} : \frac{a}{bq} : \frac{a}{bq^2} : \frac{a}{bq^3} : \text{ etc. la somme est } \frac{aq}{bq - b}.$$

$$\because \quad \frac{d}{bq} : \frac{d}{bq^2} : \frac{d}{dq^3} : \text{ etc. la somme est } \frac{d}{bq - b}.$$

$$\because \quad \frac{d}{bq^2} : \frac{d}{bq^3} : \text{ etc. la somme est } \frac{d}{bq^2 - bq}.$$

$$\because \quad \frac{d}{bq^3} : \text{ etc. la somme est } \frac{d}{bq^3 - bq^2}.$$

Or ces sommes (excepté la première) forment la progression $\because \frac{d}{bq - b} : \frac{d}{bq^2 - bq} : \frac{d}{bq^3 - bq^2}$: etc. dont la somme est $\frac{dq}{bq^2 - 2bq + b}$; si donc on y ajoute la première somme $\frac{aq}{bq - b}$, on aura $\frac{aqq - aq + dq}{bq^2 - 2bq + b}$ pour la somme des sommes, c'est-à-dire, pour la somme de toute la série proposée. Et c'est une formule générale pour sommer toutes les suites de fractions dont les numérateurs sont en progression arithmétique, et les dénominateurs en progression géométrique.

Remarque. Lorsqu'on ne peut sommer en termes finis une suite infinie, il faut tâcher de la mettre sous une forme rapidement convergente; car lorsqu'une suite converge très-vîte, il suffit de sommer quelques-uns de ses premiers termes; on peut ensuite négliger les autres sans erreur sensible.

Par exemple, dans $\sqrt{(aa+xx)}$ plus la valeur de x sera petite à l'égard de a, plus la suite $a+\frac{xx}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-$etc. convergera vîte, parceque les numérateurs deviennent très-petits à l'égard des dénominateurs. Soit $a=10$, et $x=1$, alors $\sqrt{101}=10+\frac{1}{20}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{1600000}$, où l'on voit que le quatrième terme est déjà comme infiniment petit, et que parconséquent les trois premiers termes suffisent, pour avoir, à très-peu-près, la racine de 101.

283. Soit proposé de trouver d'une manière générale la somme d'un nombre quelconque de termes, dans une progression quelconque des puissances des nombres naturels.

Je prends pour exemple d'une suite quelconque de ces nombres, la progression arithmétique $\div\ a.b.c.d.\omega$, dont je suppose que le premier terme a représente le premier terme de la suite donnée, pendant que ω représente le dernier, et que b, c, d, tiennent lieu des termes intermédiaires. Cela posé, j'aurai donc $\omega=d+1\ldots.$ $d=c+1\ldots..c=b+1\ldots..b=a+1$; et si j'élève toutes ces équations à une puissance quelconque m, j'aurai (148)

$$1^\circ.\ \omega^m=d^m+md^{m-1}+\frac{m.m-1}{2}d^{m-2}+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}d^{m-2}+\text{etc.}$$

$$2^\circ.\ d^m=c^m+mc^{m-1}+\frac{m.m-1}{2}c^{m-2}+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}c^{m-3}+\text{etc.}$$

$$3^\circ.\ c^m=b^m+mb^{m-1}+\frac{m.m-1}{2}b^{m-2}+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}b^{m-3}+\text{etc.}$$

$$4^\circ.\ b^m=a^m+ma^{m-1}+\frac{m.m-1}{2}a^{m-2}+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}a^{m-3}+\text{etc.}$$

Mais si j'ajoute toutes ces puissances ensemble, je trouverai en réduisant, que

$$\begin{aligned}\omega^m=a^m&+m(d^{m-1}+c^{m-1}+b^{m-1}+a^{m-1})\\&+\frac{m.m-1}{2}(d^{m-2}+c^{m-2}+b^{m-2}+a^{m-2})\\&+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}(d^{m-3}+c^{m-3}+b^{m-3}+a^{m-3})+\text{etc.}\end{aligned}$$

Et remarquant que $d^{m-1}+c^{m-1}+b^{m-1}+a^{m-1}$ est la somme des puissances $m-1$ de tous les termes, excepté le dernier, je conclus que si j'appelle s^{m-1} la somme de toutes ces puissances, j'aurai

$$1^\circ\ldots\ldots d^{m-1}+c^{m-1}+b^{m-1}+a^{m-1}=s^{m-1}-\omega^{m-1}.$$

Par la même raison il viendra

$$2^\circ\ldots\ldots d^{m-2}+c^{m-2}+b^{m-2}+a^{m-2}=s^{m-2}-\omega^{m-2}.$$

$$3^\circ\ldots\ldots d^{m-3}+c^{m-3}+b^{m-3}+a^{m-3}=s^{m-3}-\omega^{m-3}.$$

Digitized by Google

Ainsi la série précédente se changera en celle-ci :

$$\omega^m = a^m + m\,(s^{m-1} - \omega^{m-1}) + \frac{m.m-1}{2}(s^{m-2} - \omega^{m-2})$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2}{2.3}(s^{m-3} - \omega^{m-3}) + \text{etc.}$$

Et c'est là l'expression générale de la somme cherchée, puisque de simples substitutions de la valeur de m donneront immediatement la somme s de tant de nombres naturels que l'on voudra, la somme s^2 de leurs quarrés, la somme s^3 de leurs cubes, et ainsi de suite.

Car si on fait d'abord $m=1$, la formule se réduira à $\omega = a + s^0 - {}^0$; d'où l'on tire $s^0 = \omega - a + 1$; c'est-à-dire que la somme des puissances *zéro* d'une suite de nombres naturels est égale à la différence du premier au dernier terme, augmentée d'une unité.

Exemple. Soit $\div 3^0\ 4^0\ 5^0\ 6^0$, la somme est visiblement 4, et c'est ce que donne l'équation $s^0 = \omega - a + 1 = 6 - 3 + 1$.

Si on fait $m = 2$, la formule deviendra

$$\omega^2 = a^2 + 2\,(s - \omega) + \tfrac{2.1}{2}(s^0 - \omega^0) = a^2 + 2s - 2\omega + s^0 - \omega^0.$$

Or $s^0 - \omega^0 = \omega - a$ dans tous les cas semblables; donc..... $\omega^2 = a^2 + 2s - \omega - a$; et parconséquent

$$s = \frac{\omega^2 - a^2 + \omega + a}{2} = \tfrac{1}{2}\omega\,(\omega + 1) + \tfrac{1}{2}a\,(1 - a).$$

Exemple. Soit $\div 8.9.10.11.12.13$, dont il faille trouver la somme; on aura $s = 13.7 + 4\,(-7) = 63$.

Si on fait $m = 3$, on aura

$$\omega^3 = a^3 + 3(s^2 - \omega^2) + 3\,(s - \omega) + s^0 - \omega^0 = a^3 + 3s^2 - 3\omega^2 + 3s - 2\omega - a;$$

et si on substitue dans cette équation la valeur déjà trouvée pour s, on aura en transposant, $s^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\omega - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a$; expression que l'on peut réduire à celle-ci

$$s^2 = \tfrac{1}{6}\omega\,(2\omega^2 + 3\omega + 1) - \tfrac{1}{6}a\,(2a^2 - 3a + 1).$$

Exemple. Soit la suite des quarrés $2^2.3^2.4^2.5^2.6^2$, dont on cherche la somme; on aura $s^2 = 90$.

En faisant $m = 4$, et en substituant les valeurs trouvées pour s et pour s^2, on aura $s^3 = \frac{1}{4}\omega^4 + \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{4}\omega^2 - \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}\omega^2\,(\omega^2 + 2\omega + 1) - \frac{1}{4}a^2\,(a^2 - 2a + 1)$.

On trouvera de même que

$$s^4 = \tfrac{1}{5}\omega^5 + \tfrac{1}{2}\omega^4 + \tfrac{1}{3}\omega^3 - \tfrac{1}{30}\omega - \tfrac{1}{5}a^5 + \tfrac{1}{2}a^4 - \tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{1}{30}a,$$

et ainsi des autres.

Si l'on voulait chercher la somme des puissances m d'une infinité de termes de la suite des nombres naturels, alors le dernier terme ω serait infini; on aurait donc $\omega = \infty$, et parconséquent les puissances ∞^{m-1}, ∞^{m-2}, ∞^{m-3}, etc. seraient infiniment petites par rapport à ∞^m; elles s'évanouiraient donc, ce qui changerait la formule générale en celle-ci :

$$\infty^m = ms^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} s^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2}{2.3} s^{m-3} + \text{etc.}$$

Or s^{m-2}, s^{m-3}, s^{m-4}, etc., sont autant de quantités infiniment petites par rapport à s^{m-1}; car il est évident, par exemple, que la somme des quarrés qui est dans ce cas-là $\frac{1}{3}\infty^3$, est infiniment petite par rapport à la somme des cubes, qui est $\frac{1}{4}\infty^4$. Donc en négligeant ces termes, l'équation précédente deviendra $\infty^m = ms^{m-1}$, d'où l'on tire $s^{m-1} = \frac{\infty^m}{m}$; ainsi en supposant $m-1=n$, on aura $s^n = \frac{\infty^{n+1}}{n+1}$; c'est-à-dire, que la somme des puissances n d'une infinité de termes pris dans la suite des nombres naturels est égale au produit de la puissance ∞^n du dernier terme, multipliée par le nombre de tous les termes, et divisée par $n+1$.

Au reste, on voit bien que cette formule s'étend à tous les cas des puissances fractionnaires, comme à ceux des puissances entières, puisque n peut également exprimer toutes sortes d'exposans. Le problême est donc résolu d'une manière générale; et si on voulait en imiter la solution pour trouver la somme des puissances d'un nombre quelconque de termes, soit fini, soit infini, pris dans une progression arithmétique quelconque, on n'aurait qu'à prendre δ pour la différence de ces termes, ce qui donnerait $\omega = d + \delta \ldots d = c + \delta$ etc.; après quoi on acheverait le calcul comme ci-dessus.

De la méthode inverse des Séries.

284. Etant donnée une équation de cette forme

$$x = ay^m + by^{m+n} + cy^{m+2n} + dy^{m+3n} + \text{etc.},$$

on demande la valeur de y. La méthode qui apprend à la trouver, s'appelle *méthode inverse des Séries*, ou *retour des suites*, parceque l'on ne parvient à cette valeur que par une série inverse des puissances de x. Voici en quoi cette méthode consiste.

I. Soit pris d'abord le cas le plus simple, qui est celui où $m=n=1$. L'équation proposée se changera en celle-ci $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ etc. Il s'agit de trouver la valeur de y en x. Pour cela je suppose $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.}$

$$\text{Donc 1°.} \begin{cases} y^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 \text{ etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 2AC \\ y^3 = A^3 + 3A^2B \text{ etc.} \\ y^4 = A^4 \text{ etc.} \end{cases}$$

$$\text{Donc 2°. } x = \begin{cases} ay = aAx + aBx^2 + aCx^3 + aDx^4 \text{ etc.} \\ by^2 = A^2b + 2ABb + B^2b \text{ etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 2ACb \\ cy^3 = A^3c + 3A^2Bc \text{ etc.} \\ dy^4 = + A^4d \text{ etc.} \\ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Or cette dernière équation donne (276) $x = Aax$, d'où $1 = Aa$, et $A = \frac{1}{a}$. Elle donne aussi $aB + A^2b = 0$; donc $B = -\frac{b}{a^3}$. Ensuite $aC + 2ABb + A^3c = 0$; d'où $C = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$, et ainsi des autres. Cela posé, nous aurons la formule suivante pour changer une série des puissances successives de y, en une autre série composée des mêmes puissances de x. Il n'y aura qu'à substituer les valeurs des coefficiens a, b, c, d, etc. que l'on suppose connus.

Je dis donc que si $x = ay + by^2 + cy^3$ etc., on a dans tous les cas semblables, $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^3}x^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}x^3 + \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7}x^4$ $+ \frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}x^5 +$ etc.

Applications. $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 +$ etc. Quelle est la valeur de y exprimée en x? On a ici $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = -1$, $e = 1$, etc. Donc $y = x + x^2 + x^3 + x^4$ etc.

Si on avait $x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$ etc., alors a serait $= 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{4}$, et $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$, etc. $= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4\,5}$ etc.

Et si $z = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \frac{x^5}{5a^5} -$ etc., on trouvera $\frac{x}{a} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4}$ etc.

285. II. Si nous supposons $m = 1$, et $n = 2$, la série proposée n'aura que des puissances impaires, et l'équation deviendra.... $x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7$ etc. Pour avoir une formule dans ce cas-là,

$$\text{Soit} \quad y = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 \text{ etc.}$$

$$\text{On aura } 1^\circ. \begin{cases} y^3 = A^3 + 3A^2B + 3A^2C + 3AB^2 \text{ etc.} \\ y^5 = A^5 + 5A^4B \text{ etc.} \\ y^7 = A^7 \text{ etc.} \end{cases}$$

$$2^\circ.\ x = \begin{cases} ay = aAx + aBx^3 + aCx^5 + aDx^7 \text{ etc.} \\ by^3 = A^3b + 3A^2Bb + 3A^2bC + 3AB^2b \\ cy^5 = A^5c + 5A^4Bc \\ dy^7 = A^7d \\ \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{cases}$$

De cette dernière équation je tire $x = Aax$, ou $A = \frac{1}{a}$, $aB + A^3b = 0$, ou $B = \frac{-b}{a^4}$; puis $C = \frac{3b^2 - ac}{a^7}$....$D = \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}$, etc.;

ensorte que la formule est

$$y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a^3}x^3+\frac{3b^2-ac}{a^7}x^5+\frac{8abc-a^2d-12b^3}{a^{10}}x^7+\text{etc.}$$

APPLICATIONS. Exprimer en r la valeur de t dans l'équation

$$r=t-\frac{t^3}{2.3.p^2}+\frac{t^5}{2.3.4.5p^4}-\frac{t^7}{2.3.4.5.6.7\,p^6}+\text{etc.}\,?$$

On a ici $a=1$, $b=-\frac{1}{2.3p^2}$, $c=\frac{1}{2.3.4.5p^4}$, $d=-$ etc., $t=y$, $r=x$; et substituant, on trouvera

$$t=r+\frac{1}{2.3p^2}r^3+\left[\frac{1}{3.4p^4}-\frac{1}{2.3.4.5p^4}\right]r^5+\text{etc.}$$
$$=r+\frac{1}{2.3.p^2}r^3+\frac{3}{2.4.5\,p^4}r^5+\frac{3.5}{2.4.6.7\,p^6}r^7\ \text{etc.}$$

286. III. Supposons maintenant que m et n soient des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires, et cherchons une formule pour ce cas qui contient les deux autres.

Je fais $u=\frac{x}{a}\ldots y=u^{\frac{1}{m}}+Bu^{\frac{1+n}{m}}+Cu^{\frac{1+2n}{m}}+Du^{\frac{1+3n}{m}}+\text{etc.}$; et divisant par a la série proposée $x=ay^m+by^{m+n}+cy^{m+2n}+\text{etc.}$; j'ai $\frac{x}{a}=u=y^m+\frac{b}{a}y^{m+n}+\frac{c}{a}y^{m+2n}+\text{etc.}$

$$\text{Or}\begin{cases} y^m = u+mBu^{\frac{m+n}{m}}+mCu^{\frac{m+2n}{m}}\ \text{etc.} \\ \qquad\qquad +\frac{m.m-1}{2}B^2u^{\frac{m+2n}{m}} \\ \frac{b}{a}y^{m+2n}= \frac{b}{a}\times\overline{u^{\frac{m+n}{m}}+(m+n)Bu^{\frac{m+2n}{m}}\ \text{etc.}} \\ \frac{c}{a}y^{m+2n}= \frac{c}{a}\times\overline{u^{\frac{m+2n}{m}}\ \text{etc.}} \end{cases}$$

Donc $mB+\frac{b}{a}=0$, ce qui donne $B=-\frac{b}{ma}$; donc aussi $mC+\frac{m.m-1}{2}B^2+(m+n)\frac{bB}{a}+\frac{c}{a}=0$, ce qui donne $C=\frac{(m+1+2n)b^2-2mac}{2m^2a^2}$, et ainsi des autres; ensorte que la formule

la formule générale est

$$y = u^{\frac{1}{m}} - \frac{b}{ma} u^{\frac{1+n}{m}} + \frac{(m+1+2n)\, b^2 - 2\,mac}{2m^2a^2} u^{\frac{1+2n}{m}}$$

$$-\left[\frac{(2m^2+9mn+9n^2+3m+6n+1)b^3}{6m^3a^3} - \frac{(m+3n+1)bc}{m^2a^2} + \frac{d}{ma}\right] \times u^{\frac{1+3n}{m}}$$

et ainsi de suite.

Applications. Soit $x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 +$ etc. On demande la valeur de y en x. J'ai d'abord $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{4}$, $m = 2$, $n = 1$, $u = 2x$. Puis $y = u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}u + \frac{1}{36}u^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{270}u^2$ etc.

Soit encore $x = y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}y^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}y^{\frac{7}{2}}$ etc. On aura 1°. $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{8}$, etc. $u = x$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = 1$. 2°. $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^6} - \frac{1}{x^8}$ etc. Voyez le savant *Traité d'Algèbre* de M. Emerson.

DES LOGARITHMES.

287. Les Géomètres se plaignaient depuis long-temps de la lenteur du calcul, dans la multiplication et dans la division des nombres considérables, et surtout dans l'extraction des racines un peu élevées, lorsqu'enfin un baron écossais, (il s'appelait Nepper) imagina un moyen de remédier à cet inconvénient.

Il vint à bout de réduire les multiplications à de simples additions, les divisions à de simples soustractions, les formations de puissances à des multiplications toujours fort courtes, et les extractions des racines aux divisions les plus faciles. Nous regrettons de ne pouvoir faire connaître à nos lecteurs toute la beauté de cette découverte : pour la bien sentir, il faut être plus avancé dans l'étude des Mathématiques. Nous n'avons pour objet dans ce chapitre, que le développement des premiers principes d'une théorie aussi utile.

288 Soit donc une progression géométrique quelconque $\div\div a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 :$ etc.; on sait (125) que pour multiplier l'un par l'autre deux termes de cette formule, il suffit d'écrire une seule fois la quantité a, en lui

donnant pour exposant la somme des deux exposans des termes que l'on multiplie. On sait, par exemple, que $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$, et que $a^7 \times a^9 = a^{7+9} = a^{16}$. Ainsi le produit de deux termes quelconques d'une progression géométrique est toujours égal au terme qui dans la même progression a pour exposant la somme des exposans de ces deux termes.

289. On sait aussi (129) que le quotient de deux termes quelconques d'une progression géométrique est le terme qui a pour exposant la différence des exposans de ces deux termes : a^6, par exemple, divisé par a^2 est égal à $a^{6-2} = a^4$. Donc pour avoir le quotient de deux de ces termes, il faut prendre la différence de leurs exposans, et en faire l'exposant du quotient que l'on cherche.

Or ces exposans sont ce que l'on appelle des Logarithmes. Ensorte que si $a = 10$, la formule devenant alors

$$\div\div 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : \text{etc.} \quad \text{ou} \quad \div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : \text{etc.}$$

l'exposant 0 est le logarithme de l'unité ; l'exposant 1 est le logarithme de 10; 2 est le logarithme de 100, etc.

Mais parceque ces exposans ne donnent que les logarithmes des nombres qui sont dans la progression décuple $\div\div 1 : 10 : 100 : 1000 :$ etc. et que l'on a très-souvent besoin des logarithmes des nombres intermédiaires, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, etc. ainsi que des logarithmes des fractions; voici comme on s'y est pris pour trouver tous ces logarithmes.

On a ajouté plusieurs zéros en forme de décimales à chacun des exposans de la formule, ce qui l'a changée en celle-ci, en n'y mettant que sept zéros.

$$\div\div 10^{0,0000000} : 10^{1,0000000} : 10^{2,0000000} : 10^{3,0000000} : \text{etc.}$$

Puis on a remarqué qu'en insérant dans cette formule des exposans qui fussent en progression arithmétique, les valeurs du nombre 10 élevées aux puissances qu'ils désignent, seraient des nombres en progression géométrique, et que ces mêmes exposans seraient les logarithmes de ces nombres. Donc en faisant croître ces décimales consécutivement de $\frac{1}{10000000}$, ou, ce qui revient au même, en insérant 9999999 moyens-pro-

portionnels-arithmétiques entre deux quelconques des exposans de la progression (228), on a dû avoir une nouvelle progression géométrique dont les premiers termes sont,

$$\div\div 10^{0,0000000} : 10^{0,0000001} : 10^{0,0000002} : 10^{0,0000003} : \text{etc.}$$

Et les valeurs correspondantes de chacun de ces termes sont des nombres qui vont en croissant fort lentement; puisque le premier terme vaut 1, et que le dix-millionième ne vaut que 10.

Parmi ces termes insérés, il y en a donc un qui vaut 2, un autre qui vaut 3, un autre qui vaut 4, ou du moins qui en diffèrent très-peu, etc. On a trouvé, par exemple, que 2 était à-peu-près la valeur du terme $10^{0,3010300}$, que 3 était à-peu-près $= 10^{0,4771213}$, que 4 $= 10^{0,6020600}$, etc.; et on a regardé ces exposans comme les logarithmes de 2, de 3, de 4, etc.

290. Par des calculs fondés sur cette idée, mais dont les détails sont immenses, on a construit des Tables de Logarithmes pour tous les nombres depuis 1 jusqu'à 100000, et qui servent à trouver ceux des nombres plus grands. Il y a de ces Tables où pour une plus grande précision, les Logarithmes ont dix, quinze, vingt décimales; mais les cinq premières suffisent ordinairement. Quant à la manière de s'en servir, on peut la voir assez détaillée dans la dernière édition des Tables de Logarithmes avec six décimales (chez Desaint 1781); car pour en bien comprendre l'usage, il faut avoir des Tables entre les mains.

291. On peut concevoir cependant, sans y avoir recours, 1°. que les logarithmes de tous les nombres compris entre 1 et 10 doivent commencer par 0; que ceux de tous les nombres qui sont entre 10 et 100 commencent par 1; que le premier chiffre des logarithmes des nombres compris entre 100 et 1000 est 2, etc. Ce premier chiffre s'appelle *la Caractéristique* du logarithme donné; car il est évident que ce nombre doit avoir un chiffre de plus que la caractéristique ne contient d'unités. Ainsi je vois tout d'un coup que ce logarithme 4,814560 appartient à un nombre de cinq chiffres, parceque sa caractéristique est 4.

292. 2°. Que le produit de deux nombres répond à la somme de leurs logarithmes, et que leur quotient répond à la différence de leurs logarithmes. Ainsi pour multiplier 48 par 166, j'ajoute leurs logarithmes, qui sont 1,681241 et 2,220108; la somme est 3,901349 : c'est un logarithme qui répond dans les Tables au nombre 7968, lequel est le produit de 48×166. Pour diviser 7336 par 56, il faut retrancher le logarithme de 56, qui est 1,748188, du logarithme de 7336, qui est 3,865459, et la différence 2,117271 est un logarithme, qui répond dans les Tables à 131. Donc 131 est le quotient de 7336 divisé par 56.

293. 3°. Que pour faire une règle de trois par les logarithmes, il faut ajouter ensemble les logarithmes des termes qu'il eût fallu multiplier, et de la somme retrancher le logarithme du nombre par lequel il eût fallu diviser le produit; le reste est le logarithme du terme cherché. Par exemple, soit la proportion..... $2843:8529::3147:x$. Il faudrait pour avoir la valeur de x, multiplier 3147 par 8529, et diviser leur produit 26840763 par 2843; mais par les logarithmes, il suffit d'ajouter ensemble ceux de 8529 et de 3147, qui sont 3,93090 et 3,49790, et d'ôter 3,45378 logarithme de 2843, de la somme 7,42880; le reste 3,97502 est le logarithme de x, lequel répond dans les Tables à 9441.

294. 4°. Que pour élever une quantité à une puissance quelconque, il faut en ajouter le logarithme à lui-même autant de fois qu'on aurait multiplié cette quantité; c'est-à-dire, qu'il faut multiplier son logarithme par l'exposant de la puissance. Ainsi pour élever 8 à la quatrième puissance, il faut multiplier son logarithme 0,90309 par 4, et le produit 3,61236 est le logarithme de 4096, quatrième puissance de 8.

295. Qu'enfin, si on divise le logarithme d'une quantité donnée par l'exposant de la racine qu'on en veut extraire, le quotient sera le logarithme de cette racine; ainsi, pour extraire la racine cubique de 6859, divisez son logarithme 3,83626 par 3, et le quotient 1,27875 sera le logarithme de 19, qui est la racine cherchée. Mais on peut démontrer généralement toutes ces pro-

priétés du calcul logarithmique : et c'est ce que nous allons faire dans le chapitre suivant.

Des propriétés des Logarithmes en général.

296. Soit a un nombre plus grand que l'unité ; soit m l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever a pour avoir un nombre donné b, ensorte que l'on ait $a^m = b$. On est convenu d'appeler m le logarithme de b, et de l'écrire ainsi, $m = Lb$.

Supposant, par exemple, $a = 10$, et $b = 100$, il faut que $m = 2$ pour que l'on ait $a^m = b$, et pour que 2 soit dans cette supposition, le logarithme de 100. Tel est, comme on l'a vu (289) le système des Tables ordinaires.

297. Il suit de là que les logarithmes ordinaires sont les exposans des puissances auxquelles il faudrait élever 10, pour avoir les nombres qui répondent à ces logarithmes.

Et puisque d'un côté tous les nombres peuvent être regardés comme étant de différentes puissances de 10, et que de l'autre le produit ou le quotient des puissances se trouve en ajoutant ou en soustrayant leurs exposans, il est clair que la somme ou la différence des logarithmes de deux nombres doit répondre dans les Tables au nombre qui est le produit ou le quotient des deux autres. Nous avons déjà déduit de ce principe les propriétés du calcul logarithmique, dans le discours qui est à la suite des Tables déjà citées. Voici une autre manière de les démontrer.

298. Si $a^m = b$, il est évident que $La^m = Lb$; et si $a^n = c$, on aura de même $La^n = Lc$; donc

$$bc = a^m \times a^n = a^{m+n}, \text{ et } Lbc = La^{m+n} = m + n = Lb + Lc;$$

C'est-à-dire, que le logarithme d'un produit quelconque résulte de la somme des logarithmes de ses facteurs. Voilà donc toutes les multiplications réduites à de simples additions.

Soit p le produit ; F, f les facteurs, et nous aurons généralement $Lp = LF + Lf$; d'où $LF = Lp - Lf$; c'est-à-dire, qu'étant donnés le produit et un de ses facteurs, on trouvera le logarithme de l'autre facteur, en ôtant le logarithme du facteur connu de celui du

produit; ce qui ramène toutes les divisions à de simples soustractions.

De ce que $Lp = LF + Lf$, il suit que dans le cas où $F = f$; on a $Lp = LF^2 = 2LF$, et parconséquent $LF^3 = 3LF$; $LF^4 = 4LF$, ou en général, $LF^m = mLF$. Donc pour élever un nombre à une puissance quelconque, il suffit de multiplier le logarithme de ce nombre par l'exposant de la puissance proposée. Le logarithme qui en résulte est celui de la puissance que l'on cherche.

Et comme les racines ne sont que des puissances fractionnaires (159), il est clair qu'en multipliant le logarithme d'un nombre par la fraction indiquée, ou ce qui revient au même, en divisant ce logarithme par l'exposant de la racine; on aura toujours le logarithme de cette racine. Voici quelques exemples des cas les plus ordinaires.

$$Lab = La + Lb \ldots L\frac{a}{b} = La - Lb.$$

$$La^m = mLa \ldots\ldots La^{-m} = -mLa.$$

$$La^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}La \ldots\ldots La^{-\frac{m}{n}} = -\frac{m}{n}La.$$

$$Labcd \text{ etc.} = La + Lb + Lc + Ld + \text{etc.}$$

$$L\frac{abc}{de} = La + Lb + Lc - Ld - Le.$$

$$La^m b^p c^q = mLa + pLb + qLc.$$

$$L\frac{ax^n}{r^z} = La + nLx - zLr.$$

$$L\frac{ab + bc}{m + n} = Lb + L(a + c) - L(m + n).$$

$$L\sqrt{(x^2 + y^2)} = \tfrac{1}{2}L(x^2 + y^2).$$

$$L\frac{a + x}{a - x} = L(a + x) - L(a - x).$$

$$L(a^2 - x^2) = L(a + x) + L(a - x).$$

$$L\sqrt{(a^2 - x^2)} = \tfrac{1}{2}L(a + x) + \tfrac{1}{2}L(a - x).$$

$$Lz^3 + \tfrac{3}{4}Lz = \tfrac{15}{4}Lz = L(z^3\sqrt[4]{z^3}).$$

$$L\sqrt[n]{(a^3 - x^3)^m} = \frac{m}{n}L(a - x) + \frac{m}{n}L(a^2 + ax + x^2).$$

$$L\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{(a + x)^2} = \tfrac{1}{2}L(a - x) - \tfrac{3}{2}L(a + x).$$

$$L3a^2 + La^4 + 5L3 = 6L3a = L(3a)^6.$$

Du calcul des Logarithmes par les Séries.

299. Les premiers calculateurs des Tables avaient déjà fini leurs calculs, lorsqu'on inventa des méthodes pour les simplifier. Mais si ces méthodes vinrent un peu tard, elles ne méritèrent pas moins d'être accueillies pour la rapidité de leur marche. On en jugera mieux par les détails qui suivent.

Etant donné un nombre quelconque, trouver son logarithme.

SOLUTION. Soit $1+x$ le nombre donné; soit $(1+x)^m=1+z$; soit enfin $L(1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ etc.; on aura donc aussi $L(1+z)=Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+$ etc. Mais comme on a d'un côté l'équation $(1+x)^m=1+z$, qui donne

$$z=mx+\frac{m.m-1}{2}x^2+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}x^3+\text{etc.},$$

et que l'on a d'un autre côté $mL(1+x)=L(1+z)$, on trouvera que

$$mAx+mBx^2+mCx^3+\text{etc.}=Az+Bz^2+Cz^3+\text{etc.}$$

Substituant donc la valeur de z dans le second membre, l'équation deviendra

$$mAx+mBx^2+mCx^3+\text{etc.}=\begin{cases} mAx+\frac{m.m-1}{2}Ax^2+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}Ax^3+\text{etc.} \\ \quad+\quad m^2Bx^2+\quad m^2.m-1.Bx^3+\text{etc.} \\ \qquad\qquad+\qquad m^3Cx^3+\text{etc.} \end{cases}$$

Réduisant et comparant les termes homogènes (276), vous aurez 1°. $B=-\frac{1}{2}A$.... 2°. $C=\frac{1}{3}A$.... 3°. $D=-\frac{1}{4}A$; et ainsi des autres, ensorte que toute réduction faite, vous trouverez que

$$L(1+x)=A(x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{6}x^6+\text{etc.}$$

300. Remarquez maintenant que la quantité A est indéterminée, et que parconséquent le même nombre $1+x$ peut avoir une infinité de logarithmes différens. Mais comme le plus simple et le plus naturel de tous les systèmes logarithmiques est celui où l'on suppose $A=1$, on a donné le nom de logarithmes naturels à ceux qui ont été calculés d'après cette supposition. Ce fut sur cette espèce de logarithmes que tomba d'abord le géomètre Ecossais, quoiqu'en suivant une route bien différente. On peut voir dans son ouvrage (*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*) comment il y parvint. Ces logarithmes s'appellent aussi *logarithmes hyperboliques*, à cause du rapport qu'ils ont avec *l'Hyperbole Equilatère*, comme nous le dirons en son lieu.

301. Cela posé, il est évident que tous les systèmes possibles de logarithmes peuvent être ramenés à celui des logarithmes naturels, puisque dans tout système, le logarithme de $1+x$ est égal au produit de son logarithme naturel par la quantité constante A que l'on appelle le *Module*, et que nous déterminerons bientôt. Ainsi toute la difficulté du calcul des logarithmes se réduit à calculer les logarithmes naturels ou

hyperboliques. Or voici comment on peut faciliter le calcul de ces derniers.

302. Reprenons l'équation

$$L(1+x) = A\left(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \text{etc.}\right)$$

qui, en supposant $A = 1$, devient

$$L(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \text{etc., etc.}$$

et ajoutons de part et d'autre La, nous aurons

$$L(a+ax) = La + x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \text{etc.}$$

Soit $ax = y$, ou $x = \frac{y}{a}$, on aura

$$L(a+y) = La + \frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} - \text{etc.}$$

Faisant donc y négative, nous aurons

$L(a-y) = La - \frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} - \frac{y^3}{3a^3} - \text{etc.}$ Donc $L(a+y) - L(a-y)$,

ou $$L\left(\frac{a+y}{a-y}\right) = \frac{2y}{a}\left(1 + \frac{y^2}{3a^2} + \frac{y^4}{5a^4} + \frac{y^6}{7a^6} + \text{etc.}\right),$$

série toujours convergente, parcequ'il faut que y soit plus petite que a pour que $\frac{a+y}{a-y}$ soit une quantité positive.

303. Appliquons maintenant cette série au calcul des Logarithmes, et pour cela supposons que $\frac{a+y}{a-y} = \frac{m}{m-1}$. Nous aurons $\frac{y}{a} = \frac{1}{2m-1}$, et $L\left(\frac{m}{m-1}\right)$, ou

$$Lm - L(m-1) = \frac{2}{2m-1}\left(1 + \frac{1}{3(2m-1)^2} + \frac{1}{5(2m-1)^4} + \frac{1}{7(2m-1)^6} + \text{etc}\right).$$

Donc $$Lm = L(m-1) + \frac{2}{2m-1}\left(1 + \frac{1}{3(2m-1)^2} + \frac{1}{5(2m-1)^4} + \text{etc}\right).$$

Mais lorsqu'on cherche le logarithme du nombre m, on est censé avoir celui de $m-1$; on aura donc celui de m par une série très-convergente, dans les cas surtout où m sera un nombre un peu grand. On peut en juger par le cas le moins favorable, en calculant le logarithme hyperbolique de 2. On aura $m = 2$, et parconséquent

$$L2 = \tfrac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^4} + \frac{1}{7.3^6}\text{ etc.}\right) = 0{,}69314718 \text{ etc.}$$

Pour avoir ensuite le logarithme de 5, il n'y aura qu'à substituer 5 au lieu de m dans l'équation $Lm = L(m-1) + \text{etc.}$, et on aura

$$L5 = 2L2 + \tfrac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3.9^2} + \frac{1}{5.9^4} + \text{etc.}\right) = 1{,}60943791.$$

Il est donc aisé de trouver par cette méthode les logarithmes des nombres premiers Or ceux-ci une fois calculés, il est très-facile de

trouver ceux de tous les autres nombres. Par exemple, étant donnés les logarithmes de 2 et de 3, leur somme donnera le logarithme de 6, (298). Celui de 4 sera le double de celui de 2, comme celui de 9 sera le double du logarithme de 3; et ainsi des autres.

304. Déterminons à présent le module A pour un autre système logarithmique, pour celui des tables, par exemple, dans lequel $a = 10$, et dans lequel parconséquent $L\,10 = 1$;) car le logarithme de la base logarithmique est toujours l'unité.

Il faudra d'abord prendre le logarithme hyperbolique de 10, en ajoutant ceux de 5 et de 2; on aura 2,30258509. Ensuite (301), logarithme ordinaire de 10, ou $1 = A\,(2{,}30258509$ etc.) d'où l'on tire aussitôt $A = \frac{1}{2{,}30258509 \text{ etc.}} = 0{,}43429448$ etc. C'est la valeur du module des tables.

Il suit de là, que pour ramener les logarithmes hyperboliques aux logarithmes tabulaires, il faut multiplier les premiers par la fraction 0,43429448 etc.

Et réciproquement, pour changer les logarithmes des tables en logarithmes hyperboliques, il faut multiplier les premiers par 2,30258509. Si on les multipliait par 3,3219277, on aurait des logarithmes correspondans à la supposition $a = 2$.

305. On déterminerait de la même manière le module A dans tout autre système. Celui des tables (autrement appelé celui de Briggs, parceque Briggs en calcula le premier les logarithmes) sert pour les calculs de la trigonométrie. Celui des logarithmes hyperboliques est d'un grand usage dans le calcul intégral.

Le nombre déterminé a est la base logarithmique de chaque système. Ainsi 10 est la base du système ordinaire. Celle du système de Nepper est 2,71828183, comme nous le verrons bientôt.

En général la base d'un système quelconque de logarithmes est toujours le nombre dont le logarithme est 1.

306. Etant donné un logarithme, trouver à quel nombre il répond.

SOLUTION. Si le logarithme donné est du nombre des logarithmes ordinaires, on commence par le réduire aux hyperboliques, après quoi la difficulté ne consiste plus qu'à trouver le nombre qui répond à un logarithme hyperbolique donné.

Soit donc z ce logarithme, soit $1 + x$ le nombre cherché, et on aura par ce qui précède, $z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ etc. Il s'agit de trouver (284) la valeur de x en z.

Pour cela je suppose $x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ etc.

$$\text{Ce qui donne} \ldots\ldots z = \left\{\begin{array}{llll} Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 & & & \text{etc.} \\ \quad - \frac{1}{2}A^2 - AB & - \frac{1}{2}B^2 & & \text{etc.} \\ & - AC & & \\ \quad + \frac{1}{3}A^3 & + A^2B & & \text{etc.} \\ & - \frac{1}{4}A^4 & & \text{etc.} \end{array}\right.$$

Donc $A = 1 \ldots B = \frac{1}{2} \ldots C = \frac{1}{6} \ldots D = \frac{1}{24}$, etc ; donc

$$x = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} \text{ etc.}$$

Donc enfin $1 + x$, ou le nombre cherché

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} \text{ etc.}$$

En général un nombre quelconque

$$n = 1 + Ln + \frac{L^2 n}{2} + \frac{L^3 n}{2.3} + \frac{L^4 n}{2.3.4} \text{ etc. ;}$$

série convergente dans tous les cas, et parconséquent propre à résoudre généralement la question proposée.

307. Appliquons-la à la recherche de la base des logarithmes hyperboliques, c'est-à-dire, cherchons quel est le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1. Ici

$$n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \text{etc. ;}$$

donc $n = 2{,}71828183$. Ce nombre sert très-souvent dans le calcul intégral. Le voilà calculé d'avance.

De l'usage des Logarithmes dans la résolution de plusieurs Equations.

308. SOUVENT il arrive qu'une équation échappe à toutes les règles de l'Algèbre ordinaire, et qu'elle se résout avec la plus grande facilité par le moyen des logarithmes. En voici plusieurs exemples avec quelques applications.

I. Soit proposé de trouver la valeur de x dans l'équation $a^x = b$. On a (298) La^x ou $x\,La = Lb$; donc $x = \frac{Lb}{La}$.

Soit $\frac{a^{mx}}{b^{nx-1}} = c$. On aura $mxLa + (1 - nx)\,Lb = Lc$; donc $mxLa - nxLb = Lc - Lb$; et $x = \frac{Lc - Lb}{mLa - nLb}$.

Soit encore $a^x = \frac{b^{mx-n}}{c^{qx}}$. Ici, $xLa = mxLb - nLb - qxLc$; d'où

$$x = \frac{nLb}{mLb - qLc - La} = \frac{Lb^n}{Lb^m - Lc^q - La} = \frac{Lb^n}{L(b^m : ac^q)}.$$

Enfin soit l'équation $\frac{b^{n-\frac{a}{x}}}{c^{mx}} = f^{x-p}$. Nous aurons d'abord

$$nLb - \frac{a}{x}Lb - mxLc = xLf - pLf;$$

puis $(mLc + Lf)x^2 - (nLb + pLf)x = -aLb$,

ou $x^2Lc^mf - xLb^nf^p = -Lb^a$,

qui se résout par la méthode du second degré (201).

309. II. Supposons qu'il y ait cent mille habitans dans une province, et que la population y augmente tous les ans de la trentième partie; on demande quel sera le nombre des habitans de cette province au bout d'un siècle? Ce probleme et les suivans sont tirés d'un des meilleurs ouvrages que nous connoissions. Il a pour titre *Introductio in Analysin infinitorum*, et pour auteur, M. Euler, ce géomètre si savant et si modeste.

Soit $n = 100000$. C'est le nombre donné des habitans, lequel par la condition du problème sera $n + \frac{1}{30}n$, ou $n(1 + \frac{1}{30})$ à la fin de la première année. Il deviendra $n(\frac{31}{30})^2$ à la fin de la seconde; $n(\frac{31}{30})^3$ à la fin de la troisième, et ainsi de suite jusqu'au bout du siècle, où son expression sera $n(\frac{31}{30})^{100}$, ou $100000(\frac{31}{30})^{100}$. On aura donc $100000(\frac{31}{30})^{100} = x$, nombre que l'on cherche.

Mais s'il fallait élever $\frac{31}{30}$ à la centième puissance par des multiplications successives, on sent bien que le calcul serait d'une extrême longueur: au lieu qu'en se servant des logarithmes, on aura tout de suite.. $L\,100000 + 100\,L\frac{31}{30} = Lx$; puis $L\frac{31}{30} = L\,31 - L\,30 =$ (par des tables qui aient dix décimales, celles d'Ulacq, par exemple) 0,014240439; donc $100\,L\frac{31}{30} = 1,4240439$. D'ailleurs $L\,100000 = 5$; donc $Lx = 6,4240439$, et $x = 2654874$. Il y aurait donc, après 100 ans, deux millions six cent cinquante-quatre mille huit cent soixante-quatorze habitans dans cette province.

La terre n'ayant été repeuplée après le déluge que par les trois enfans de Noë et par leurs trois femmes, on demande dans quel rapport la population aurait dû croître chaque année, pour qu'il y eût un million d'hommes au bout de 200 ans.

Soit $\frac{1}{x}$ l'accroissement annuel; et nous aurons l'équation

$$6\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} = 1000000, \text{ qui donne } \frac{1+x}{x} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}},$$

et parconséquent

$$L\frac{1+x}{x} = \frac{1}{200}L\frac{1000000}{6} = \frac{1}{200}.\ 5,2218487 = 0,0261092;$$

d'où $\frac{1+x}{x} = \frac{1061963}{1000000}$, puis... $1000000 = 61963\,x$. Enfin $x = 16$ environ. Il eût donc fallu que le genre humain se fût accru tous les ans de $\frac{1}{16}$, ce que la santé robuste et les longs jours de nos premiers pères rendent assez vraisemblable.

Cherchons maintenant la quantité dont il faudrait qu'un peuple s'accrût tous les ans, pour être deux fois plus nombreux à la fin de chaque siècle.

Soit n le nombre de ceux qui composent ce peuple; soit $\frac{1}{x}$ la quantité

que nous cherchons, on aura pour chaque époque séculaire, l'équation $n\left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} = 2n$, qui donne $L\frac{1+x}{x} = \frac{1}{100}L2 = 0{,}0030103$; d'où $\frac{1+x}{x} = \frac{10069555}{10000000}$, et $x =$ à-peu-près 144. Ainsi, ajoute ce respectable auteur, on doit regarder comme bien ridicules les objections de ces incrédules, qui nient que la terre ait pu être peuplée en aussi peu de temps par un seul homme.

Supposons enfin qu'un certain nombre d'hommes augmente tous les ans de la centième partie, combien faudra-t-il d'années pour que ce nombre soit dix fois plus grand ?

Appelant n ce nombre d'hommes, x le nombre cherché d'années, on aura au bout de x années, $n\left(\frac{101}{100}\right)^x = 10n$, ou $\left(\frac{101}{100}\right)^x = 10$, qui donne $x = \frac{L10}{L101 - L100} = \frac{10000000}{43214} = 231$, à peu de choses près. Donc il y aura dix fois plus d'habitans à chaque époque de 231 années.

INTRODUCTION A LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DES DEGRÉS SUPÉRIEURS.

310. Les plus célèbres analystes se sont occupés successivement de la résolution des équations, comme d'une théorie fort utile. Mais lorsqu'ils ont voulu la traiter dans toute son étendue, elle leur a paru si compliquée, qu'ils y ont presque tous renoncé pour se livrer à des détails. Au défaut des méthodes directes, ils ont eu recours aux méthodes d'approximation; et lorsque les règles générales se sont refusées à leurs efforts, ils en ont accumulé tant de particulières, que l'on peut désormais avoir, sinon des racines exactes, au moins des racines très-approchées de toutes les équations. Nous allons faire connaître quelques-unes de ces règles, après avoir fait sur la nature des équations en général les remarques suivantes.

311. Il est clair qu'en transposant tous les termes d'une équation dans un seul membre, ces termes se détruiront mutuellement. Ainsi toute équation peut-être réduite à n'avoir que zéro dans un de ses deux membres. Si on a, par exemple, $x^2 + a^2 = 2ax$, on peut en déduire $x^2 - 2ax + a^2 = 0$. Or dans cet état,

le premier membre peut être regardé comme le produit de $x - a$ par $x - a$; et puisque ce premier membre se réduit à zéro, il faut bien que $x = a$, ou, ce qui revient au même, que $x - a = 0$.

Mais parceque c'est ici un quarré parfait, un de ses facteurs ne peut être égal à zéro que l'autre ne le soit aussi : au lieu que si l'on eût eu $x^2 - ax - bx + ab = 0$, un seul des facteurs, $x - a$, $x - b$, égalé à zéro, eût suffi pour réduire à zéro le premier membre. Supposer tout-à-la-fois les deux facteurs égaux à zéro, ce serait regarder a et b comme nécessairement égaux entre eux, ce qui n'est pas.

312. Toute équation transposée peut donc être considérée comme le produit de plusieurs facteurs égaux ou inégaux. Lorsqu'ils sont tous égaux, ils se réduisent tous à zéro, et quand ils sont inégaux, un seul doit être égal à zéro.

Cherchons d'après cela le produit des quatre facteurs $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, en supposant que l'un d'eux, n'importe lequel, soit égal à zéro. Nous trouverons,

$$\begin{array}{llll} x^4 - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd = 0. \\ -b & + ac & - abd & \\ -c & + ad & - acd & \\ -d & + bc & - bcd & \\ & + bd & & \\ & + cd & & \end{array}$$

Or, de cette équation et de toutes celles que l'on peut former de la même manière, on doit conclure qu'une équation dont le degré est généralement exprimé par m, a pour premier terme x^m, c'est-à-dire l'inconnue élevée à la puissance que désigne le nombre des facteurs de cette équation.

Le second terme est x^{m-1} avec un coefficient égal à la somme de toutes les racines a, b, c, d, etc.

Le troisième est x^{m-2}, avec un coefficient égal à la somme des produits ab, ac, ad, bc, etc. de ces racines prises deux à deux.

Le quatrième est x^{m-3}, avec un coefficient égal à la somme des produits abc, abd, etc. des mêmes racines prises trois à trois; et ainsi de suite jusqu'au dernier

terme, qui est toujours le produit de toutes les racines.

313. Il n'en faut pas davantage pour démontrer la formule qui sert à élever un binome quelconque $x+a$ à une puissance quelconque m (148). Car pour élever le binome $x+a$ à la puissance m, il faut le multiplier $m-1$ fois par lui-même. Ainsi le développement de cette puissance doit être regardé comme le produit d'un nombre m de facteurs tous égaux; et si $x+a=0$, tout ce que nous venons de dire d'une équation du degré m, aura lieu pour la puissance m de $x+a$.

Ensorte donc que le premier terme sera x^m; que le second sera x^{m-1} précédé d'un coefficient égal à la somme de toutes les racines. Or dans ce cas chaque racine est a, leur nombre est m. Donc leur somme est ma. Le second terme sera donc max^{m-1}.

Le troisième doit être x^{m-2} précédé d'un coefficient égal à la somme des produits de toutes les racines prises deux à deux. Ce coefficient sera donc a^2 multiplié par le nombre des produits que peut donner un nombre m de lettres a, b, c, d, etc. prises deux à deux. Pour le trouver, ce nombre, remarquez, 1°. qu'il doit être la moitié de celui des lettres qui servent à former tous ces produits; 2°. qu'il faut répéter chacune de ces lettres le même nombre de fois, et que ce nombre de fois est exprimé par $m-1$, puisqu'il faut les multiplier chacune séparément par toutes les autres. Le nombre des lettres qui forment ces produits est donc $m(m-1)$, et parconséquent celui de leurs produits deux à deux est $\frac{m(m-1)}{2}$.

Ainsi le troisième terme sera $\frac{m(m-1)}{2}\ a^2x^{m-2}$.

Le quatrième doit avoir pour coefficient la somme des produits que l'on peut faire avec les racines prises trois à trois; et comme ici toutes les racines sont égales, ce coefficient doit être a^3 multiplié par le nombre des produits qui peuvent résulter d'un nombre m de lettres a, b, c, d etc. prises trois à trois. Or, 1°. le nombre de ces produits ne doit être que le tiers du nombre des lettres dont ils sont composés. 2°. Il faut répéter chaque lettre le même nombre de fois, et ce nombre est désigné

par celui des produits des autres lettres prises deux à deux. Donc puisque le nombre de ces produits est $\frac{m(m-1)}{2}$, lorsque celui des lettres est m; il est clair qu'il sera $\frac{m(m-1)(m-2)}{2}$ lorsque celui des lettres sera $m-1$, comme dans le cas présent. Le nombre des lettres qui forment tous les produits abc, abd, etc. doit donc être $\frac{m(m-1)(m-2)}{2}$. Celui des produits sera donc $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$, desorte que le quatrième terme sera $\frac{m.m-1.m-2}{2.3}a^3x^{m-3}$.

Formant de même les termes suivans, on trouvera que

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m.m-1}{2}a^2x^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}a^3x^{m-3}$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4}a^4x^{m-4} + \text{etc.};$$

et qu'en général

$$(a \pm b)^m = a^m \pm ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{2}a^{m-2}b^2 \pm \frac{m.m-1.m-2}{2.3}a^{m-3}b^3 + \text{etc.}$$

Pour faire quelque application de cette formule, cherchons d'abord la cinquième puissance du binome $a+b$. Nous trouverons $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$. Car $m=5$ dans ce cas; donc $a^m=a^5$; donc $ma^{m-1}b=5a^4b$; donc $\frac{m.m-1}{2}a^{m-2}b^2=10a^3b^2$; et ainsi de suite jusqu'au sixième terme $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{2.3.4.5}a^{m-5}b^5$, qui se réduit à b^5. Le calcul ne peut s'étendre plus loin dans cet exemple, parceque tous les termes qui suivent ayant $m-5$ parmi les facteurs du coefficient, et $m-5$ se réduisant à zéro dans le cas présent, tous ces termes ultérieurs s'y réduisent aussi.

Cette formule peut également servir à élever un polynome quelconque à une puissance quelconque. Soit proposé, par exemple, d'élever le trinome $n+p+q$ à son cube. Je fais $a=n$; $b=p+q$; $m=3$. Donc $a^m=n^3$; $ma^{m-1}b=3n^2(p+q)$; $\frac{m.m-1}{2}a^{m-2}b^2=3n(p+q)^2$;

et $\frac{m.m-1.m-2}{2.3}a^{m-3}b^3=(p+q)^3$; ensorte que $(n+p+q)^3=n^3+3n^2p+3n^2q+3np^2+6npq+3nq^2+p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$.

Lorsqu'une expression n'est pas fort compliquée, et qu'elle est en même temps une puissance parfaite, on en cherche la racine par les règles ordinaires de l'extraction. On pourrait la trouver par la formule du binome, mais le calcul en serait plus long; ce qui fait qu'on ne s'en sert communément que pour avoir des racines approchées.

314. Au reste, on peut exprimer cette formule d'une manière encore plus simple. En effet, de ce que $(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b+$ etc., il suit que

$$(P+PQ)^m=P^m+mP^mQ+\frac{m.m-1}{2}P^mQ^2+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}P^mQ^3+\text{etc.}$$

Donc si on représente par la lettre A le premier terme P^m, le second sera mAQ, et si le second est représenté à son tour par la lettre B, le troisième sera $\frac{m-1}{2}$BQ. Celui-ci étant représenté par C, le quatrième sera $\frac{m-2}{2}$CQ, etc., etc. On aura donc

$$(P+PQ)^m=\overset{A}{P^m}+\overset{B}{mAQ}+\overset{C}{\frac{m-1}{2}BQ}+\overset{D}{\frac{m-2}{3}CQ}+\overset{E}{\frac{m-3}{4}DQ}+\text{etc.}$$

Or il est évident que cette formule est plus simple que la première, puisque le cinquième terme, par exemple, se trouve tout de suite en multipliant D, terme déjà calculé par $\frac{m-3}{4}$Q, et que la quantité Q n'est autre chose que le second terme PQ du binome, divisé par le premier terme P.

Application. Soit proposé de trouver la quatrième puissance de $2a+3z$. Je fais $m=4$...$P=2a$...$PQ=3z$, d'où $Q=\frac{3z}{2a}$. J'ai donc $P^m=16a^4$....$mAQ=4.16a^4.\frac{3z}{2a}=96a^3z$...$\frac{m-1}{2}BQ=\frac{3}{2}.96a^3z.\frac{3z}{2a}=216a^2z^2$...$\frac{m-2}{3}CQ=\frac{2}{3}216a^2z^2.\frac{3z}{2a}=216az^3$...$\frac{m-3}{4}DQ=\frac{1}{4}.216az^3.\frac{3z}{2a}=81z^4$. Donc $(2a+3z)^4=16a^4+96a^3z+$ etc.

315.

315. Enfin pour rendre cette dernière formule plus commode, supposons que l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever le binome $P+PQ$, soit $\frac{m}{n}$; nous aurons généralement

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = \overset{A}{P^{\frac{m}{n}}} + \overset{B}{\frac{m}{n}AQ} + \overset{C}{\frac{m-n}{2n}BQ} + \overset{D}{\frac{m-2n}{3n}CQ} + \overset{E}{\frac{m-3n}{4n}DQ} + \text{etc.}$$

Application. Il s'agit de trouver la racine cinquième de u^2-z^2, ou la valeur approchée de $(u^2-z^2)^{\frac{1}{5}}$. Pour cela, je suppose $P=u^2$, $Q=-\frac{z^2}{u^2}$, $m=1$, $n=5$, $A=$ le premier terme, B le second, C le troisième, etc.; et je trouve que

$$(u^2-z^2)^{\frac{1}{5}} = u^{\frac{2}{5}} - \frac{z^2}{5u^2}A + \frac{2z^2}{5u^2}B + \frac{3z^2}{5u^2}C + \frac{7z^2}{10u^2}D + \text{etc.}$$
$$= u^{\frac{2}{5}}\left(1 - \frac{z^2}{5u^2} - \frac{2z^4}{25u^4} - \frac{6z^6}{125u^6} - \frac{21z^8}{625u^8} - \text{etc.}\right)$$

Revenons maintenant aux équations.

316. Lorsque parmi les facteurs d'une équation transposée, il n'y en a point d'imaginaires, et que ses termes sont précédés alternativement de signes différens, toutes les racines de cette équation sont positives. S'ils sont tous précédés du signe $+$, toutes les racines sont négatives. Et en général, il y a autant de racines positives que de changemens de signe, et autant de racines négatives que de répétitions immédiates du même signe. C'est une exception fâcheuse que celle des facteurs imaginaires. Elle met en défaut la règle précédente, lorsqu'il y a de ces facteurs; et lors même qu'il n'y en a pas, cette règle devient presqu'inutile, si on ne le sait pas déjà.

317. Lorsqu'une équation manque de second terme, la somme des racines positives est égale à celle des négatives, sans quoi le second terme qui a pour coefficient la somme des unes et des autres ne se serait pas évanoui (312).

Et puisque le dernier terme est toujours le produit de toutes les racines, il faut en conclure qu'il y en a au

moins une égale à zéro, toutes les fois que le dernier terme manque.

318. Cette propriété qu'a le dernier terme d'être le produit de toutes les racines, a donné lieu à une méthode pour trouver celles qui sont commensurables. En effet, si après avoir cherché tous les diviseurs du dernier terme, on essaie de diviser l'équation par l'inconnue $x \pm$ quelqu'un de ces diviseurs, et que la division réussisse, on a dès-lors un facteur de l'équation, et parconséquent une de ses racines. Si on divise, par exemple, l'équation $x^4 - ax^3 +$ etc. (312) par $x - a$ on trouvera pour quotient $x^3 -$ etc., lequel divisé à son tour par $x - b$, donnera $x^2 -$ etc.; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait trouvé tous les facteurs de l'équation $x^4 - ax^3 +$ etc.

Si on proposait donc de trouver ceux de l'équation $x^3 + 3x^2 - 25x + 21 = 0$, dans laquelle il doit y avoir deux racines positives et une négative, au cas toutefois qu'il n'y en ait pas d'imaginaires (316), on commencerait par chercher tous les diviseurs de 21; et on trouverait ± 1, ± 3, ± 7, ± 21. On essayerait ensuite la division par $x + 1$, qui ne réussissant pas, ferait exclure ce diviseur du nombre des facteurs cherchés. On essayerait donc par $x - 1$, qui divisant sans reste l'équation proposée, serait regardé comme un de ses facteurs. En tâtonnant de même, on trouverait que $x - 3$ et $x + 7$ sont les deux autres facteurs; d'où l'on conclurait que les trois racines sont 1, 3 et -7, ensorte que l'une de ces trois valeurs indifféremment substituée dans l'équation au lieu de x, rendra son premier membre égal à zéro.

La pratique de cette méthode (appelée communément la méthode des diviseurs), n'a pas été bien longue dans cet exemple, parceque 21 ayant un petit nombre de diviseurs, il n'y a pas eu beaucoup de divisions à tenter. Mais lorsque le dernier terme a un grand nombre de diviseurs, cette méthode devient fatigante. Rebutés de ces longueurs, les analystes ont imaginé un expédient assez prompt pour écarter au moins la plupart des divisions inutiles. Nous allons expliquer en quoi il con-

siste : mais il faut auparavant connaître la manière de trouver tous les diviseurs d'un nombre.

Soit donc proposé de trouver ceux du nombre 210. On voit d'abord que ce nombre peut être divisé exactement par 2, et que le quotient de cette première division est 105, qui étant un nombre impair n'est pas divisible par 2. Ainsi le nombre proposé 210 ne peut être divisé par 4; mais comme 105 est divisible par 3 (155), on voit bien que 210 doit être divisible par 6, qui est le produit des diviseurs 2 et 3, dont on s'est servi.

Le quotient de la seconde division est 35 qui ne peut être divisé ni par 2, ni par 3, mais bien par 5. Ainsi 2.5, ou 10; 3.5, ou 15; 6.5, ou 30 sont autant de diviseurs exacts de 210.

Le quotient de la troisième division est 7 qui n'est divisible que par lui-même. Donc 7 fois 2, 7 fois 3, 7 fois 5, 7 fois 6, 7 fois 10, 7 fois 15, et 7 fois 30, sont autant de nouveaux diviseurs de 210 : lesquels joints à ceux que les opérations précédentes ont fait connaître, composent la suite de tous les diviseurs demandés.

La règle pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, se réduit donc à le diviser d'abord par 2, s'il est pair, ou par 3, ou par 5, ou par 7, ou par quelqu'un des autres nombres premiers, s'il est impair. Puis on divise ce premier quotient par 2 encore, s'il est pair, ou par 3, par 5, etc., s'il est impair. Ensuite on multiplie le premier diviseur par le second, et on écrit le produit au rang des diviseurs cherchés. Si le second quotient est encore pair, on le divise par 2, et s'il est impair, on essaie de le diviser comme ci-dessus, par un des autres nombres premiers, en commençant toujours par les plus petits. Après quoi on multiplie tous les diviseurs déjà trouvés par celui dont on vient de faire usage, et on poursuit la division jusqu'à ce que l'on parvienne enfin à un dernier quotient qui soit l'unité.

Deux exemples suffiront pour rendre cette méthode familière. Voici d'abord le détail de celui que nous venons d'expliquer.

Dividendes	210	1.	Diviseurs.
et	105	2.	
Quotiens.	35	3.6.	
	7	5.10.15.30.	
	1	7.14.21.35.42.70.105.210.	

Ainsi tous les diviseurs de 210 sont 1...2...3...5...6...7...10.....14...15...21...30...35...42....70...105...210.

Soit proposé maintenant de trouver les diviseurs de 900.... je dispose les parties du calcul comme dans l'exemple précédent, et je trouve

Dividendes	900	1.	Diviseurs.
et	450	2.	
Quotiens.	225	2.4.	
	75	3.6.12.	
	25	3.9.18.36	
	5	5.10.15.20.30.45.60.90.180.	
	1	5.25.50.75.100.150.225.300.450.900	

Le nombre 900 a donc pour diviseurs 1...2...3...4...5...6...9...10...12...15...18...20...25....30...36...45...50...60...75...90...100...150...180...225...300...450...900.

On peut trouver par la même méthode tous les diviseurs de 360, et leur grand nombre fera sentir la raison du partage purement arbitraire que les anciens géomètres ont fait de la circonférence du cercle en 360 degrés (97).

319. Cela posé, soit a l'un des diviseurs du dernier terme, qui étant ajouté à x forme le facteur $x+a$ d'une équation quelconque. Il est certain que si dans cette équation on suppose successivement $x=1$, $x=0$, $x=-1$ etc. les résultats que donnera le premier membre par ces différentes suppositions, seront successivement divisibles par $1+a$, par a, par $-1+a$, etc. provenus des mêmes suppositions faites dans le facteur $x+a$.

Or $1+a$, a, $-1+a$ sont en progression arithmétique. Donc aucun des diviseurs du dernier terme (auquel seul l'équation se réduit par la supposition de $x=0$) ne peut être le nombre cherché a, s'il n'est moyen proportionnel entre deux autres diviseurs des nombres provenus, l'un de la supposition $x=1$, l'autre de la supposition $x=-1$. Et comme la différence de cette progression est 1, il faut que le diviseur qui répond à la supposition $x=0$, surpasse d'une unité le diviseur correspondant à la supposition $x=-1$, et

soit surpassé à son tour d'une unité par le diviseur qui répond à la supposition $x = 1$.

Si on fait ensuite, $x = 2$, $x = 3$, etc., on doit trouver parmi les diviseurs qui en proviendront, des termes qui soient en progression arithmétique avec les précédens. Au moyen de cette condition, il est aisé de connaître les facteurs qui divisent exactement l'équation. On voit bien, au reste, que chacun des diviseurs du dernier terme doit être pris successivement en + et en —.

Pour faire quelque application de cette méthode, cherchons les racines commensurables de l'équation $x^3 + 3x^2 - 8x + 10 = 0$. Je suppose d'abord $x = 1$; le premier membre se réduit à 6 : si $x = 0$, il se réduit à 10 : et si $x = -1$, le résultat est 20. Je cherche tous les diviseurs de 6, de 10, et de 20. Ensuite je regarde si parmi ceux de 10 il en est, qui étant pris en + ou en —, surpassent d'une unité quelqu'un de ceux du nombre 20, et soient surpassés à leur tour de la même quantité par quelqu'un de ceux du nombre 6. Je trouve que + 2 et + 5 ont ces conditions. Car 3 et 6, diviseurs du nombre 6, surpassent d'une unité 2 et 5, diviseurs de 10; et ceux-ci surpassent de la même quantité 1 et 4, diviseurs de 20. Pour plus de clarté, on peut disposer ainsi les suppositions, les résultats, les diviseurs et les progressions.

Supp.	*Résul.*	*Div.*	*Prog.*	
$x = 1$	6	1 . 2 . 3 . 6	3	6
$x = 0$	10	1 . 2 . 5 . 10	2	5
$x = -1$	20	1 . 2 . 4 . 5 . 10 . 20	1	4

Ces deux progressions me font déjà connaître qu'il serait inutile de tenter la division de l'équation proposée par d'autre facteur que $x+2$, ou $x + 5$. Elles ne m'apprennent pas cependant si ces deux facteurs réussiront. Je ne puis m'en assurer qu'en essayant la division, ou en faisant une nouvelle supposition, par exemple $x = 2$, laquelle donne 14 pour résultat; d'où je conclus que la première progression 1, 2, 3 exigeant, pour être continuée, que 4 soit un des diviseurs de 14, ce qui n'est pas, $x + 2$ ne peut être un des facteurs de mon équation. Mais la progression 4, 5, 6 exigeant 7 pour être continuée, et 14 étant divisible par 7, je suis sûr que si l'équation a un facteur commensurable, elle n'en a point d'autre que $x + 5$. Je la divise donc par $x + 5$, et la division me réussit. Le quotient $x^2 - 2x + 2$ n'est plus que du second degré, et ses deux facteurs imaginaires $x - 1 \pm \sqrt{-1}$ se trouvent tout de suite en résolvant l'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Soit pris pour second exemple, $x^4 - x^3 - 16x^2 + 55x - 75 = 0$. Je suppose $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, et j'écris comme ci-dessus tous les diviseurs des résultats 36, 75 et 144, provenus de ces trois suppositions.

Supp.	*Rés.*	*Div.*	*Prog.*			
$x = 1$	36	1.2.3.4.6.9.12.18.36	4	—2	6	—4
$x = 0$	75	1.3.5.15.25.75	3	—3	5	—5
$x = -1$	144	1.2.3.4.6.8.9.12.16.18.24.36.48.72.144	2	—4	4	—6

Je cherche ensuite parmi les diviseurs de 75, ceux qui surpassent d'une unité quelqu'un des diviseurs de 144, et qui sont surpassés de la même quantité par quelqu'un de ceux de 36. Les nombres 3 et 5 pris tant en + qu'en — ont cette propriété, ce qui forme quatre progressions.

Pour connaître maintenant celle qu'il faut exclure, (car le dernier terme n'étant que — 75, il ne peut être le produit de ces quatre nombres), je suppose $x = 2$. Le résultat est 21, qui n'est pas divisible par 5, comme la première progression l'exigerait. Donc $x + 5$ n'est pas un des facteurs cherchés.

Pour vérifier les trois autres progressions, je suppose $x = -2$, ce qui donne pour résultat 225. Or 225 n'est pas divisible par 7, comme il le faudrait pour continuer la quatrième progression, $-4 - 5$, et -6; on doit donc rejeter $x - 5$. Mais 225 est divisible par 5 et par 3, comme la seconde et la troisième progression l'exigent. Les seuls facteurs à essayer sont donc $x - 3$, et $x + 5$.

J'essaie le premier. Il réussit, et donne pour quotient $x^3 + 2x^2 - 10x + 25$, que j'essaie de diviser par le second. La division réussit encore, et le quotient $x^2 - 3x + 5$ n'a plus de facteurs commensurables.

On voit par ces exemples avec quelle facilité on trouve les facteurs simples d'une équation numérique, lorsqu'elle en a. La méthode en est aisée, et quoiqu'elle ne soit pas exempte de tâtonnement, elle n'en est pas moins précieuse par tous ceux qu'elle fait éviter.

Si l'équation à résoudre passait le troisième degré, elle pourrait bien n'être décomposable qu'en facteurs du second. Voici en peu de mots la manière de trouver ces facteurs. On peut la voir bien détaillée dans les Elémens d'Algèbre de M. Clairaut.

320. Si on représente par $xx + bx + c$ le diviseur à deux dimensions d'une quantité donnée, il est clair qu'en faisant successivement $x = 2$, $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$, les résultats provenus de cette substitution dans la quantité donnée, seront divisibles successivement par $4 + 2b + c$, par $1 + b + c$, par c, par $1 - b + c$, et par $4 - 2b + c$, résultats du diviseur $x^2 + bx + c$. Il y aura donc parmi les diviseurs du résultat de $x = 2$, un nombre qui représentera $4 + 2b + c$; et si de chacun de ces diviseurs pris en + et en —, on retranche 4, quelqu'un de leurs restes représentera $2b + c$.

Il y aura parmi les diviseurs du résultat de $x = 1$, un nombre qui représentera $1 + b + c$. Donc si on ôte l'unité de tous ces diviseurs pris tant en + qu'en —, ce sera parmi ces restes que se trouvera $b + c$.

Parmi les diviseurs du dernier terme de l'équation auquel elle se réduit lorsque $x = 0$, on trouvera un nombre qui représentera c.

Parmi ceux du résultat de $x = -1$, on trouvera $-b + c$ en retranchant l'unité de chacun de ces diviseurs. Enfin on trouvera $4 - 2b + c$ dans la suite des diviseurs du résultat de $x = -2$, et si on ôte 4 de chacun de ces diviseurs pris en + et en —, quelqu'un de leurs restes représentera $-2b + c$.

Remarquez maintenant que $2b+c$, $b+c$, c, $-b+c$, $-2b+c$ forment une progression arithmétique, et que parconséquent dans les suites des nombres qui représenteront $2b+c$, $b+c$, c, $-b+c$, $-2b+c$, il ne faudra prendre que des proportionnels arithmétiques. Celui qui répondra à la supposition de $x=0$, représentera c; celui qui répondra à $x=1$ sera $b+c$; donc si l'on ôte celui qui représente c de celui qui représente $b+c$, on aura la valeur de b, et par là le facteur $xx+bx+c$, sera déterminé.

Dans l'application de cette méthode, il pourra arriver qu'il y ait des progressions à rejeter. On saura bientôt à quoi s'en tenir, par une nouvelle supposition $x=3$ ou -3 : car si de tous les diviseurs positifs et négatifs du nouveau résultat on ôte 9, il doit y avoir parmi leurs restes des nombres propres à continuer les progressions qu'il faut admettre. Toutes celles qui ne pourront être continuées, sont dans le cas d'être exclues.

Remarquez seulement que la quantité à retrancher chaque fois des diviseurs est le quarré de la valeur correspondante de x. D'après cela, il est aisé de saisir l'esprit de la méthode, et d'en faire des applications. Deux suffiront.

On demande si l'équation $x^4-3x^2-12x+5=0$, a des facteurs commensurables du second degré ?

J'écris les suppositions dans une première colonne, les résultats dans la suivante ; la troisième est pour les diviseurs ; la quatrième pour les quarrés à soustraire ; les deux autres sont pour les restes et les progressions.

Sup.	*Rés.*	*Div.*	*Q*	*Rest.*	*Prog.*			
$x=2$	15	1.3. 5. 15	4	−19,− 9,−7,−5−3,−1,+1,+11	−3	1	−5	11
$x=1$	9	1.3. 9.	1	−10,− 4,−2, 0,+2,+8	−4	0	−2	8
$x=0$	5	1.5.	0	− 5,− 1,+1,+5	−5	−1	+1	5
$x=-1$	15	1.3. 5. 15	1	−16,− 6,−4,−2, 0,+2,+4,+14	−6	−2	4	2
$x=-2$	33	1.3.11. 33	4	−37,−15,−7,−5,−3,−1,+7,+29	−7	−3	7	−1

Celle des restes se forme, comme nous l'avons dit, en retranchant de tous les diviseurs correspondans pris en + et en —, le quarré de la valeur correspondante de x. La première ligne, par exemple, se forme en disant, $-15-4=-19$ ..... $-5-4=-9$ ..... $-3-4=-7$... $-1-4=-5$. Voilà tous les restes des diviseurs de 15 pris en —. Pour les trouver quand on prend ces diviseurs en +, il n'y a qu'à dire, $+1-4=-3$ ... $+3-4=-1$... $+5-4=+1$ .... $+15-4=+11$. Les lignes suivantes se forment de même. Il n'y a que la quantité à retrancher, qui varie dans chacune.

Comparons maintenant les restes de la troisième ligne qui répond à $x=0$, avec ceux des lignes supérieures et inférieures, afin de trouver des progressions. Je vois d'abord que -5 est moyen proportionnel entre -4 -3 qui sont au-dessus, et -6 et -7 qui sont dans les deux dernières lignes. J'écris cette première progression, et je compare successivement -5 à tous les autres nombres supérieurs et inférieurs, pour savoir s'il n'y a pas d'autre progression. Je n'en trouve point.

Je passe donc à -1 qui n'en donne qu'une aussi, dont la différence est 1. Ensuite à $+1$ qui en donne une autre dont la différence est 3. Enfin à $+5$ qui en donne une quatrième. Mais il est bien évident que ces quatre progressions ne peuvent être admises toutes à la fois, puisque le dernier terme de l'équation n'est que 5 (318).

Pour en exclure quelqu'une, je suppose $x=3$, et j'ai pour résultat 23, dont les diviseurs sont 1 et 23. Soustrayant ensuite de ces diviseurs pris en $+$ en $-$ le quarré de 3, je trouve ces quatre restes, -32, -10, -8, $+14$, parmi lesquels manquent -2 et $+2$ qui seront nécessaires pour continuer les deux premières progressions. Il faut donc les rejeter.

A l'égard des deux dernières, on voit qu'elles peuvent être continuées par -8 et par 14. Aussi je prends dans l'avant-dernière le terme $+1$ qui répond à $x=0$, pour représenter c; et le terme -2 qui répond à $x=1$, pour représenter $b+c$. J'en conclus que $b=-3$, et que par-conséquent le premier facteur à essayer est x^2-3x+1. Je l'essaie, et la division qui réussit me donne pour quotient x^2+3x+5. Les deux facteurs de l'équation proposée sont donc x^2-3x+1, et x^2+3x+5, qu'il est aisé de résoudre, si l'on veut, par les méthodes du second degré.

Soit pris pour second exemple, $x^5-2x^4+x^3-5x^2-8x-2=0$. Ayant fait à l'ordinaire $x=2$, $x=1$, $x=0$, $x=-1$, $x=-2$, je cherche tous les diviseurs des résultats 30, 15, 2, 3, et 78; le reste s'entend assez par le détail suivant :

Supp.	*Rés.*	*Div.*	*Q.*
$x=2$	30	1.2.3.5.6.10.15.30	4
$x=1$	15	2.3.5.15	1
$x=0$	2	1.2	0
$x=-1$	3	1.3	1
$x=-2$	78	1.2.3.6.13.26,39.78	4

Restes.			*Progr.*
—34,—19,—14,—10,— 9,—7,—6,—5,—3,—2,—1,+1,+2,+ 6,+11,+26	—6	+2	6+1
—16,— 6,— 4,— 2, 0,+2,+4,+14	—4	0	4 0
— 2,— 1,+ 1,+ 2	—2	—2	2—1
— 4,— 2, 0,+ 2	0	—4	0—2
—82,—43,—30,—17,—10,—7,—6,—5,—3,—2,—1,+2,+9,+22,+35,+74	+2	—6	—2—3

Des quatre progressions que m'offre cet exemple, je vois qu'il faut rejeter les trois dernières, en supposant $x=3$: car le résultat 37 n'ayant pour diviseurs que 1 et 37, il est clair qu'en ôtant 9 de ces deux diviseurs pris positivement et négativement, les restes -46, -10, -8, $+28$ ne permettront de continuer que la première progression par -8.

J'ai donc -2 pour représenter c, et -4 pour représenter $b+c$: d'où je tire $b=-2$. Ainsi, s'il y a un facteur commensurable à deux dimensions dans l'équation proposée, ce doit être x^2-2x-2 ; je tente donc la division, et je trouve pour quotient exact x^3+3x+1.

Ces principes suffisent pour trouver les diviseurs commensurables du premier et du second degré, dans les équations qui ne passent pas le cinquième. Celles qui sont plus élevées ne sont quelquefois divi-

sibles que par des facteurs du troisième, quatrième, etc. Mais nous ne nous arreterons pas à expliquer la manière de les trouver, tant à cause de la longueur des calculs, qu'à cause du peu d'utilité qui en résulte.

Nous ne nous arrêterons pas non plus à expliquer comment on décompose une équation purement algébrique en ses facteurs de deux ou de plusieurs lettres, du premier ou du second degré. Quoique fort ingénieuses, toutes ces méthodes se ressentent pourtant un peu du tâtonnement.

Manière de transformer les Equations, et d'en faire évanouir le second terme.

321. Il est souvent utile de faire subir aux équations certains changemens, de supposer, par exemple, l'inconnue égale à une autre inconnue $\pm$ une quantité indéterminée. Cette supposition facilite en certains cas la résolution des équations.

Lorsque, par exemple, elles sont affectées de coefficiens fractionnaires, comme celle-ci $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{d}x + \frac{f}{g} = 0$, et que l'on veut ôter toutes ces fractions, il n'y a qu'à supposer $x = \frac{y}{m}$ (y étant une nouvelle inconnue, et m une quantité que l'on détermine toujours facilement): en substituant cette valeur à x, l'équation proposée deviendra $\frac{y^3}{m^3} + \frac{by^2}{am^2} + \frac{cy}{dm} + \frac{f}{g} = 0$, ou $y^3 + \frac{bmy^2}{a} + \frac{cm^2y}{d} + \frac{fm^3}{g} = 0$. Or cette dernière équation n'aura plus de coefficiens fractionnaires, si m est divisible tout-à-la-fois par a, par d et par g; et il le sera, si on prend pour m leur produit adg, ou même un plus petit nombre que ce produit, quand les nombres a, d, g ne sont pas premiers entre eux. Substituant donc adg au lieu de m dans $y^3 + \frac{bmy^2}{a} +$ etc., on aura l'équation $y^3 + bdgy^2 + a^2cdg^2y + a^3d^3fg^2 = 0$, où il n'y a plus de fractions.

Les racines de cette équation une fois trouvées, celles de $x^3 + \frac{b}{a}x^2 +$ etc. se présenteront d'elles-mêmes, en divisant les premières par m que nous venons de déterminer. Toute la difficulté consiste donc à trouver ces premières racines. Pour en faciliter la recherche, on a imaginé de faire évanouir le second terme des équations à résoudre; et voici comment on fait cette transformation.

322. Soit l'équation générale $x^m \pm ax^{m-1} \pm bx^{m-2} \pm$ etc. $\ldots + \omega = 0$. Je suppose $x = y + f$ (y étant une inconnue, et f une indéterminée, à laquelle on donnera telle valeur qu'il conviendra, pour faire évanouir le second terme). J'ai donc la transformée

$$\left.\begin{array}{l} y^m + mfy^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} f^2 y^{m-2} + \text{etc.}\ldots + \omega \\ \pm\ ay^{m-1} \pm \overline{m-1}\ .\ afy^{m-2} \pm \text{etc.} \\ \qquad\qquad \pm\ \ by^{m-2} \pm \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Maintenant, pour que le second terme de cette équation s'évanouisse, il faut que $mfy^{m-1} \pm ay^{m-1} = 0$. Il faut donc qu'après avoir divisé par my^{m-1}, et transposé, on ait $f = \mp \frac{a}{m}$. Ce qui nous fait voir d'une manière générale, que pour faire évanouir le second terme d'une equation, il n'y a qu'à supposer l'inconnue égale à une autre inconnue moins ou plus le coefficient du second terme de cette équation, divisé par le nombre qui en exprime le degré. On met moins, lorsque le second terme est positif; et plus, quand il est négatif.

Toute equation du second degré semblable à celle-ci $x^2 + ax = b$, se résout promptement par cette transformation, en faisant $x = y - \frac{a}{2}$, et en substituant. Nous ne nous y arrêterons pas. Soit donc $x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$, que l'on voudrait changer en une équation équivalente, dans laquelle il n'y eût plus de second terme.

Pour cela, je suppose $x = y + \frac{6}{3} = y + 2$; et substituant, il vient $y^3 * - 8y - 15 = 0$, qui n'a pas de second terme, c'est-à-dire, de y^2 dans cet exemple.

Pour transformer $x^4 + 2x^3 - 4 = 0$, je fais $x = y - \frac{2}{4} = y - \frac{1}{2}$, et j'ai $y^4 * - \frac{3}{2} y^2 + y - \frac{67}{16} = 0$, dont le second terme est évanoui. On transformerait $z^5 + az^4 - bz^2 + cz + d = 0$, en supposant $z = x - \frac{a}{5}$; et ainsi des autres.

La même méthode servirait à faire évanouir le troisième terme d'une équation; car en remontant à la transformée générale $y^m + mfy^{m-1} + \text{etc.}$, il n'y aurait qu'à supposer

$$\frac{m.m-1}{2} f^2 y^{m-2} \pm (m-1)\, afy^{m-2} \pm by^{m-2} = 0.$$

On trouverait

$$f = \mp \frac{a}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{m^2} \mp \frac{2b}{m.m-1}\right)}.$$

Mais comme la substitution de cette valeur de f introduirait des radicaux dans la transformée, on aime mieux ne faire évanouir que le second terme. Le calcul deviendrait encore plus compliqué, si on voulait faire évanouir le quatrième ou le cinquième, etc.

Du calcul des Quantités radicales.

323. A commencer aux équations du second degré, les quantités radicales sont inévitables dans la résolution de presque toutes les

équations. Il est donc à propos d'apprendre à calculer ces quantités, avant que d'aller plus loin dans cette théorie.

Quoique l'on appelle en général quantités radicales, toutes les quantités affectées du signe radical, il y en a pourtant beaucoup qui ne sont radicales qu'en apparence; ce sont des quantités commensurables, qui peuvent par là même subir les extractions de racine indiquées par l'exposant du radical. Or toutes les fois que cette opération est possible, il ne faut pas manquer de la faire. C'est ainsi que les quantités suivantes

$$\sqrt{225}\ldots\sqrt{a^2b^4}\ldots\sqrt[3]{x^5y^9}\ldots\sqrt[4]{(1+4\varphi+6\varphi^2+4\varphi^3+\varphi^4)}$$

se réduisent à celles-ci (157) :

$$\pm 15\ldots\pm ab^2\ldots x^2y^3\ldots 1+\varphi,\text{ ou } -1-\varphi.$$

Le reste des quantités radicales se partage en deux classes, dont l'une comprend toutes les quantités incommensurables; l'autre renferme toutes les quantités imaginaires.

Les incommensurables, que l'on appelle aussi quantités irrationnelles, ne peuvent jamais être débarrassées du radical qui les affecte, parcequ'il n'est pas possible d'avoir leur valeur d'une manière exacte. Tout ce que l'on peut faire de mieux, c'est d'approcher de cette valeur par les méthodes les plus promptes, ou du moins de simplifier ces quantités, lorsqu'il y a lieu.

Par exemple, les quantités suivantes peuvent être simplifiées, en appliquant les règles d'extraction aux parties qui en sont susceptibles; et on peut écrire ces quantités comme on les voit ici :

$$\sqrt{8}=2\sqrt{2}\ldots\sqrt[3]{432}=2\sqrt[3]{54}=3\sqrt[3]{16}=6\sqrt[3]{2}\ldots\sqrt[4]{405}=3\sqrt[4]{5}.$$

$$\sqrt{m^2n}=m\sqrt{n}\ldots\sqrt[3]{\varphi^3\omega^5}=\varphi\omega\sqrt[3]{\omega^2}\ldots\sqrt[5]{\frac{c^6d^8}{g^5}}=\frac{cd}{g}\sqrt[5]{cd^3}.$$

$$\sqrt{(3a^2-6ab+3b^2)}=(a-b)\sqrt{3}.$$

Outre ces premières réductions, praticables seulement en certains cas, les incommensurables peuvent subir toutes les opérations de l'Arithmétique. Il faut donc savoir comment on les assujétit à ces opérations.

324. L'addition des radicaux se fait en les écrivant de suite, avec les signes qui leur sont propres; et s'il se trouve des radicaux semblables, c'est-à-dire, qui aient le même exposant, et qui affectent la même quantité, on les réduit suivant la méthode ordinaire (113).

Soit proposé, par exemple, d'ajouter $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $2\sqrt{a}$, $-3\sqrt[3]{b}$. On écrira $3\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b}$. Soit proposé ensuite d'ajouter..... $\sqrt[4]{x^2y}$, $-a\sqrt[4]{x^2y}$, $+b\sqrt[4]{x^2y}$. On écrira $(1-a+b)\sqrt[4]{x^2y}$.

En général, la somme de $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}+\frac{f}{g}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$ peut se réduire à

$\frac{ag+bf}{bg}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$. La soustraction des radicaux consiste à changer seulement le signe du coefficient du radical que l'on veut soustraire; et si par hasard les deux radicaux sont semblables, on les réduit comme ci-dessus.

Exemples. $3\sqrt{7}-\sqrt{7}=2\sqrt{7}\ldots\sqrt{75}-4\sqrt{3}=5\sqrt{3}-4\sqrt{3}=\sqrt{3}$ $\ldots\sqrt{27a^3b}-\sqrt{3a^3b^5}=3a\sqrt{3ab}-ab^2\sqrt{3ab}=(3a-ab^2)\sqrt{3ab}$.

325. La multiplication des quantités radicales se fait à-peu-près comme celle des autres quantités. Il y a seulement deux règles particulières à observer; l'une dans le cas où le multiplicande et le multiplicateur sont soumis à des radicaux de même degré; l'autre, dans le cas où leurs radicaux sont différens.

Dans le premier cas, on multiplie à l'ordinaire les quantités soumises à ces signes, et on écrit leur produit sous le radical commun; sauf à réduire ensuite, s'il y a lieu.

Exemples. $\sqrt{6}\times\sqrt{8}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}\ldots\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ldots$ $\sqrt[e]{5x^2y^4}\times\sqrt[e]{20ux}=\sqrt[e]{(100ux^3y^4)}\ldots\sqrt[5]{p}\times\sqrt[5]{-q}=\sqrt[5]{-pq}$.

Dans le second cas, on se contente souvent d'indiquer la multiplication; ou si on veut l'effectuer de manière que le produit soit assujéti à un seul radical, on commence par réduire les deux radicaux des facteurs au même exposant; après quoi on multiplie comme dans le premier cas.

Or, pour opérer cette réduction, il faut multiplier l'un par l'autre les deux exposans des signes radicaux, et multiplier de même les exposans des quantités soumises à un radical, par l'exposant de l'autre radical. Cette double opération fait rentrer le second cas dans le premier.

Exemples. $\sqrt{a}.\sqrt[3]{b}=\sqrt[6]{a^3}.\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[6]{a^3b^2}\ldots\sqrt[n]{b}.\sqrt[m]{c}=\sqrt[mn]{b^mc^n}$ $\ldots\sqrt[p]{b^s}.\sqrt[q]{c^t}=\sqrt[pq]{b^{sq}c^{tp}}$.

326. La division des radicaux peut quelquefois s'effectuer, quand ils ont le même exposant; mais lorsque la division est impraticable, on l'indique seulement de la même manière que pour les quantités rationnelles.

Exemples. $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}=\frac{1}{2}\ldots\frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{33}}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{11}{33}}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}\ldots\frac{\sqrt[n]{ax}}{\sqrt[n]{bxy}}=\sqrt[n]{\frac{a}{by}}$.

Mais pour diviser $\sqrt[m]{a}$ par $\sqrt[p]{x}$, on écrira $\sqrt[m]{a}:\sqrt[p]{x}$; ou si l'on veut réduire ces deux radicaux au même exposant, on aura $\sqrt[mp]{a^p}:\sqrt[mp]{x^m}=\sqrt[mp]{\frac{a^p}{x^m}}$.

En général, $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{s}{t}}:\frac{c}{d}\sqrt[n]{\frac{y}{z}}=\frac{ad}{bc}\sqrt[mn]{\frac{s^nz^m}{t^ny^m}}$.

327. On élève les quantités radicales à leurs différentes puissances, soit entières, soit fractionnaires, en multipliant leurs exposans par celui de la puissance à laquelle on veut les élever : après quoi, s'il y a quelque réduction à faire, on la fait.

Si on avait, par exemple, $\sqrt{2}$ à élever au cube, on écrirait d'abord $\sqrt{2^3}$, ou $\sqrt{8}$; puis $2\sqrt{2}$. Pareillement, pour élever au cube $\sqrt{a^m}$, on écrirait $\sqrt{a^{3m}}$, et pour élever $\sqrt{a^n b^x}$ au quarré, on ôterait simplement le radical. Ainsi $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{xy} + y$, et $(x+\sqrt{y})^3 = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3xy + y\sqrt{y}$.

328. En général, quand l'exposant du radical est le même que celui de la puissance proposée, il n'y a qu'à ôter le radical. Ainsi $(\sqrt[m]{a})^m = a$. C'est une suite évidente du calcul des puissances par leurs exposans (157); et toutes les fois que l'on éprouvera quelque difficulté dans le calcul des radicaux, rien ne sera plus facile que de la résoudre, en transformant les quantités radicales en puissances fractionnaires (161).

329. Les quantités imaginaires se calculent de la même façon. On les ajoute, on les soustrait et on les réduit comme toutes les autres quantités radicales; mais il y a dans leur multiplication un cas assez embarrassant, dont il est bon d'être prévenu.

Soit donc proposé de multiplier $\sqrt{-a}$ par $\sqrt{-a}$. Il semble d'abord que le produit doit être $\sqrt{+a^2} = a$; mais en remontant à l'origine du signe radical, on ne tarde pas à se convaincre que le produit de $\sqrt{-a}$ par $\sqrt{-a}$ doit être $-a$. Que désigne-t-on en effet par l'expression générale $\sqrt{m}$? N'est-ce pas la quantité qui, multipliée par elle-même, donne m? Soit donc $m = -a$, on aura $\sqrt{-a}.\sqrt{-a} = \sqrt{m}.\sqrt{m} = m = -a$.

Il est vrai que si on multipliait sous le signe radical, $-a$ par $-a$, on trouverait $\sqrt{+a^2}$; mais si on observe que $\sqrt{+a^2}$ peut être également $+a$ et $-a$, et que l'ambiguité de signe (qui a lieu en général toutes les fois qu'on ignore si a^2 provient de $+a.+a$, ou de $-a.-a$), ne saurait exister ici, puisque l'on sait que a^2 est provenu de $-a.-a$, il est impossible qu'on ne soit pas convaincu que, dans ce cas, $\sqrt{a^2}$ est $-a$, et non $+a$.

D'après cette observation, il n'est pas difficile de voir que les puissances successives de $\sqrt{-a}$ sont

$$\sqrt{-a},\ -a,\ -a\sqrt{-a},\ a^2,\ a^2\sqrt{-a},\ -a^3, \text{ etc.};$$

et que les mêmes puissances de $-\sqrt{-a}$ sont pareillement

$$-\sqrt{-a},\ -a,\ a\sqrt{-a},\ a^2,\ -a^2\sqrt{-a},\ -a^3, \text{ etc.}$$

330. Cela posé, la multiplication des polynomes qui ont des termes affectés d'imaginaires, ne doit plus être sujette à aucune difficulté, pourvu qu'on fasse attention aux signes qui précèdent ces termes. Ainsi le quarré de $1+\sqrt{-1}$ est $1+2\sqrt{-1}-1$, ou $2\sqrt{-1}$. Le cube de $-1+\sqrt{-3}$ est $-1+3\sqrt{-3}+9-3\sqrt{-3}$, ou 8. Le produit de $x+a+\sqrt{-b}$ par $x+a-\sqrt{-b}$, est $x^2+2ax+a^2+b$.

331. Ces deux derniers exemples font voir qu'une quantité réelle est quelquefois le produit de plusieurs facteurs imaginaires, et que par conséquent une équation peut avoir un certain nombre de racines imaginaires, quoique tous ses coefficiens soient réels.

Soit $x+a+\sqrt{-b}$ l'un des facteurs imaginaires d'une équation dont le premier membre est A. On peut faire voir que cette même équation doit avoir aussi pour facteur $x+a-\sqrt{-b}$; car il n'y a qu'une quantité de la forme $B(x+a-\sqrt{-b})$ qui, multipliée par $x+a+\sqrt{-b}$, puisse donner un produit réel $B(x^2+2ax+a^2+b)$, comme l'est le premier membre A. L'existence du facteur imaginaire $x+a+\sqrt{-b}$ dans une équation entraîne donc celle d'un autre facteur pareil... $x+a-\sqrt{-b}$, qui ne diffère du premier que par le signe de $\sqrt{-b}$. Leur produit est équivalent au facteur du second degré..... $x^2+2ax+a^2+b$ entièrement réel, et dont le dernier terme a^2+b est toujours positif. On tire de là diverses conséquences utiles dans la théorie des équations.

1°. Les racines imaginaires qui se trouvent dans une équation, y sont toujours en nombre pair.

2°. Les racines imaginaires que l'on rencontre dans la solution d'une équation, ont deux à deux la même quantité sous le signe radical, et ne diffèrent que par les signes + et —.

3°. Toute équation d'un degré impair a au moins une racine réelle.

4°. Toute équation d'un degré pair dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, puisque le produit réel des radicaux imaginaires qui font alors partie des deux polynomes multipliés l'un par l'autre, ne peut être qu'une quantité positive (325).

Méthode pour extraire les Racines des quantités en partie rationnelles et en partie incommensurables.

332. Les équations qui se résolvent par les méthodes du second degré offrent souvent à extraire des racines de quantités en partie rationnelles et en partie radicales. Ces équations sont généralement représentées par $x^{2m}+px^m=q$, et leur solution générale donne, $x=\sqrt[m]{[-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]}$. Il importe donc à la résolution complète de ces équations, que $\sqrt[m]{[-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}]}$ soit réduite, lorsque cela est possible, à une expression plus simple, dans laquelle il n'entre qu'une quantité rationnelle, avec un radical du second degré. C'est pourquoi nous allons donner la méthode de faire cette réduction.

Prenons d'abord le cas où $m=2$, c'est-à-dire, cherchons la racine quarrée des quantités en partie rationnelles, en partie radicales. Nous représenterons généralement ces quantités par $p+\sqrt{q}$, et leur racine par $\sqrt{x}+\sqrt{y}$. S'il n'y a qu'un seul radical dans la racine que l'on cherche, l'une de ces deux quantités $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ sera commensurable.

On aura donc $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(p+\sqrt{q})}$, d'où l'on tirera $x+y+2\sqrt{xy}=p+\sqrt{q}$. Égalant ensuite la partie commensurable du premier membre à celle du second, on aura $x+y=p$. Leurs parties incommensurables donneront $xy=\frac{q}{4}$; d'où $y=\frac{q}{4x}=p-x$, et parconséquent $x^2-px=-\frac{q}{4}$; d'où encore $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{4}q)}$, et $y=\frac{1}{2}p\mp\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2-\frac{q}{4}\right)}$. Donc $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, ou

$$\sqrt{(p+\sqrt{q})}=\sqrt{[\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}+\sqrt{[\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}.$$

Or quoique cette dernière quantité paraisse aussi compliquée que $\sqrt{(p+\sqrt{q})}$, cependant, lorsque celle-ci sera susceptible d'une racine exacte, l'autre pourra se réduire à une expression plus simple. Il est aisé de voir en effet, que si $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est la racine quarrée de $p+\sqrt{q}$, celle de $p-\sqrt{q}$ doit être $\sqrt{x}-\sqrt{y}$, et que parconséquent $(\sqrt{x}+\sqrt{y})\ (\sqrt{x}-\sqrt{y})$, ou $x-y=\sqrt{(p^2-q)}$, quantité commensurable toutes les fois que $p+\sqrt{q}$ a une racine quarrée exacte.

Applications. I°. On demande si $4+2\sqrt{3}$ a une racine quarrée exacte ? Pour le savoir, je fais $4=p\ldots 2\sqrt{3}$, ou $\sqrt{12}=\sqrt{q}$. J'ai donc $q=12\ldots\sqrt{[\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}=\sqrt{3}$, et..... $\sqrt{[\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}=1$; d'où je tire $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$, ou $-1-\sqrt{3}$. C'est la racine demandée.

II°. On demande encore la racine de $8+2\sqrt{15}$? Ici on a $p=8$, $q=60$. Donc $\sqrt{[\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}=\sqrt{5}$, et..... $\sqrt{[\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}=\sqrt{3}$. Donc $\sqrt{(8+2\sqrt{15})}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$, ou $-\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

Il suit de là que $\sqrt{(4-2\sqrt{3})}=1-\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3}-1$, et que $\sqrt{(8-2\sqrt{15})}=\sqrt{3}-\sqrt{5}$, ou $\sqrt{5}-\sqrt{3}$. En général, $\sqrt{(p-\sqrt{q})}=\sqrt{[\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}-\sqrt{[\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}$, ou $\sqrt{[\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}-\sqrt{[\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}$.

333. La même formule peut servir à extraire la racine quarrée d'une quantité en partie rationnelle et en partie imaginaire. Soit, par exemple, $-1+2\sqrt{-2}$ qui étant comparée avec $p+\sqrt{q}$, donne $p=-1$, $q=-8$, $\sqrt{[\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}=\sqrt{(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2})}$, et $\sqrt{[\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-q)}]}=\sqrt{(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2})}$, d'où..... $\sqrt{(-1+2\sqrt{-2})}=1+\sqrt{-2}$ ou bien $-1-\sqrt{-2}$.

334. On trouve quelquefois des quantités imaginaires monomes qui ont des racines binomes. Telle est la quantité $2\sqrt{-1}$ dont la racine est $1+\sqrt{-1}$. Pour extraire ces sortes de racines, on s'y prendra de la même manière que dans les exemples précédens. Si on voulait donc avoir celle de $m\sqrt{-1}$, (m étant une quantité réelle quelconque), on supposerait $\sqrt{m\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1}$, ce qui donnerait $m\sqrt{-1}=x^2-y^2+2xy\sqrt{-1}$; d'où $x^2-y^2=0$, ce qui donne $x=y$, et $2xy=m$, d'où l'on tire $x=\sqrt{\frac{1}{2}m}$. Donc, en général, $\sqrt{m\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{1}{2}m}\,(1+\sqrt{-1})$.

335. Cherchons à présent la racine cubique de $p+\sqrt{q}$, et représentons-la par $(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{z}$. Nous prenons $x+\sqrt{y}$, au lieu de $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, parceque le cube de ces deux dernières quantités ne contiendrait aucun terme commensurable. Nous prenons aussi $(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{z}$, parceque dans le cube de cette expression il entre aussi bien une quantité commensurable, que dans celui de $x+\sqrt{y}$, et parceque cette indéterminée z nous sera utile.

Nous aurons donc $(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{(p+\sqrt{q})}$, et parconséquent $(x-\sqrt{y})\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{(p-\sqrt{q})}$. Multiplions l'une par l'autre ces deux équations, il viendra $(x^2-y)\sqrt[3]{z^2}=\sqrt[3]{(p^2-q)}$, d'où $x^2-y=\frac{\sqrt[3]{(p^2-q)z}}{z}$. Donc si x^2-y est commensurable, c'est-à-dire, si on peut avoir la racine cubique exacte de la quantité proposée $p+\sqrt{q}$, l'expression $\frac{\sqrt[3]{(p^2-q)z}}{z}$ doit être aussi commensurable. Mais il faut pour cela que $(p^2-q)z$ soit un cube parfait; il faut donc que $z=1$, toutes les fois que p^2-q sera un cube parfait; ou s'il ne l'est pas, il faut qu'on prenne pour z un nombre propre à le rendre tel.

Soit pour abréger, $\frac{\sqrt[3]{(p^2-q)z}}{z}=a$; nous aurons $x^2-y=a$: et puisque d'un côté l'équation $(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{(p+\sqrt{q})}$ étant élevée à son cube, donne $x^3z+3xyz+3x^2z\sqrt{y}+yz\sqrt{y}=p+\sqrt{q}$, et que d'un autre côté, l'équation $x^2-y=a$ donne $y=x^2-a$, on trouvera, 1°. que $x^3z+3xyz=p$, d'où $x^3+3xy=\frac{p}{z}$; 2°. qu'en substituant ici la valeur de y, on a $4x^3-3ax=\frac{p}{z}$; d'où $4x^3-3ax-\frac{p}{z}=0$.

Il ne s'agit plus maintenant que de trouver les diviseurs commensurables de cette dernière équation. Elle doit en avoir si $p+\sqrt{q}$ a une racine cubique exacte. On connaîtra donc x, ce qui déterminera aussitôt la valeur de y; et comme z est déjà connue, la racine que l'on cherche se trouvera toute connue.

Applications. I°. Quelle est la racine cube de $10+6\sqrt{3}$? On a $p=10$, $q=108$. Donc $p^2-q=-8$, cube parfait; donc $z=1$, $a=-2$, et l'équation $4x^3-3ax-\frac{p}{z}=0$, devient $4x^3+6x-10=0$. Or $x-1$ est un diviseur commensurable de cette dernière équation; on a donc $x=1$, d'où $y=x^2-a=3$, et $\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})}=1+\sqrt{3}$.

II°.

II°. Quelle est la racine cube de $8 + 4\sqrt{5}$? Ici $p = 8$; $q = 80$; donc $p^2 - q = -16$ qui n'est pas un cube. Pour qu'il le devienne, on supposera $z = 4$, ce qui donnera $\frac{\sqrt[3]{(p^2-q)z}}{z} = -1 = a = x^2 - y$

Alors l'équation $4x^3 - 3ax - \frac{p}{z} = 0$ se change en celle-ci, $4x^3 + 3x - 2 = 0$, dont le diviseur $2x - 1$, donne $x = \frac{1}{2}$, et par-conséquent $y = \frac{5}{4}$. La racine cherchée est donc $\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}}$

336. Nous remarquerons ici qu'une quantité quelconque a toujours trois racines cubiques. Cela suit de ce que la valeur de x se tire d'une équation du troisième degré, $4x^3 - 3ax - \frac{p}{z} = 0$, et de ce que la valeur de y dépend de celle de x. Sur quoi il faut observer que si la quantité proposée est réelle, elle a une seule racine cube réelle, et que si elle est imaginaire ses trois racines cubes le sont aussi.

Dans la première application, par exemple, que nous venons de faire, nous avons trouvé que $1 + \sqrt{3}$ était la racine cube exacte et réelle de $10 + 6\sqrt{3}$. S'il fallait maintenant trouver les deux racines imaginaires, je chercherais les trois racines de l'équation $4x^3 + 6x - 10 = 0$, qui sont (318) $x = 1$, $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{-1}$. Ces trois valeurs de x donneraient $y = 3$, et $y = \mp\frac{3}{2}\sqrt{-1}$; d'où je conclurais que les trois racines cubes cherchées sont $1 + \sqrt{3}$, $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1} + \sqrt{(\mp\frac{3}{2}\sqrt{-1})} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm (\sqrt{3}+3)\frac{\sqrt{-1}}{2}$.

337. Il ne serait guère plus difficile d'extraire les trois racines cubes des quantités en partie commensurables et en partie imaginaires. Soit, par exemple, la quantité $-10 + 9\sqrt{-3}$, qui donne $p = -10$., $q = -243$, et $p^2 - q = 343$, cube parfait : donc $z = 1$, et $a = \sqrt[3]{343} = 7 \ldots y = x^2 - 7$, et $4x^3 - 21x + 10 = 0$. Cette dernière équation donne $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{5}{2}$, et parconséquent $y = -3$, $y = -\frac{27}{4}$, $y = -\frac{3}{4}$. Les trois racines cubes de $-10 + 9\sqrt{-3}$ sont donc $2 + \sqrt{-3}$, $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Soit encore $-11 - 2\sqrt{-1}$ qui donne $p = -11$, $q = -4$, $p^2 - q = 125$, $z = 1$, $a = 5$, et $4x^3 - 15x + 11 = 0$. De la dernière équation on tirera $x = 1$, $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}$. Donc $y = -4$, $y = -\frac{7}{4} \mp \sqrt{3}$. Donc $\sqrt{(-11 - 2\sqrt{-1})} = 1 + 2\sqrt{-1}$, ou $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{3} + \sqrt{(-\frac{7}{4} \mp \sqrt{3})}$.

Pour extraire des racines plus élevées dans le même genre, on suivrait à-peu-près le même procédé.

Résolution des Equations du troisième degré.

338. Pour résoudre une équation du troisième degré, on commencera par en faire évanouir le second terme, ce qui la réduira à

une équation de cette forme, $x^3 + px + q = 0$. On supposera ensuite $x = y + z$, et on déterminera les valeurs de ces nouvelles inconnues de la manière suivante.

Par la substitution de $y + z$ à la place de x dans l'équation $x^3 + px + q = 0$, elle deviendra

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + py + pz + q = 0;$$

et si on suppose, comme on en est bien le maître, que $y^3 + z^3 + q = 0$, il ne restera que $3y^2z + 3yz^2 + py + pz = 0$, ou même que $3yz + p = 0$ (en divisant par $y + z$), ce qui donne

$$y = -\frac{p}{3z} = -\frac{\frac{1}{3}p}{z}.$$

Substituons cette valeur de y dans $y^3 + z^3 + q = 0$; nous aurons $z^3 - \frac{\frac{1}{27}p^3}{z^3} + q = 0$, ou $z^6 + qz^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0$: équation du sixième degré, mais qui se résout par les méthodes du second (332), et qui donne $z^3 = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$. D'où $z = \sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$.

Maintenant, de $y^3 + z^3 + q = 0$, on peut tirer

$$y^3 = -z^3 - q = -\frac{1}{2}q \mp \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}.$$

Donc $y = \sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q \mp \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$. Donc $y + z$, ou

$$x = \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]} + \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$= \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]} + \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

Car la première expression se réduit à la seconde, dans les deux cas du signe $\pm$.

339. A la vue de cette valeur générale de x, on ne croirait pas d'abord qu'il fût possible d'en tirer trois racines pour l'équation $x^3 + px + q = 0$. Mais si l'on divise cette équation par le facteur supposé $x - y - z$, on verra que le quotient est une équation du second degré, laquelle à son tour se décomposera facilement en ses deux facteurs.

Soit en effet substitué dans l'équation $x^3 + px + q = 0$, $-3yz$ au lieu de p $\left(\text{puisqu'on a trouvé } y = \frac{-p}{3z}\right)$; et $-y^3 - z^3$ au lieu de q, (puisqu'on a supposé $y^3 + z^3 + q = 0$). Soit aussi substitué dans la valeur générale de x, y au lieu de $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$, et z au lieu de $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$. L'équation deviendra $x^3 - 3yzx - y^3 - z^3 = 0$; et son premier facteur sera $x - y - z$.

Divisons à présent l'équation par ce facteur. Nous trouverons pour quotient exact, $x^2 + xy + xz + y^2 - yz + z^2 = 0$, équation du second degré, qui donnera pour les deux autres valeurs de l'in-

connue, $x = \left(\frac{\pm\sqrt{-3}-1}{2}\right)y - \left(\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)z$; et parconséquent

$$x = \left(\frac{\pm\sqrt{-3}-1}{2}\right)\sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$-\left(\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

Or cette dernière formule donne deux valeurs imaginaires de x, toutes les fois que $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$ est une quantité réelle. Reste donc à savoir ce que deviennent ces valeurs, lorsque $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$ est imaginaire, ou, ce qui revient au même, lorsque $\frac{1}{27}p^3$ est négatif et plus grand que $\frac{1}{4}q^2$.

Je suppose, pour abréger, que $f = \frac{1}{2}q$, et que $g\sqrt{-1}$ représente $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$; on aura

$$x = (-f + g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} - (f + g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$

et réduisant en série, on trouvera 1° que $(-f + g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$
$= -f^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}f^{-\frac{2}{3}}g\sqrt{-1} - \frac{1}{9}f^{-\frac{5}{3}}g^2 - \frac{5}{81}f^{-\frac{8}{3}}g^3\sqrt{-1} + \frac{10}{243}f^{-\frac{11}{3}}g^4 + \text{etc.}$

On trouvera 2° que.....$(f + g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$
$= f^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}f^{-\frac{2}{3}}g\sqrt{-1} + \frac{1}{9}f^{-\frac{5}{3}}g^2 - \frac{5}{81}f^{-\frac{8}{3}}g^3\sqrt{-1} - \frac{10}{243}f^{-\frac{11}{3}}g^4 + \text{etc.}$

Donc $(-f + g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} - (f + g\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, ou.....
$x = -2f^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{g^2}{9f^2} - \frac{10g^4}{243f^4} + \frac{154g^6}{6561f^6} - \text{etc.}\right)$, expression qui ne contient aucun terme imaginaire.

Et si nous reprenons les deux autres valeurs de $x = \left(\frac{\pm\sqrt{-3}-1}{2}\right)$
$\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} - \frac{(1\pm\sqrt{-3})}{2}\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$,
ou $x = \left(\frac{\pm\sqrt{-3}-1}{2}\right)\sqrt[3]{(-f + g\sqrt{-1})} + \left(\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{(f + g\sqrt{-1})}$,
nous aurons $x = f^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{g^2}{9f^2} - \frac{10g^4}{243f^4} + \frac{154g^6}{6561f^6} - \text{etc.}\right)$.....
$\mp \frac{g}{f^{\frac{2}{3}}\sqrt{3}}\left(1 - \frac{5g^2}{27f^2} + \frac{22g^4}{243f^4} - \frac{374g^6}{6561f^6} + \text{etc.}\right)$, autre expression qui n'a point de terme imaginaire.

Donc, lorsque $\frac{1}{27}p^3$ est négatif et plus grand que $\frac{1}{4}q^2$, les trois valeurs de x sont réelles.

Il n'y a guère d'efforts que l'on n'ait faits pour déterminer ces trois valeurs réelles, autrement que par des séries; mais on n'a pu en venir à bout. La difficulté attachée à ce cas, lui a fait donner le nom de *cas irréductible*.

340. Si p est positif, ou si étant négatif il est tel que $\frac{1}{27}p^3$ soit moindre que $\frac{1}{4}q^2$, alors une des trois valeurs de x est réelle, et les deux autres sont imaginaires. Ainsi toute équation du troisième degré a au moins une racine réelle.

Appliquons maintenant ces principes à un ou deux exemples, et d'abord proposons-nous de trouver les trois racines de l'équation $y^3 - 3y^2 + 12y - 4 = 0$.

Je fais $y = x + 1$, et le second terme disparaît dans la transformée $x^3 + 9x + 6 = 0$, qui étant comparée à $x^3 + px + q = 0$, donne $p = 9$, $q = 6$. Et parceque p se trouve ici positif, j'en conclus que des trois racines que je cherche, une seule est réelle. Pour la trouver, je substitue les valeurs de p et de q dans la formule générale $x = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{\text{etc.}})} \ldots + \sqrt[3]{\text{etc.}}$, et j'ai $x = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3}(1 - \sqrt[3]{3})$. Donc $x + 1$ ou $y = 1 + \sqrt[3]{3}(1 - \sqrt[3]{3})$. C'est la valeur réelle de y. Il est aisé de trouver ses deux valeurs imaginaires.

Proposons-nous ensuite l'équation $x^3 - 3x - 18 = 0$, qui donne $p = -3$, et $q = -18$. Or, quoique p soit négatif ici, il est tel cependant que $\frac{1}{27}p^3$ est moindre que $\frac{1}{4}q^2$. La proposée a donc une racine réelle et deux imaginaires. La première est

$$x = \sqrt[3]{(9 + 4\sqrt{5})} + \sqrt[3]{(9 - 4\sqrt{5})} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5} = 3.$$

Les deux autres ne sont pas difficiles à trouver.

Dans ce dernier exemple, il eût été plus simple de chercher les diviseurs commensurables de la proposée $x^3 - 3x - 18 = 0$. C'est même en général ce que l'on doit faire lorsqu'on a une équation du troisième degré à résoudre, surtout lorsque cette équation est dans le cas irréductible. Au défaut de ces diviseurs, on peut avoir recours à une méthode d'approximation que nous expliquerons bientôt. On peut aussi se servir des séries trouvées ci-dessus; mais elles sont ordinairement si peu convergentes, que pour en tirer des valeurs suffisamment exactes, il faut en calculer un grand nombre de termes, ce qui devient fort long.

341. Remarque. Quoique dans le cas irréductible, la valeur de x ait une forme imaginaire, il n'est pas difficile cependant de trouver sa valeur réelle, lorsqu'elle est un nombre entier. Car l'expression générale de cette valeur étant la formule

$$x = \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]} + \sqrt[3]{[(-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]},$$

il est nécessaire qu'elle se réduise à un nombre entier, lorsqu'une des valeurs de x est un nombre entier. Or elle ne peut s'y réduire qu'autant que $-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$ est un cube parfait, dont la racine est composée d'une partie réelle que j'appelle m, et d'une partie imaginaire n. C'est donc à dire que $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} = m + n$, et que parconséquent $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} = m - n$. Donc $x = 2m$.

Donc lorsque dans le cas irréductible une des valeurs de x est un nombre entier, on trouvera exactement cette valeur en doublant la partie réelle de la racine cube de $-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$. Et parceque $-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$ a trois racines cubes (337), il est clair que pour avoir les trois valeurs de x dans ce cas, il suffit de prendre le double des trois parties réelles de ces racines.

Soit pris pour exemple, $x^3-39x-70=0$, qui étant comparée à $x^3+px+q=0$, donne $p=-39$, $q=-70$. Donc $-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=35+18\sqrt{-3}$. Mais $35+18\sqrt{-3}$ a pour ses trois racines cubes $-1+2\sqrt{-3}\ldots\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\ldots-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-3}$, dont les parties réelles sont $-1\ldots+\frac{7}{2}\ldots-\frac{5}{2}$. Les trois valeurs de x sont donc -2, $+7$, -5.

Soit encore $x^3-17x-4=0$; d'où $p=-17$, $q=-4$, et $-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}=2+\frac{31}{3}\sqrt{-\frac{5}{3}}$. Les trois racines cubes de cette dernière quantité sont $-2+\sqrt{-\frac{5}{3}}\ldots\ldots$ $1+\frac{1}{2}\sqrt{5}+\sqrt{(-\frac{41}{12}+\sqrt{5})}\ldots\ldots1-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\sqrt{(-\frac{41}{12}-\sqrt{5})}$. Donc les trois racines cherchées sont -4, $2+\sqrt{5}$, $2-\sqrt{5}$. D'où l'on voit qu'il est inutile de chercher les racines imaginaires des trois racines cubes de $-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$, quand on en connait les parties réelles.

Résolution des Equations du quatrième degré.

342. Une équation du quatrième degré étant proposée à résoudre, on commencera par en faire évanouir le second terme, ce qui la changera en une autre de cette forme $x^4+px^2+qx+r=0$. Ensuite on regardera la transformée comme le produit de deux équations du second degré chacune, telles que $x^2+zx+y=0$, et $x^2-zx+s=0$. On suppose que z, y et s sont des indéterminées. D'ailleurs le second terme de ces deux équations est le même, aux signes près, afin que leur produit puisse donner une équation qui n'ait pas de second terme. Ce produit donne en effet

$$\begin{array}{l} x^4+sx^2+szx+sy=0 \\ \quad\;\; -z^2 \quad -yz \\ \quad\;\; +y. \end{array}$$

Or de cette équation comparée terme à terme avec..... $x^4+px^2+qx+r=0$, on tire $p=s-z^2+y\ldots q=(s-y)z\ldots r=sy$; ce quidonne 1°. $s+y=p+z^2\ldots$. 2°. $s-y=\frac{q}{z}$. Donc $s=\frac{p+z^2}{2}+\frac{q}{2z}\ldots\ldots y=\frac{p+zz}{2}-\frac{q}{2z}$; et parconséquent sy ou $r=\frac{(p+z^2)^2}{4}-\frac{q^2}{4z^2}$; d'où l'on tire $z^6+2pz^4+(p^2-4r)z^2-q^2=0$, équation du sixième degré, mais qui n'a d'autre difficulté que celle du troisième, en faisant $z^2=u$. On appelle cette équation *la Réduite*,

et ses racines étant une fois trouvées, on ne tarde pas à connaître celle de la proposée $x^4 + px^2 +$ etc.

Effectivement, si dans les équations $x^2 + zx + y = 0$, et $x^2 - zx + s = 0$, on substitue pour s et y leurs valeurs en z, et qu'ensuite on résolve ces équations, on aura pour la première, $x = -\frac{1}{2}z \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2z}\right)}$, et pour la seconde, $x = \frac{1}{2}z \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2z}\right)}$. Réunissant donc ces deux formules, on aura $x = \pm\frac{1}{2}z \pm \left(-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2z}\right)$, d'où l'on tire les quatre valeurs cherchées de x, dans lesquelles il n'y a plus qu'à substituer la valeur de z que donne la réduite. Ces quatre valeurs sont

$$x = \frac{1}{2}z + \sqrt{\left(-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2z}\right)}$$
$$x = \frac{1}{2}z - \sqrt{\left(-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2z}\right)}$$
$$x = -\frac{1}{2}z + \sqrt{\left(-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2z}\right)}$$
$$x = -\frac{1}{2}z - \sqrt{\left(-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2z}\right)}.$$

D'où il suit, en général, que les racines d'une équation du quatrième degré sont toutes quatre réelles ou toutes quatre imaginaires, ou que deux étant réelles, les deux autres sont imaginaires. Il ne peut jamais y avoir un nombre impair ni des unes ni des autres (331).

343. Soit, pour abréger, $a = \frac{1}{2}z \ldots b = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2z}\right)}$ $\ldots c = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2z}\right)}$, et nous aurons $x = a + b \ldots$ $x = a - b \ldots x = -a + c$, $x = -a - c$; ou bien, en transposant, $x - a - b = 0$, $x - a + b = 0$, $x + a - c = 0$, $x + a + c = 0$. Multipliant ces quatre facteurs les uns par les autres, nous trouverons

$$\begin{array}{llll} x^4 & - 2a^2x^2 & + 2ac^2x & + a^4 = 0. \\ & - b^2 & - 2ab^2 & - a^2b^2 \\ & - c^2 & & - a^2c^2 \\ & & & + b^2c^2 \end{array}$$

équation qu'il est aisé de comparer avec $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, et qui donne $p = -2a^2 - b^2 - c^2 \ldots\ldots q = 2ac^2 - 2ab^2 \ldots\ldots$ $r = a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2$. Substituant ces valeurs de p, q, r dans la réduite $z^6 +$ etc., elle deviendra

$$\begin{array}{llll} z^6 & - 4a^2z^4 & + 8a^2b^2z^2 & + 8a^2b^2c^2 = 0 \\ & - 2b^2 & + 8a^2c^2 & - 4a^2b^4 \\ & - 2c^2 & + b^4 & - 4a^2c^4 \\ & & - 2b^2c^2 & \\ & & + c^4 & \end{array}$$

Or les trois facteurs de cette dernière équation sont $z^2 - 4a^2 \ldots$ $z^2 - b^2 - 2bc - c^2 \ldots z^2 - b^2 + 2bc - c^2$. D'où il suit,

1°. Que la réduite considérée comme une équation du troisième degré n'a qu'une racine réelle, toutes les fois que l'une des deux quantités b et c est imaginaire, ou, ce qui revient au même, toutes les fois que l'équation $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ a deux racines réelles et deux imaginaires. On peut donc avoir dans ce cas la solution exacte de la réduite, et parconséquent celle de la proposée.

344. 2°. Que si b et c sont toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires, c'est-à-dire, si la proposée $x^4 + px^2 +$ etc. a ses racines ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, alors la réduite considérée encore comme du troisième degré, est dans le cas irréductible; elle a ses trois racines réelles. Et si ces trois racines sont toutes positives, l'équation proposée a ses quatre racines réelles. Car alors $2a$, $b + c$, $b - c$ sont des quantités reelles. Soit donc la première $= M$, la seconde N, et la troisième P, on aura $2b = N + P$, et $2c = N - P$. Donc $2a + 2b = M + N + P$ $\ldots\ldots 2a - 2b = M - N - P \ldots - 2a + 2c = N - P - M \ldots\ldots$ $- 2a - 2c = P - N - M$, et puisque $2a + 2b$, $2a - 2b$, $-2a + 2c$, $-2a - 2c$ sont les quatre valeurs de $2x$, il est clair que les quatre valeurs de x sont toutes réelles dans ce cas.

Mais si la réduite n'a qu'une de ses racines positives, toutes celles de la proposée sont imaginaires. Supposons en effet que $z^2 - 4a^2$ soit la seule racine positive de la réduite, nous aurons $2a = M$, quantité positive, $b + c = N\sqrt{(-1)}$, et $b - c = P\sqrt{(-1)}$; d'où $b = \frac{1}{2}P\sqrt{(-1)} + \frac{1}{2}N\sqrt{(-1)}$, et $c = \frac{1}{2}N\sqrt{(-1)} - \frac{1}{2}P\sqrt{(-1)}$. Donc, puisque b et c entrent dans les quatre valeurs de x, ces quatre valeurs doivent être imaginaires.

Si l'une des deux autres racines de la réduite eût été supposée positive, $2a$ eût été imaginaire, et parconséquent les quatre valeurs de x qui renferment toutes la quantité a eussent encore été imaginaires. La résolution des équations du quatrième degré a donc alors le même inconvénient que la résolution des équations du troisième degré dans le cas irréductible.

Pour faire quelqu'application de ces principes, cherchons les racines de l'équation $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$. On a $p = -3$, $q = -42$, $r = -40$, ce qui change la réduite en $z^6 - 6z^4 + 169z^2 - 1764 = 0$. Or cette équation traitée à la manière de celle du troisième degré, en faisant $z^2 = u + 2$ devient $u^3 + 157u - 1442 = 0$, et comme celle-ci n'a qu'une racine réelle, j'en conclus que la proposée en a deux, et que les deux autres sont imaginaires. Pour les trouver, je résous d'abord l'équation $u^3 + 157u - 1442 = 0$, et j'ai $u = 7$. Donc $\pm\sqrt{(u+2)}$, ou $z = \pm 3$.

En substituant l'une de ces deux valeurs dans la formule générale $x = \pm\frac{1}{2}z \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2z}\right)}$, je trouve les quatre valeurs suivantes, $x = 4$, $x = -1$, $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-31)}$. Ce sont les

quatre racines cherchées. La méthode des diviseurs aurait donné le même résultat.

S'il fallait trouver les racines de $x^4+3x^2+2x-5=0$, je ferais d'abord $p=3$; $q=2$, $r=-5$, et la réduite z^6+2pz^4+ etc. se changerait en $z^6+6z^4+29z^2-4=0$. Je ferais ensuite $z^2=u-2$, ce qui transformerait la réduite en $u^3+17u-46=0$, équation qui n'ayant qu'une racine réelle, m'apprendrait que la proposée en a deux, et que les deux autres sont imaginaires. Je les chercherais donc en résolvant cette équation $u^3+17u-46=0$, par la formule générale du troisième degré. Cette formule donne..... $u=\sqrt[3]{(23+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{4799}{3}})}+\sqrt[3]{(23-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{4799}{3}})}$. Donc $\pm\sqrt{(u-2)}$, ou $z=\pm\sqrt{[-2+\sqrt[3]{(23+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{4799}{3}}}+\sqrt[3]{(23-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{4799}{3}})}]}$. Et substituant cette valeur de z dans la formule générale

$$x=\pm\tfrac{1}{2}z\pm\sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}z^2-\tfrac{1}{2}p\mp\frac{q}{2z}\right)},$$

je trouve pour les quatre racines de la proposée

$$x=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\{-2+\sqrt[3]{(23+\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}})}+\sqrt[3]{(23-\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}})}\}}$$
$$\pm\sqrt{\left\{-1-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{(23+\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}})}-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{(23-\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}})}\right.}$$
$$\frac{\mp 1}{\sqrt{[-2+\sqrt[3]{(23+\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}})}+\sqrt[3]{(23-\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{4799}{3}})}]}\}},$$

expression fort compliquée, dans laquelle pourtant les deux racines imaginaires se connaissent facilement. Il ne faut, pour les avoir, que prendre le signe — dans la quantité $\dfrac{\mp 1}{\sqrt{[-2+\sqrt[3]{(23+\text{etc.})}]}}$.

345. Remarquez que si les quatre racines d'une équation du quatrième degré étaient réelles, on les trouverait sans peine toutes les fois que la réduite aurait un nombre entier pour l'une de ses racines. Il n'y aurait alors qu'à se servir de la méthode qui nous a fait trouver les trois racines réelles d'une équation du troisième degré dans le cas irréductible, lorsque l'une de ces racines était un nombre entier.

Exemple. On demande les quatre racines réelles de l'équation $x^4-25x^2+60x-36=0$. En comparant terme à terme les coefficiens de cette équation à ceux de l'équation générale x^4+px^2 etc. on a $p=-25$, $q=60$, $r=-36$, ce qui change la réduite en $z^6-50z^4+769z^2-3600=0$. Je fais $z^2=\dfrac{u+50}{3}$, et non $z^2=u+\dfrac{50}{3}$, afin d'éviter les fractions. J'ai $u^3-579u-1150=0$. Je résous cette transformée (338). Ses racines sont $u=25$, $u=-2$, $u=-23$. Donc $\pm\sqrt{\left(\dfrac{u+50}{3}\right)}$ ou $z=\pm 5$, ou bien ± 4, ou

encore ± 3. Et si je substitue l'une quelconque de ces valeurs de z dans la formule $x = \pm \frac{1}{2} z \pm \sqrt{(-\frac{1}{4} z^2 - \frac{1}{2} p \mp \frac{q}{2z})}$, je trouverai également les quatre valeurs suivantes, $x = 3$, $x = 2$, $x = 1$, $x = -6$.

On a six différentes valeurs de z, et la raison en est bien simple. C'est qu'une équation du quatrième degré pouvant être regardée comme le produit des quatre facteurs, $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$, elle est divisible par six facteurs du second degré. Voici ces facteurs:

$$(x+a)(x+b), (x+a)(x+c), (x+a)(x+d),$$
$$(x+b)(x+c), (x+b)(x+d), (x+c)(x+d);$$

et comme ils ont chacun un second terme dont le coefficient est généralement représenté par z, il est clair que z doit avoir six différentes valeurs. Voilà pourquoi l'équation en z est du sixième degré.

Mais parceque la proposée manque de second terme, il faut bien que si une des valeurs de z est exprimée par g, une autre le soit par $-g$. Donc $z^2 - g^2$ doit être un des facteurs de la réduite. Donc si les quatre autres valeurs de z sont exprimées par $h, -h, i, -i$, la réduite doit avoir, $z^2 - h^2$, et $z^2 - i^2$ au nombre de ses facteurs. Non-seulement donc elle doit être du sixième degré; mais encore elle doit avoir toutes ses puissances paires, comme elle les a en effet.

Autre exemple. On voudrait avoir les quatre racines de l'équation $x^4 - 20x^2 - 12x + 13 = 0$ qui donne $p = -20$, $q = -12$, $r = 13$, et pour réduite, $z^6 - 40z^4 + 348z^2 - 144 = 0$. Soit donc $z^2 = \frac{u+40}{3}$ la transformée sera $u^3 - 1668u - 6608 = 0$, dont les racines sont $u = -4$, $u = 2 \pm 6\sqrt{46}$. Substituant ces valeurs de u dans l'équation $z = \pm\sqrt{\left(\frac{u+40}{3}\right)}$, on aura $z = \pm 2\sqrt{3}$, $z = \pm\sqrt{(14 \pm 2\sqrt{46})}$ et substituant celle des valeurs de z que l'on voudra, la première, par exemple, dans la formule $x = \pm \frac{1}{2} z \pm$ etc. on trouvera $x = \sqrt{3} + \sqrt{(7+\sqrt{3})}$, $x = \sqrt{3} - \sqrt{(7+\sqrt{3}}$, $x = -\sqrt{3} + \sqrt{(7-\sqrt{3})}$, $x = -\sqrt{3} - \sqrt{(7-\sqrt{3})}$.

Des Équations plus élevées que celles du quatrième degré.

346. Après avoir résolu les équations du troisième et du quatrième degré, il nous resterait à indiquer les moyens de résoudre celles des degrés plus élevés. Mais les méthodes générales ne s'étendent pas si loin; ce qui, joint aux exceptions nombreuses du cas irréductible, fait presque désespérer de la perfection de cette théorie. Voici cependant deux méthodes qui peuvent être de quelque utilité.

La première sert à trouver les équations plus simples dont une équa-

tion composée est le produit. Si une équation du sixième degré, par exemple, est le produit de deux équations du troisième, cette méthode apprendra à trouver ces deux équations. On appelle *réductibles* toutes les équations qui peuvent être ainsi décomposées en d'autres équations plus simples. Celles qui échappent à cette décomposition s'appellent *irréductibles*. Quand on en trouve, il faut avoir recours à la seconde méthode, qui apprend à trouver des racines approchées. Les analystes l'ont retournée de bien des façons, et il faut avouer que leurs travaux sur les approximations ont eu beaucoup de succès.

347. PREMIÈRE MÉTHODE. Pour savoir si une équation proposée $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \text{etc.}\ldots + \omega = 0$ peut être divisée sans reste par une équation du degré n, on supposera que la proposée est le produit de ces deux équations, $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \text{etc.}\ldots + T = 0$, et $x^{m-n} + px^{m-n-1} + qx^{m-n-2} + \text{etc.}\ldots + t = 0$ dont tous les coefficiens sont indéterminés. On prendra ensuite le produit de ces deux équations qui en donneront une du degré m dont on comparera les termes avec ceux de la proposée, afin d'avoir les équations nécessaires pour déterminer les coefficiens A, B, C, etc. p, q, r, etc. Enfin on réduira toutes ces équations à une seule qui ne renferme plus que l'une quelconque des indéterminées A, B, C, etc. ou p, q, r, etc. Il ne s'agira plus alors que de chercher les diviseurs commensurables de cette équation (elle doit en avoir, puisque tous ces coefficiens sont des nombres entiers ; et on aura la valeur des coefficiens ; ce qui rendra déterminées les équations qui les renferment.

APPLICATIONS. On demande si l'équation

$$x^4 + x^3 + 2x - x + 15 = 0$$

ne pourrait pas se décomposer en deux autres, chacune du second degré ?

Je suppose que cette équation est le produit de deux équations indéterminées $x^2 + px + q = 0$, $x^2 + mx + n = 0$, que je multiplie l'une par l'autre. Le produit est...

$$\begin{array}{llllll} x^4 & + px^3 & + \quad qx^2 & + mqx & + nq = 0 \\ & + m & + mp & + np & \\ & & + \quad n & & \end{array}$$

Je le compare à la proposée, et j'ai $p + m = 1$, $q + mp + n = 2$, $mq + np = -1$, $nq = 15$. Or ces quatre équations réduites à une seule dont q soit l'inconnue, donnent

$$q^6 - 2q^5 - 16q^4 + 44q^3 - 240q^2 - 450q + 3375 = 0.$$

Les diviseurs commensurables de cette équation sont $q-3$ et $q-5$. Donc q peut être supposé égal à 3 ou à 5, et par conséquent $n = 5$ ou 3.... $p = -2$ ou $+3$.... $m = 3$ ou -2. Les deux facteurs cherchés sont donc $x^2 - 2x + 3 = 0$, et $x^2 + 3x + 5 = 0$.

On demande aussi si l'équation $x^6 - 7x^4 + 8x^3 + 2x + 1 = 0$ peut se décomposer en deux facteurs du second degré ?

Supposons, pour le savoir, que cette équation est le produit de

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$, par $x^3 + fx^2 + mx + n = 0$. Il est clair que le second terme devant manquer dans ce produit, f doit être $= -p$. Il est clair aussi que le produit de n par r devant être $= 1$, on a $n = \pm 1$, et $r = \pm 1$. Servons-nous d'abord de leur valeur positive, et substituons-la dans les facteurs indéterminés $x^3 + px^2$ etc. ils deviendront $x^3 + px^2 + qx + 1 = 0$, et $x^3 - px^2 + mx + 1 = 0$. Leur produit sera

$$\begin{array}{llllll} x^6 + & qx^4 + & 2x^3 + & mqx^2 + & mx + & 1 = 0; \\ -pp & -pq & & & +q & \\ +m & +mp & & & & \end{array}$$

lequel étant comparé à la proposée, donne $q + m = pp - 7 \ldots$ $2 - pq + mp = 8 \ldots$ $mq = 0 \ldots$ $m + q = 2$. Egalant les deux valeurs de $q + m$ tirées de la première et de la dernière équation, nous aurons $pp = 9$, d'où $p = \pm 3$; et parconséquent $m = 1 \pm 1 \ldots$ $q = 1 \mp 1$. C'est-à-dire, que si $p = +3$, on a $m = 2$ et $q = 0$: si $p = -3$, on aura $m = 0$ et $q = 2$. Les deux facteurs cherchés sont donc $x^3 + 3x^2 + 1 = 0$, et $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ dans les deux cas.

Prenons maintenant la valeur -1 de n et de r, et substituons-la dans les facteurs indéterminés $x^3 + px^2 +$ etc. Leur produit alors sera $x^6 + (q - pp + m)\, x^4 + (pm - pq - 2)\, x^3 + mqx^2 - x(m + q) + 1 = 0$. D'où $q + m = pp - 7$, $p(m - q) = 10$, $mq = 0$, $m + q = -2$; et parconséquent $pp - 7 = -2$, ou $p = \pm\sqrt{5}$. D'ailleurs $mq = 0$ et $m + q = -2$; donc $q = 0$; ou $q = -2$ et $m = -2$ ou 0. Mais comme ces valeurs substituées dans la seconde équation $p(m - q) = 10$ donnent $2\sqrt{5} = 10$, ce qui est absurde, il faut en conclure que l'équation proposée n'est divisible par aucune équation du troisième degré dont le dernier terme soit -1.

248. Seconde méthode. Quand on a épuisé les moyens qui tendent directement à trouver les racines exactes, on a recours à ceux qui en donnent d'approchées. Celui qui suit nous a paru un des meilleurs. Pour le faire mieux comprendre, nous l'appliquerons à un exemple.

Soit $x^3 - 4x - 2 = 0$, équation qui est dans le cas irréductible (339), et dont on demande les racines approchées.

Je commence par supposer successivement $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, etc. La première de ces suppositions réduit la proposée au dernier terme -2 qui ne peut être égal à zéro. x doit donc être une quantité réelle. La seconde supposition donne pour résultat -5; celui de la troisième est encore -2: ces valeurs de x ne sont donc pas assez grandes. Je suppose $x = 3$, l'équation devient $+13 = 0$; d'où je conclus que la valeur de x est entre 2 et 3. Cela posé,

J'appelle d la fraction qu'il faut ajouter à 2 pour avoir une valeur approchée de x; j'ai donc $x = 2 + d$, et faisant $a = 2 \ldots\ldots$ $x = a + d$. Je substitue cette dernière valeur dans l'équation...

$x^3 - 4x - 2 = 0$. Elle devient en transposant.....
$d^3 + 3ad^2 + (3a^2 - 4)\,d = 4a + 2 - a^3$, et en négligeant d^3 qui est une fort petite quantité, il reste $3ad^2 + (3a^2 - 4)\,d = 4a + 2 - a^3$.
Cette équation résolue donne $d = \frac{4 - 3a^2 + \sqrt{(16 + 24a + 24a^2 - 3a^4)}}{6a}$.

Donc $a + d$ ou $x = \frac{3a^2 + 4 + \sqrt{(16 + 24a + 24a^2 - 3a^4)}}{6a}$, et puisqu'ici $a = 2$, j'ai $x = \frac{4 + \sqrt{7}}{3} = 2{,}21$.

S'il fallait une valeur approchée, je prendrais 2,21 pour a, et pour les nouvelles décimales la quantité d, ensorte que $x = a + d$ serait l'expression algébrique de $x = 2{,}21 +$ les décimales que je cherche. Cette expression, je la substituerais dans la proposée, et je retrouverais la même équation que ci-dessus, en négligeant d^3 que l'on peut négliger avec moins d'inconvénient qu'auparavant. J'aurais donc la même formule pour la valeur de x, dans laquelle substituant 2,21 au lieu de a, le résultat serait $x = 2{,}21432$, valeur plus exacte que la première.

S'il fallait encore une plus grande exactitude, on se la procurerait en prenant pour a la valeur 2,21432, et pour d les nouvelles décimales cherchées; après quoi on déterminerait d par la formule, ce qui donnerait pour x une valeur beaucoup plus approchée que les deux autres.

349. Quand on a une des racines de l'équation proposée, il faut diviser l'équation par la racine déjà trouvée. Cette division faite avec d'autant plus d'exactitude que la valeur de x sera plus approchée, abaissera l'équation d'un degré; et si on a le temps et la patience de traiter l'équation abaissée comme la proposée, et ainsi de suite, on parviendra enfin à connaître par approximation toutes les valeurs de x.

Prenons pour second exemple l'équation

$$x^4 + 2x^3 - 36x^2 + 5x - 116 = 0,$$

qui échappe à la résolution de celles du quatrième degré, et cherchons-en une racine approchée.

En donnant successivement à x les valeurs que l'on voit ici, l'équation se réduit aux quantités qui sont vis-à-vis. Les six premières font voir clairement que x doit être au-dessus de 5. La dernière indique que x est moins que 6. Sa vraie valeur est donc entre 5 et 6. Pour la trouver, je suppose $x = 5 + d = a + d$, et je substitue cette valeur dans la proposée. Cette substitution donne, en rejetant les termes affectés de

$$x \left\{ \begin{array}{ll} \textit{Suppos.} & \textit{Résult.} \\ = 0 \ldots\ldots & -116 \\ = 1 \ldots\ldots & -144 \\ = 2 \ldots\ldots & -218 \\ = 3 \ldots\ldots & -290 \\ = 4 \ldots\ldots & -288 \\ = 5 \ldots\ldots & -116 \\ = 6 \ldots\ldots & +346 \end{array} \right\} = x^4 + \text{etc.}$$

d^3 et de d^4, $(6a^2+6a-36)\,d^2+(4a^3+6a^2-72a+5)\,d = 36a^2-5a-2a^3-a^4+116$. Je résous cette équation, et j'ai

$$d=\frac{36a-3a^2-2a^3-\frac{5}{2}+\sqrt{(-2a^6-6a^5+105a^4+52a^3+681a^2+696a-\frac{1667}{4})}}{6a^2+6a-36}$$

Il ne reste plus qu'à mettre 5 au lieu de a dans cette valeur de d, pour avoir $x=5,337$. Si l'on veut une racine plus approchée, il n'y a qu'à substituer 5,337 à la place de a dans la même formule de d. Le résultat du calcul sera $x=5,335438$, valeur beaucoup plus exacte que la première. Elle le deviendrait encore davantage en répétant le même procédé.

On trouverait les racines négatives en substituant $0, -1, -2$, etc. au lieu de x. Les résultats feront connaître par le changement de signe entre quels nombres négatifs est la valeur cherchée, et on en approcherait ensuite autant qu'on le jugerait à propos.

Mais lorsqu'après les substitutions des nombres positifs et négatifs compris entre zéro et le dernier terme de l'équation, on ne trouve aucun changement de signe, il faut bien en conclure que les racines sont égales deux à deux, ou quatre à quatre, etc., ou bien qu'elles sont toutes imaginaires, ou enfin qu'elles sont en partie égales deux à deux et en partie imaginaires.

On voit bien en effet que si les racines sont égales deux à deux, quatre à quatre, etc. comme dans ces équations, $(x-a)^2(x-b)^2=0$, $(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^4=0$, etc., les résultats doivent toujours être positifs quelque valeur que l'on prenne pour x. On voit bien aussi que, si toutes les racines sont imaginaires, les signes ne doivent jamais changer; puisque s'ils changeaient, la valeur de x se trouvant alors entre deux nombres réels, ne serait plus imaginaire. On voit enfin que si les racines sont en partie égales et en partie imaginaires, on ne peut s'attendre à aucun changement de signe. Reste donc à faire voir comment on trouve les racines égales.

Pour avoir les racines égales d'une équation, on multipliera chacun de ses termes par l'exposant qu'a l'inconnue dans ce terme, et on diminuera cet exposant d'une unité. Cela donnera une autre équation, dont le plus grand commun diviseur, avec la préposée, contiendra les racines égales que l'on cherche, élevées seulement à une puissance moindre d'une unité. En voici la démonstration dans un cas.

Lorsque toutes les racines d'une équation sont égales, on peut représenter cette équation par

$$x^m+max^{m-1}+\frac{m.m-1}{2}a^2x^{m-2}\ldots+a^m=0;$$

et si on multiplie chaque terme de la formule par l'exposant de x dans ce terme, on a (en remarquant que dans le dernier l'exposant de x est 0) cette nouvelle équation,

$$mx^m+(m.m-1)ax^{m-1}+\left(\frac{m.m-1.m-2}{2}\right)a^2x^{m-2}+\text{etc.}=0:$$

laquelle étant divisée par mx, donne

$$x^{m-1}+(m-1)\,ax^{m-2}+\left(\frac{m-1\,.\,m-2}{2}\right)a^2x^{m-3}+\text{etc.}=0.$$

Or cette expression est le développement du binome $(x+a)^{m-1}=0$, et le plus grand diviseur commun de ce binome et de l'équation proposée, $(x+a)^m=0$ est évidemment $(x+a)^{m-1}$. La méthode est donc démontrée pour le cas où toutes les racines sont égales entre elles.

Si elles ne l'étaient que deux à deux comme dans l'équation $(x+a)^m(x+b)^n=0$, on multiplierait l'un par l'autre les deux binomes développés; ce qui donnerait une nouvelle équation dont les termes étant multipliés chacun par l'exposant respectif de x, produiraient $m(x+a)^{m-1}(x+b)^n+n(x+b)^{n-1}(x+a)^m=0$. Or le plus grand commun diviseur de cette dernière équation et de la proposée est $(x+a)^{m-1}(x+b)^{n-1}$.

Application. I°. Trouver les racines égales de l'équation

$$x^4-4x^3-2x^2+12x+9=0.$$

Je multiplie chaque terme par l'exposant de x, j'ai

$$4x^4-12x^3-4x^2+12x=0.$$

Divisant par $4x$, il vient

$$x^3-3x^2-x+3=0.$$

Je cherche le plus grand commun diviseur de cette dernière équation et de la proposée. Je trouve que c'est x^2-2x-3, produit de $x-3$ par $x+1$. Les racines égales de la proposée sont donc $(x-3)^2$ et $(x+1)^2$.

II°. Trouver les racines égales de $x^5-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4=0$. Multipliez par les exposans respectifs et divisez ensuite par $6x$, vous aurez $x^5-4x^3-2x^2+3x+2=0$, dont le plus grand commun diviseur avec la proposée sera $x^4+x^3-3x^2-5x-2$, ou $(x+1)^3(x-2$. Vous conclurez de là que $(x+1)^4$ et $(x-2)^3$ sont les racines cherchées.

Des Problêmes indéterminés du premier degré.

350. Lorsque dans un problême le nombre des inconnues surpasse d'une unité celui des conditions, on l'appelle *indéterminé*. Si le nombre des inconnues surpasse de plusieurs unités celui des conditions, le problême est plus qu'indéterminé.

Or, dans les problêmes indéterminés, on ne peut jamais avoir pour résultat qu'une équation à deux inconnues; ensorte que pour fixer la valeur d'une de ces inconnues, il faut supposer une valeur arbitraire

pour l'autre inconnue, et voir ensuite si ces deux valeurs satisfont au probleme.

Soit proposé, par exemple, de trouver trois nombres x, y, z, dont la somme soit 105, et qui aient entre eux une même différence.

Les conditions de ce problême s'expriment par ces deux équations $x+y+z=105$... et $x-y=y-z$. Prenant dans la seconde, la valeur de x qui est $2y-z$, et substituant dans la première équation, on trouvera $y=35$, et parconséquent $x+35+z=105$, ce qui donne $x+z=70$, équation d'où on ne peut faire évanouir ni x ni z.

Il faut donc supposer une valeur à l'une de ces deux inconnues, à x, par exemple, pour avoir la valeur de l'autre. Soit $x=10$, on aura $z=60$, et les trois nombres 10, 35, 60 pourront satisfaire à la question. Et si on fait $x=12$, on aura $z=58$, et les trois nombres 12, 35 et 58 y satisferont aussi.

On voit même que ce problême peut avoir 69 solutions en nombres entiers et positifs, parcequ'on peut supposer x égal successivement à tous les nombres depuis 1 jusqu'à 69, mais non au-delà, parceque la somme des deux inconnues $x+z$ est 70. Il peut cependant avoir une infinité d'autres solutions, en prenant pour x des valeurs fractionnaires.

351. Quoique la solution de ces sortes de problêmes soit plus curieuse qu'utile, il est bon cependant de connaître un peu plus en détail la manière de les résoudre en nombres entiers et positifs.

Soit l'équation $ax=by+c$, à laquelle tout problème indéterminé du premier degré peut etre réduit, et dans laquelle a, b, c expriment des nombres entiers et connus. On mettra d'abord cette équation sous cette forme $x=\frac{by+c}{a}$; et puisque x doit être un nombre entier, $\frac{by+c}{a}$ doit l'être aussi. Mais au lieu d'écrire tout au long ces mots, *nombre entier*, nous les désignerons par la lettre E. On aura donc $\frac{by+c}{a}=\mathrm{E}$.

Si l'on pouvait maintenant transformer cette expression en une autre où y n'eut que l'unité pour coefficient, et qui étant, par exemple, de cette forme, $\frac{y+d}{a}$ fût encore un nombre entier, différent à la vérité de celui que l'on avait d'abord, mais également désigné par E, on aurait $\frac{y+d}{a}=\mathrm{E}$, d'où on tirerait $y=a\mathrm{E}-d$.

Prenant alors pour E telle quantité numérique que l'on voudrait, pourvu qu'elle fut entiére et positive, à commencer même par zéro lorsque $-d$ est un nombre positif, on aurait differentes valeurs de y, que l'on substituerait dans l'équation du probleme, et chaque substitution donnerait une valeur correspondante pour x. Quelques exemples vont rendre cette methode fort intelligible.

Je suppose donc que l'on cherche toutes les valeurs entières et positives de x et de y dans l'équation $3x = 4y + 5$. Je fais d'abord $x = \frac{4y+5}{3} = y + 1 + \frac{y+2}{3}$ (en divisant par 3). Mais cette valeur de x doit être un nombre entier. Donc $y + 1 + \frac{y+2}{3} = E$; et puisque y doit être aussi un nombre entier, il faut bien que $\frac{y+2}{3}$ le soit de même. J'aurai donc $\frac{y+2}{3} = E$; d'où $y = 3E - 2$.

Cela posé, je fais $E = 1$ (et non pas 0, afin d'éviter la valeur négative -2 pour y). J'ai donc $y = 1$. Donc $x = 3$. Je fais ensuite $E = 2$, donc $y = 4$, ce qui donne $x = 7$. Faisant $E = 3$, je trouve $y = 7$, d'où la valeur correspondante de x est 11.

Je dispose ainsi ces valeurs, et je remarque qu'elles sont en progression arithmétique.

$$\begin{cases} y = 1 \ldots 4 \ldots 7 \ldots \text{etc.} \\ x = 3 \ldots 7 \ldots 11 \ldots \text{etc.} \end{cases}$$

La différence de la première progression est 3, coefficient de x. Celle de la seconde est 4, coefficient de y. Rien donc n'est plus aisé que de trouver la suite de ces valeurs, et de voir que ce problème a une infinité de solutions.

352. Au reste, ce n'est point par hasard que l'on trouve ces progressions arithmétiques. En y réfléchissant un peu, on verra bien que c'est une suite nécessaire de la méthode. Mais ces progressions ne sont pas toujours infinies, au contraire, elles sont limitées toutes les fois que chaque membre de l'équation ayant une inconnue, ces inconnues sont affectées d'un signe contraire.

Exemple. On demande, en nombres entiers, toutes les valeurs positives de x et de y dans l'équation $9x = 2000 - 13y$.

On a d'abord $x = \frac{2000 - 13y}{9} = E$, ensuite, $\frac{2 - 4y}{9} = E$, en divisant par 9, ou ce qui est plus simple, en supprimant tous les 9 (30). Mais si $\frac{2-4y}{9}$ est un nombre entier, le double de cette quantité doit être aussi un nombre entier. Ce double est $\frac{4-8y}{9}$; donc en ajoutant un autre nombre entier, telle que $\frac{9y}{9}$, et en réduisant, on aura $\frac{y+4}{9} = E$; d'où l'on tire $y = 9E - 4$. Pour avoir maintenant toutes les valeurs de y, à commencer par la plus petite, je suppose $E = 1$; donc $y = 5$: si $E = 2$, $y = 14$; si $E = 3$, $y = 23$, etc. etc.

Substituant ces valeurs dans l'équation $x = \frac{2000 - 13y}{9}$, je trouve 1°. $x = 215$; 2°. $x = 202$; 3°. $x = 189$, etc. etc., et disposant ainsi toutes ces quantités,

$$\begin{array}{l} y = 5 \ldots 14 \ldots 23 \ldots 32 \ldots \text{etc.} \ldots 149 \\ x = 215 \ldots 202 \ldots 189 \ldots 176 \ldots \text{etc.} \ldots 7 \end{array}$$

Je

Je ne tarde pas à reconnaître que les différences de ces deux progressions sont les coefficiens réciproques des deux inconnues, et que parconséquent celui de y étant négatif, toutes les valeurs de x se trouveront en soustrayant 13 de la valeur précédente. Or ces soustractions réitérées doivent enfin épuiser le nombre des valeurs positives, et on voit bien dans cet exemple, qu'il n'est pas possible d'en trouver au-dessous de 7.

Bien loin donc que les deux progressions soient infinies, on trouvera tout de suite le nombre de leurs termes, en divisant la plus grande valeur de x par le coefficient de y, et en ajoutant une unité au quotient. Ainsi $\frac{215}{13} = 16$ (avec un reste 7 qui est la plus petite valeur de x). Il y a donc 17 valeurs de ces inconnues qui satisfont au problême.

Cela est général pour toutes les équations semblables, dont les coefficiens sont des nombres premiers entre eux. (On appelle ainsi les nombres qui n'ont d'autre diviseur commun que l'unité). Et comme toutes les autres équations peuvent être ramenées à cette forme, en les divisant par le plus grand commun diviseur de ces coefficiens, il est clair que la méthode est générale.

Ces détails suffisent pour l'intelligence des deux exemples suivans.

I. Un marchand doit 1200#, et au défaut d'argent, il offre deux sortes de marchandises en payement. La première vaut 7# l'aune, la seconde 5#. Trouver de combien de manières il peut acquitter sa dette.

Soit x le nombre d'aunes de la première marchandise, et y celui des aunes de la seconde. On aura $7x + 5y = 1200$#; d'où $x = \frac{1200 - 5y}{7}$; d'où encore $\frac{3 - 5y}{7} = E$; et parconséquent $\frac{12 - 20y}{7} = E$; donc $\frac{5 - 6y}{7} = E$; donc $\frac{7y}{7} + \frac{5 - 6y}{7}$, ou $\frac{y+5}{7} = E$; donc enfin $y = 7E - 5$. Soit $E = 1$, on aura $y = 2$ d'où l'on tirera $x = 170$. Soit $E = 2$, on aura $y = 9$, et $x = 165$. Le reste va de suite. Les deux progressions ont 34 termes chacune; il y a donc 34 manières différentes de faire la somme de 1200# avec des effets dont les uns valent 7# et les autres 5.

II. Un laboureur a donné des agneaux en échange pour des brebis. Il estimait 4# chaque agneau, 9# chaque brebis, et il a donné 15# en sus. Trouver de combien de façons il a pu varier son marché.

x, nombre des agneaux; y celui des brebis. Donc $4x + 15\# = 9y$. Donc $x = \frac{9y - 15}{4}$; donc $\frac{y - 3}{4} = E$; donc $y = 4E + 3$; et si $E = 0$, $y = 3$. C'est le moins qu'il ait pu prendre de brebis, auquel cas il a dû livrer 3 agneaux. Si $E = 1$, $y = 7$, et $x = 12$. La marche des deux progressions est manifeste; et puisqu'elles vont toutes deux en croissant, on peut varier à l'infini les solutions de ce petit problême.

353. Quand ces sortes de questions renferment quelque absurdité, on la découvre bientôt par le résultat du calcul. L'équation $6x = 6y + 7$ peut servir d'exemple.

354 La méthode prescrite pour la solution des problêmes indéterminés du premier degré, est fondée sur cet unique principe, que des nombres entiers, ajoutés ou soustraits, ou multipliés par d'autres nombres entiers, doivent toujours donner des entiers pour résultat. Or ce principe est évident.

Appliquons cette méthode à la résolution de quelques autres problêmes. Trouver un nombre x qui étant divisé par des nombres connus a, b, c, etc., donne pour restes d'autres nombres connus aussi m, n, p, etc.

Il est clair, d'après cet exposé, que $\frac{x-m}{a}$ est un entier, ainsi que $\frac{x-n}{b}$, etc. On a donc $x = aE + m$ (191), et substituant cette valeur dans la seconde quantité, on aura $\frac{aE+m-n}{b} = E'$. (On prononce E prime, et par cette lettre on entend ici un nombre entier en général, comme par la lettre E). Cherchant ensuite la valeur de E par la méthode qui a fait trouver ci-dessus la valeur de y, on la substituera dans l'équation $x = aE + m$; et cette nouvelle expression de la valeur de x étant une fois mise dans la troisième quantité $\frac{x-p}{c}$, on trouvera encore un nombre entier, que nous désignerons par E″ (E seconde). Le premier membre de cette équation contiendra E′, qu'il faudra déterminer comme ci-dessus, et l'on aura enfin la valeur de x en nombres connus et en E″, ou en E‴ (E tierce), ou etc., selon le nombre des diviseurs. On prendra alors pour le dernier E telle quantité entière que l'on voudra, et bientôt on aura déterminé les valeurs qui peuvent satisfaire aux conditions du problême.

Exemples. Quels sont les nombres qui étant divisés par 5 et par 7 donnent 4 et 2 pour restes?

On a $\frac{x-4}{5} = E$, et $\frac{x-2}{7} = E'$. Donc $x = 5E + 4$; donc $\frac{5E+2}{7} = E'$; donc $\frac{15E+6}{7} = E'$; et soustrayant $\frac{14E}{7}$, on aura $E = 7E' - 6$. Si on suppose $E' = 1$, on aura aussi $E = 1$: donc $x = 9$; et c'est le plus petit des nombres cherchés.

Pour avoir les autres, on supposera $E' = 2$, ce qui donnera $x = 44$. Si $E' = 3$, $x = 79$; et ainsi de suite, ajoutant à chaque valeur précédente le produit 35 des deux diviseurs 5 et 7; car puisque 35 est divisible sans reste par 5 et 7, il est clair que $35 + 9$ ou 44, que $70 + 9$ ou 79, etc. donneront les mêmes restes que le plus petit nombre 9.

Un avare a dans son coffre-fort plusieurs sacs de 1200# chacun. En les comptant un jour trois à trois, il n'en trouva aucun de reste. Il les compta un autre jour sept à sept, et il n'en resta qu'un. Les comptant une autre fois dix par dix, il en trouva six de reste. Ne

pourrait-on pas deviner combien il en avait, sachant d'ailleurs qu'il en avait plus de cent, mais moins de trois cents?

Soit x le nombre de ces sacs. E, E′, E″ désigneront à l'ordinaire des entiers, et l'on aura $\frac{x}{3}=E\ldots\frac{x-1}{7}=E'\ldots\frac{x-6}{10}=E''$. La première expression donne $x=3E$. La seconde, $\frac{3E-1}{7}=E'$: donc $\frac{15E-5}{7}$ sera un entier, et soustrayant $\frac{14E}{7}$ de ce dernier nombre, le reste en sera un aussi. On aura donc $E=7E'+5$. D'où $x=21E'+15$.

Substituant cette valeur dans la troisième expression, il viendra $\frac{21E'+9}{10}=E''$. D'où $E'=10E''-9$. Si on fait $E''=1$, on aura $x=36$; et ce sera le plus petit des nombres qui, divisés par 3, par 7, et par 10, auront pour restes 0, 1, et 6. Pour trouver le second nombre, on supposera $E''=2$, d'où $x=246$. Si $E''=3$, $x=456$. Donc le nombre de sacs est 246.

355. Remarquez que la suite des nombres 36, 246, 456, etc. se forme en ajoutant au nombre qui précède, le produit 210 des trois diviseurs 3, 7, 10, et cela aura lieu toutes les fois que les diviseurs seront des nombres premiers entre eux. S'ils ne l'étaient pas, la progression formée par l'addition de leur produit, ne contiendrait à la vérité que des nombres propres à satisfaire au problème; mais elle ne les contiendrait pas tous.

356. C'est par une application de cette méthode, que l'on peut résoudre plusieurs problèmes relatifs au calendrier. Soit proposé, par exemple, de trouver dans quelle année de l'ère chrétienne on a eu 17 de Cycle solaire, 6 de Cycle lunaire, et 5 d'Indiction.

On sait que le Cycle solaire, autrement dit, le Cycle des lettres Dominicales, est une révolution périodique de 28 ans; que le Cycle lunaire, plus connu sous le nom du Nombre d'Or, est une révolution de 19 ans, et que l'Indiction romaine recommence tous les 15 ans.

Cela posé, appelant x l'année que l'on demande, on aura

$$1^\circ.\ \frac{x-17}{28}=E\ldots.2^\circ.\ \frac{x-6}{19}=E'\ldots.3^\circ.\ \frac{x-5}{15}=E''.$$

La première équation donne $x=28E+17$, et substituant cette valeur de x dans la seconde équation, on a $\frac{28E+11}{19}=E'$; d'où l'on tire, après les opérations convenables, $E=19E'+22$, et parconséquent $x=532E'+633$.

Substituant cette nouvelle valeur de x dans la troisième équation, on trouve $\frac{532E'+628}{15}=E''$; ce qui donne $E'=15E''+11$, et parconséquent $x=7980E''+6485$.

Soit maintenant $E''=0$, on aura $x=6485$. Si on suppose $E''=1$, on aura $x=14465$, et ainsi de suite. Mais comme ces années ap-

partiennent à la période Julienne, dont le commencement précède de 4713 ans celui de l'ère chretienne, il faut soustraire 4713 de ces différentes époques, pour les réduire aux années de notre ère, qui satisfont aux trois conditions du problême.

Soustraction faite sur la première époque, qui est 6485, on trouve 1772 pour reste. Ainsi depuis le commencement de l'ère chrétienne, et même depuis le commencement du monde, tel que la Chronologie ordinaire le fixe, il n'y a eu que l'année 1772 de notre ère qui ait réuni tout-à-la-fois 17 de Cycle solaire, 6 de Nombre d'Or, et 5 d'Indiction.

En soustrayant pareillement 4713 de la seconde époque, 14465, on trouve que l'année 9752 de notre ère sera la seule qui dans l'intervalle de 1772 à 9752, satisfera aux mêmes conditions. Les autres années qui y satisferaient de même, ne se suivraient que tous les 9780 ans, dont est formée la période *Julienne*, ainsi appelée de Joseph-Jules Scaliger, qui l'imagina le premier. Cette période résulte du produit des trois Cycles 28, 19, et 15. Elle est préférable à la période *Dyonisienne*, qui n'est que de 532 ans (produit de 28 par 19), en ce qu'elle embrasse un bien plus grand nombre d'événemens dans sa durée.

357. Ceux qui desireront de connaître plus en détail la théorie des problêmes indéterminés, trouveront de quoi se satisfaire dans le second volume des Elémens d'Algèbre de M. Euler. Nous terminerons ceux-ci par les énoncés de quelques problêmes, dont on trouvera les résultats à la fin du livre, sous la lettre H''.

I. Deux couriers sont partis au même instant, l'un de Paris pour Fontainebleau, l'autre de Fontainebleau pour Paris. Leurs vîtesses sont dans le rapport de 3 à 4; on demande où ils se rencontreront, la distance des deux points de départ étant supposée de 14 lieues. Généraliser le problême.

II. Un lièvre a déjà fait un nombre n de pas, lorsqu'un lévrier se met à sa poursuite. Les pas du lévrier sont plus grands que ceux du lièvre dans le rapport de $p : q$; mais aussi le lièvre fait $m + a$ de pas, pendant que le lévrier n'en fait qu'un nombre m. Trouver une formule qui fasse connaître si le lévrier atteindra le lièvre, et au cas qu'il l'atteigne, à quelle distance il l'atteindra.

III. B a dépensé le tiers de son argent, et sa dépense est telle que la cinquième puissance de l'argent dépensé est au cube de l'argent qui lui reste :: 9 : 8. C au contraire a gagné une somme dont le cube est au quarré de celle qu'il avait d'abord :: 3 : 16. Trouver ce qu'ils avaient, et ce qui leur reste.

IV. Une personne à qui on demandait quelle heure il était, répondit qu'il était entre 5 et 6 heures, et que l'aiguille des minutes se trouvait exactement sur celle des heures. Quelle heure était-il donc?

V. Trois causes C, C', C'' agissant séparément, ont produit les trois effets E, E', E'' dans des temps T, T', T''. Quel temps leur faudra-t-il, agissant tous trois ensemble, pour produire l'effet E'''?

VI. Etant donnés les prix a et b de deux quantités, pour en former un mélange dont le prix moyen soit m, quelles parties x et y doit-on prendre de ces quantités?

VII. Démontrer la règle de double fausse position, autrement que dans le n° 268.

VIII. La somme de 6000# placée à intérêt pendant 15 ans 4 mois, a produit 18000#, y compris les intérêts des intérêts. A quel denier cette somme a-t-elle été placée ?

IX. Calculer par la méthode des coefficiens indéterminés, les premiers termes de la série qui provient de $\frac{a^2 - x^2}{a + bx - x^2}$.

X. Trouver par la méthode inverse des séries la valeur de y, en supposant que l'on a $x = \frac{1.3}{2.4}y + \frac{5.7}{6.8}y^2 + \frac{9.11}{10.12}y^3 +$ etc.

XI. Résoudre généralement les problêmes sur la population, n° 309.

XII. On a divisé le nombre 37 en deux parties, dont la plus grande multipliée par le quarré de la plus petite, donne 800. Quelles sont ces parties ?

XIII. Connaissant la somme de deux nombres, et le quotient q du moindre de ces nombres divisé par la racine cube du plus grand, déterminer ces nombres.

XIV. Soit un nombre composé de trois chiffres, tels 1°. qu'en les multipliant les uns par les autres, leur produit soit 54; 2°. que le chiffre du milieu ne soit que la sixième partie de la somme des deux autres; 3°. qu'en soustrayant 594 de ce nombre, le reste soit composé des mêmes chiffres que ce nombre, mais dans un ordre inverse. On demande quels sont ces trois chiffres.

XV. Étant donnée l'équation $x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 3 = 0$, déterminer ses racines par la méthode des diviseurs.

XVI. Le gouverneur d'une place assiégée voulant obtenir au plus tôt du secours de son général, lui écrit que la garnison est réduite à autant de centaines d'hommes qu'il y a d'unités dans la racine positive de l'équation $x^4 - x^3 - 44x^2 + 49x - 245 = 0$. L'homme chargé de ce billet est arrêté par les ennemis : on le fouille, on trouve l'avis donné au général, et on n'y comprend rien. Si vous eussiez été dans le camp des assiégeans, quel parti auriez-vous tiré de ce billet.

XVII. Un voiturier, chargé du transport d'un baril plein de vin, en a d'abord tiré 12 bouteilles, qu'il a remplacées par 12 bouteilles d'eau. Puis il a tiré 12 autres bouteilles de ce baril qu'il a remplacées par 12 bouteilles d'eau; et il a fait deux autres fois la même manœuvre. Arrivé à sa destination, il est soupçonné d'avoir mis de l'eau dans le baril : on décompose ce mélange, et il n'en résulte que 50 bouteilles de vin pur. Le voiturier offre de payer ce qu'il a soustrait : mais on ne sait comment l'évaluer, le baril n'existant plus. Si on s'était adressé à vous pour cette évaluation, comment en seriez-vous venu à bout ?

XVIII. Extraire la racine quarrée des quantités suivantes,

1°. $14 + 6\sqrt{5}$... 2°. $28 + \sqrt{187}$... 3°. $39 + 2\sqrt{5}$... 4°. $10\sqrt{-1}$.

XIX. Extraire la racine cube de $22 + 10\sqrt{7}$, et de $-24 - 40\sqrt{-2}$.

XX. Trouver par approximation les racines de l'équation

$$x^3 - 17x^2 + 54x - 350 = 0.$$

XXI. Etant donnée l'équation $x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 15x + \frac{1}{2} = 0$, trouver la valeur de x approchée jusqu'au cinquième rang des décimales.

XXII. Par la règle de double fausse position calculer la valeur de l'inconnue y dans l'équation *exponentielle*, $y^y = 2000$.

XXIII. Avec des écus de 6 francs et des écus de $3^{\#}$, de combien de manières pourrait-on faire la somme de $264^{\#}$?

XXIV. On desirerait avoir un nombre qui pût être exactement divisé par 7, et qui étant divisé par 2, 3, 4, 5 et 6 donnât 1 pour reste.

XXV. Résoudre par la méthode des problèmes indéterminés, le troisième cas de la règle d'alliage (page 117).

XXVI. Un aubergiste a fait payer $20^{\#}$ pour la dépense de quelques voyageurs, à raison de 4 francs par maître, de 40^{s} par domestique, et de 30^{s} par cheval. Combien y avait-il de maîtres, de domestiques et de chevaux?

XXVII. Avec des pièces de 24^{s}, de 12^{s} et de 6^{s}, est-il possible de faire un payement de $19^{\#}$? Et au cas que cela soit possible, de combien de manières cela l'est-il?

XXVIII. On a acheté une bibliothèque composée de 1000 volumes, dont les *in-folio* ont été évalués à $6^{\#}$ chacun; les *in-quarto* à $3^{\#}$, et les *in*-12 à 30^{s}. Elle a coûté $2190^{\#}$. Combien y avait-il de volumes de chaque format?

XXIX. En quel année le Pape Grégoire XIII réforma-t-il le Calendrier? Pour vous aider à en rappeler la date, on vous dit seulement que cette année-là avait 6 pour Nombre d'or, et 23 pour Cycle solaire.

XXX. Il parut une Comète singulièrement remarquable dans une certaine année, qui avait pour Nombre d'or 9, pour Cycle solaire 9, et 3 pour Indiction. Quelle était cette année-là?

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

358. La Géométrie tire son nom du principal usage auquel il semble qu'elle fut employée dans l'origine. Le partage des biens exigeait une science qui apprît à connaître avec précision leur étendue; cette science fut appelée *Géométrie*, c'est-à-dire, mesure de la terre.

Elle resta bornée à ce premier usage, jusqu'à la brillante époque ou Archimède et plusieurs autres géomètres grecs lui donnèrent tant d'éclat. Mais elle ne mérita vraiment le nom de science, qu'après avoir été réduite en corps de doctrine par Euclide, qui rassembla les principales découvertes géométriques faites avant lui.

Il joignit les siennes à celles des géomètres qui l'avaient précédé, et toujours aussi rigoureux dans ses démonstrations, que méthodique dans sa marche, il vint à bout de fixer et de répandre les notions jusques-là fort vagues de la Géométrie. Son ouvrage consacré depuis deux mille ans par l'estime générale des siècles éclairés, est un des plus précieux monumens échappés aux injures du temps.

Euclide y considère l'étendue dans son berceau, pour ainsi dire, et procédant toujours du plus simple au plus composé, il s'élève par une gradation bien soutenue, depuis le point jusqu'aux solides. Nous suivrons à-peu-près la même gradation; mais en nous rapprochant de la méthode que les géomètres modernes ont adoptée. Si elle n'est pas aussi rigoureuse, elle a d'autres avantages qui nous la font préférer.

Au reste, quoiqu'il n'y ait point d'étendue sans longueur, largeur et profondeur, on peut cependant considérer ces trois dimensions, les unes sans les autres.

C'est ainsi, par exemple, que l'on parle de la longueur d'une toise, sans songer à sa largeur; et que l'on parle de la grandeur d'un étang, sans faire mention de la profondeur de ses eaux.

Cette abstraction simplifiant les recherches de la Géométrie élémentaire, presque tous les auteurs qui ont écrit depuis un siècle sur cette matière, s'en sont servis pour diviser leurs ouvrages en trois parties. Dans la première, ils enseignent ce qui a rapport à la seule dimension de longueur, savoir les propriétés des lignes, la mesure des angles qu'elles forment, et la description des figures qui en résultent. Dans la seconde, ils considèrent tout-à-la-fois la longueur et la largeur, et ils enseignent à mesurer les surfaces. Dans la dernière partie ils supposent les trois dimensions réunies, et ils cherchent à déterminer la surface et la solidité des corps. Nous suivrons le même plan.

PREMIÈRE PARTIE.

DES ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

FIG. 1. 359. D'UN point A quelconque on peut aller à un autre point B, par une infinité de chemins différens: mais on voit bien qu'il doit y en avoir un plus court que tous les autres; et celui-là, quel qu'il soit, s'appelle la *ligne droite*.

360. Donc 1°. la vraie mesure de la distance d'un point à un autre point, est toujours la ligne droite qui les joint. Telle est la ligne AB.

Donc 2°. on ne peut mener qu'une seule ligne droite d'un point à un autre, et parconséquent deux points suffisent pour déterminer la position d'une ligne droite quelconque. Toutes les autres que l'on voudrait mener par les mêmes points, se confondraient avec la première.

Donc 3°. deux lignes droites ne peuvent se couper qu'en un seul point: elles ne peuvent jamais avoir deux points communs.

361. Lorsqu'une ligne droite en rencontre une autre, FIG. 1. il en résulte une ligne brisée. Tellessont les lignes ADB et AFB, qui aboutissent aux mêmes points A et B, que la droite AB. Or cette droite est plus courte que toute autre ligne qui se termine aux mêmes points : donc une ligne droite quelconque, menée entre deux points donnés, est plus courte que toutes les lignes brisées, menées entre les mêmes points.

Donc aussi celles-là sont les plus longues parmi les lignes brisées, qui s'éloignent le plus de la ligne droite; et on sent bien qu'il peut y en avoir une infinité.

On peut en décrire de même une infinité d'autres qui changeant, pour ainsi dire, de direction à chaque point, comme les lignes ACB, AMB, aboutissent pourtant aux mêmes points A et B. On les appelle des *lignes courbes*, et elles sont diversifiées à l'infini. Mais il en est une plus connue et plus facile à décrire que les autres; c'est la courbe circulaire.

362. Soit la droite AC mobile autour du point A. Il 2. est clair que si elle fait une révolution entière, son extrémité C décrira une courbe fermée CEBDC. L'espace terminé par cette courbe se nomme *cercle*. La courbe qui le termine s'appelle la *circonférence*. (Il ne faut pas confondre ces deux choses).

Le point A est le *centre* du cercle. Toute ligne droite menée du centre à un des points de la circonférence, se nomme *rayon*; et tout rayon prolongé en ligne droite au-delà du centre jusqu'à la circonférence, se nomme *diamètre*. Ainsi AB est un rayon; BD est un diamètre.

363. Il suit de la description du cercle, 1°. que tous ses rayons sont égaux; 2°. que tous ses diamètres le sont aussi; 3°. que chaque diamètre divise le cercle et la circonférence en deux parties égales.

Une portion quelconque CEB de circonférence se nomme *arc de cercle*. L'espace ACEBA renfermé entre l'arc CEB et les deux rayons CA, AB, se nomme *secteur*. L'espace CEBC compris entre le même arc CEB et la droite CB se nomme *segment*; enfin la droite CB se nomme *la corde de l'arc* CEB.

364. Concluons, 1°. que dans un même cercle le

FIG. 2. diamètre est toujours plus grand qu'une corde quelconque. Car si on mène AC, par exemple, on aura la ligne brisée CAB plus grande que CB : or CAB = DB ; donc DB > CB.

Concluons, 2°. que dans un même cercle, les arcs égaux ont des cordes égales et réciproquement.

3°. Que les plus grands arcs sont soutendus par les plus grandes cordes, et que les plus petits arcs sont soutendus par les plus petites cordes ; ce qui est réciproque.

Vous observerez seulement que lorsqu'on parle de l'arc soutendu par une corde, on entend toujours le plus petit arc qui est terminé par cette corde. Ainsi la corde CB soutend l'arc CEB et non l'arc CDB.

Si les géomètres divisent la circonférence du cercle en 360 parties égales qu'ils nomment degrés, et s'ils soudivisent ensuite chaque degré en 60 minutes, chaque minute en 60 secondes, etc., c'est que ces divisions leur ont paru plus commodes à cause du grand nombre de diviseurs exacts de 360 et de 60.

365. Il suit de là que les degrés et les minutes d'un cercle ne sont pas des quantités absolues comme un pied, une toise, etc. Leur grandeur varie dans le même rapport que celle des circonférences auxquelles ils appartiennent, puisqu'ils en sont des parties semblables.

Des Angles.

3. 366. Si deux lignes droites AC, CD se rencontrent, elles forment l'angle ACD, qui a son sommet au point de rencontre C, et dont les lignes AC, CD sont les côtés. (Quand on désigne un angle par trois lettres, on place au second rang celle qui est à son sommet. Si on ne le désigne que par une seule lettre, c'est toujours par celle qui est au sommet).

Décrivons du centre C et d'un rayon quelconque CK l'arc KL ; nous aurons une mesure bien naturelle de l'angle ACD ; puisque si l'on conçoit que cet angle augmente en devenant AC*d*, ou diminue en devenant ACI, l'arc KL augmentera ou diminuera dans le même rapport. On peut donc dire que la mesure d'un angle

qui a son sommet au centre d'un cercle quelconque est l'arc compris entre ses côtés. FIG. 3.

Au reste, quoique l'on puisse décrire du centre C avec des rayons inégaux, une infinité d'arcs de cercle compris entre les mêmes côtés CA, DC, tous ces arcs n'en ont pas moins le même nombre de degrés parcequ'ils sont tous des parties semblables de leurs circonférences. C'est pourquoi, en disant quel'angle ACD a pour mesure l'arc KL, on entend toujours le nombre de degrés de l'arc KL, et non la longueur absolue de cet arc.

367. Donc la grandeur d'un angle est tout-à-fait indépendante de la longueur de ses côtés.

On distingue trois sortes d'angles, l'angle aigu, l'angle droit, et l'angle obtus. Tout angle qui a pour mesure moins de 90°, est un angle aigu. Tel est entre autres l'angle BC*d*. Tout angle qui a pour mesure 90°, ou le quart de la circonférence, est un angle droit. Tel est l'angle ACI. Enfin tout angle qui est mesuré par un arc de plus de 90°, est un angle obtus. Ainsi l'angle ACD est un angle obtus.

368. On nomme *complément* d'un angle ou d'un arc, ce qui manque à cet angle ou à cet arc pour qu'il soit de 90°. Ainsi le complément d'un arc de 57° 31′ est de 32° 29′.

On nomme *supplément* d'un angle ou d'un arc ce qu'il faut ajouter à cet angle ou à cet arc pour avoir 180°. Un angle aigu de 35°, par exemple, a pour supplément un angle obtus de 145°, et réciproquement.

369. Il suit de là que deux angles sont égaux, quand ils ont un même supplément.

Donc les angles ACD, BCF opposés au sommet sont égaux : car ils ont un même supplément DCB.

370. Il suit aussi qu'une droite DC qui tombe sur une autre AB, forme avec elle deux angles ACD et DCB, dont la somme est toujours de 180°. On peut donc dire que les deux angles formés par la rencontre de deux lignes, équivalent toujours à deux angles droits.

Et parconséquent la somme des quatre angles ACD, DCB, BCF, et FCA équivaut à quatre angles droits ; ou ce qui revient au même, les angles formés par

FIG. l'intersection de deux lignes, ont pour mesure 360°.

4. En général, si tant de droites ACB, DCI, ECH, que l'on voudra, viennent se couper en nombre quelconque au point C, la somme des angles ACD + DCE + etc. qu'elles feront toutes ensemble d'un seul côté de AB, sera de 180°, et la somme des angles qu'elles feront tant en dessus qu'en dessous de AB, sera de 360°.

Des Lignes perpendiculaires.

5. 371. On appelle *lignes perpendiculaires* celles qui par leur rencontre forment des angles droits. Ainsi AB est perpendiculaire à DF, si l'angle ACD, par exemple, est de 90°.

Si on décrit du centre C et du rayon CD la circonférence DEFGD, l'arc DE sera de 90°, ainsi que l'arc EF. Donc leurs cordes ED, EF seront égales (364). Donc le point E sera à égale distance de D et de F, comme le point C. Ainsi la ligne AB aura deux de ses points également éloignés chacun de D et de F. Tous ses autres points seront donc autant éloignés du point D que du point F.

Car prenez un point quelconque A sur cette perpendiculaire, et menez les obliques AF, AD; si la droite AC restant immobile, vous couchez la figure ACF sur la figure ACD, il est évident qu'à cause de l'égalité des angles ACF, ACD, et de l'égalité des droites CF, CD, le point F tombera sur le point D. Donc (360) AF=AD; de plus, tout point pris hors de la perpendiculaire ne peut être à égale distance des points F et A; car supposez un point quelconque O pris sur le prolongement de FA, vous aurez OD < OAD; mais OAD = OAF; donc OD < OAF.

Réciproquement si les deux points A et E sont chacun également éloignés de D et de F, cette ligne AB sera perpendiculaire à DF; car deux points qui sont à égale distance de D et de F, appartiennent nécessairement à la perpendiculaire élevée sur le milieu de DF; et puisque par deux points on ne peut mener qu'une ligne droite, il s'ensuit que AB est perpendiculaire sur DF.

Enfin si AB est perpendiculaire à DF, et si d'ail-

leurs son point A est également éloigné des points D et F, tous les autres points de la ligne AB auront la même propriété que le point A; sans quoi cette ligne ne serait plus perpendiculaire à la ligne DF. Un seul point suffit donc pour déterminer la position d'une perpendiculaire, quand on a déjà la ligne sur laquelle on veut la mener. FIG. 5.

372. Il est évident que la ligne droite DF est plus courte que la ligne brisée DEF, et que parconséquent DC, moitié de DF est plus courte que DE, moitié de DEF, et à plus forte raison que toute autre oblique DA.

On doit donc regarder la perpendiculaire menée d'un point donné sur une ligne droite comme la vraie mesure de la distance de ce point à la ligne dont il s'agit.

373. D'après ce que nous venons de dire, il est facile de résoudre les problêmes suivans. 6.

I. Diviser la ligne donnée DC en deux parties égales.

Je décris des points D et C pris pour centres et du même rayon DG deux arcs de cercle qui se coupent aux points G et H, et par ces deux points d'intersection, je mène GFH, qui divisera la ligne DC en deux également au point F. Ce problême est d'un grand usage.

II. Mener d'un point donné G hors d'une droite AB une perpendiculaire GF sur cette ligne.

Je décris du centre G un arc DC qui coupe la ligne AB aux points D et C. Je divise ensuite DC en deux parties égales DF et FC, et par les points F et G, je mène FG qui sera la perpendiculaire demandée. Car deux de ses points, savoir F et G, sont chacun à égale distance des deux points D et C de la ligne AB. Donc (371) FG est perpendiculaire à AB.

374. Comme il n'y a qu'un seul point F qui soit le milieu de la ligne DC, et qu'on ne peut mener d'un point à un autre qu'une seule ligne droite, on en doit conclure que d'un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à cette droite.

III. Mener par un point donné F de la ligne AB une perpendiculaire à cette ligne.

Je prends d'abord DF = FC, ensuite des centres D et C et du même intervalle DG, je décris deux arcs qui

FIG. 6. se coupent en G, et ayant mené FG, je dis qu'elle sera la perpendiculaire cherchée. Car deux de ses points sont chacun à égale distance de D et de C.

Il est donc évident que d'un point pris sur une ligne, on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à cette ligne.

Si le point donné F était à l'extrémité de la ligne AB, on prolongerait cette ligne, et on éleverait la perpendiculaire, comme il vient d'être dit. Mais si on ne pouvait pas prolonger la ligne donnée, on se servirait d'une méthode que nous indiquerons bientôt.

Des Lignes perpendiculaires considérées dans le Cercle.

7. 375. Soit le rayon CM perpendiculaire à la corde FG; il est clair que le point C est également éloigné de F et de G, et parconséquent que tout autre point du rayon CM est également éloigné de F et de G; on a donc FD = DC, et FM = MG. L'arc FIM est donc égal à l'arc MLG, ou l'angle FCM = l'angle MCG; c'est-à-dire, que tout rayon ou diamètre perpendiculaire à une corde, coupe en deux parties égales cette corde et l'arc qu'elle soutend.

Réciproquement, si la corde FG est divisée en deux également par le rayon CM, ce rayon sera perpendiculaire à la corde FG, et divisera en deux également l'arc FMG ou l'angle FCG : en effet ce rayon a deux points C et D également éloignés de F et de G; donc il est perpendiculaire à FG, et parconséquent MF=MG.

Si la corde FG est divisée en deux également et perpendiculairement par la ligne DM, il n'est pas difficile de démontrer que cette ligne passe nécessairement par le centre C puisque le point D de la perpendiculaire DM étant à égale distance de F et de G, tous ses autres points doivent avoir la même propriété. Le centre C est dans ce cas; donc la perpendiculaire DM doit passer par le centre.

376. De là il suit que de ces trois choses, être perpendiculaire à une corde, la diviser en deux également,

passer par le centre, deux étant posées, la troisième suit nécessairement. FIG. 5.

Pour faire quelque application de ces principes, proposons-nous de diviser l'arc DMC en deux également. 6.

On mènera la corde DC, et on divisera cette corde en deux également et perpendiculairement par la ligne GM qui coupera l'arc DMC en deux parties égales au point M.

Donc s'il fallait diviser l'angle DGC en deux parties égales, on décrirait du sommet G comme centre, et d'un intervalle quelconque GD l'arc DMC. On diviserait ensuite cet arc en deux également au point M, et ayant mené MG, il est évident que cette ligne diviserait en deux également l'angle DGC.

Si on divise de la même manière l'angle DGM en deux parties égales, on aura le quart de l'angle DGC, ensuite le huitième, le seizième, etc. Il est donc facile de diviser par la Géométrie élémentaire un angle quelconque en 2, 4, 8, 16, 32, etc. parties égales. Mais lorsqu'il s'agit de diviser un angle en 2, 5, 7, 9, etc. parties égales, c'est un problême dont la difficulté ne peut être appréciée que par ceux qui sont déjà avancés dans l'étude de la Géométrie.

377. Soit proposé maintenant de faire passer une circonférence par trois points A, B, D qui ne soient pas en ligne droite. 8.

Ayant mené AB et BD, on divisera ces deux lignes en deux également et perpendiculairement par FL et GI, dont le point de concours C sera le centre du cercle cherché. Car on aura, par la construction, AC = CB, et CB = CD : donc AC = CD : et par-conséquent si du rayon BA on décrit la circonférence ABDA, elle passera par les trois points A, B, D.

378. De là il suit que trois points A, B, D qui ne sont pas en ligne droite, déterminent la position d'un cercle. Il est donc impossible que deux circonférences de cercle se coupent en plus de deux points. Car si elles se coupaient en trois, elles ne feraient plus qu'une seule et même circonférence.

Les trois points A, B, D ne peuvent jamais être

FIG. 8. supposés en ligne droite, parceque si l'on pouvait faire passer une circonférence par trois points en ligne droite, il serait possible de mener plusieurs perpendiculaires d'un même point sur une droite; ce qui est impossible (374).

Si l'on voulait trouver le centre d'une circonférence, ou d'un arc de cercle donné, on prendrait à volonté dans cette circonférence ou dans cet arc, trois points que l'on joindrait par deux cordes; et l'on diviserait ces cordes comme ci-dessus. Le centre cherché se trouvera toujours au point de concours des deux lignes de division.

Des Tangentes.

7. 379. Une droite MT qui n'a qu'un seul point M de commun avec la circonférence FMG, se nomme *Tangente*, et le point commun M se nomme *point de Contact*.

Menons du centre C au point de contact M le rayon CM; ce rayon sera plus court que toute autre ligne COK menée du centre C à quelque point de la ligne MT. Donc il mesurera la distance du centre C à la ligne MT. Donc (372) il sera perpendiculaire à cette ligne; donc tout rayon ou diamètre qui aboutit au point de contact, est perpendiculaire à la tangente qui se termine au même point.

Réciproquement, une droite quelconque MT perpendiculaire à l'extrémité M du rayon CM est tangente en ce point M : car MT étant perpendiculaire au rayon CM, tous les autres points de la droite MT sont plus éloignés du centre C que le point M. Donc ils sont tous hors du cercle, à l'exception du point M qui seul est commun à cette ligne et à la circonférence.

380. Il est donc facile de mener une tangente à un point quelconque M pris sur une circonférence donnée; car ayant mené le rayon CM, on est sûr que la perpendiculaire, à l'extrémité du rayon, est tangente au cercle.

D'ailleurs il est évident qu'une droite MT ne peut toucher qu'en un seul point M la circonférence donnée. Car si elle touchait cette circonférence en plusieurs points, on pourrait mener autant de perpendiculaires différentes

différentes du centre C sur la ligne MT, ce qui est 211.
impossible.

381. Si deux, ou un plus grand nombre de cercles se 9.
touchent en un point, soit en dehors, soit en dedans, la ligne qui passe par leur centre passe aussi par leur point de contact.

Car la même tangente TM est perpendiculaire aux rayons CM, AM. Donc ces rayons ne font qu'une seule ligne droite qui aboutit aux deux centres, et qui passe nécessairement par le point de contact. On a donc $CA = CM \pm AM$.

Des Lignes parallèles.

382. Deux lignes AB, CD sont parallèles lorsque leur 10.
distance est partout la même. Par exemple, si toutes les perpendiculaires EG, FH, etc. menées des points E, F, etc. de la ligne AB sur CD sont égales, les lignes AB, CD sont parallèles. Mais puisque deux points suffisent pour déterminer la position d'une droite, il suffit que deux de ces perpendiculaires soient égales, EG, par exemple, et FH, pour que la droite CD qui passe par les deux points G et H soit parallèle à AB.

De là il suit que deux lignes parallèles ne peuvent jamais se rencontrer à quelque distance qu'on les suppose prolongées.

383. Si une ligne quelconque NQ coupe deux parallèles AB, CD, les angles AFG, FGD formés par l'intersection de cette ligne et des parallèles, sont alternes-internes. (On les appelle *alternes*, parcequ'ils sont de différens côtés de la sécante : on les appelle *internes*, parcequ'ils sont en dedans des parallèles.) Or prenons les deux arcs indéfinis FLM, GKI décrits des centres G et F, et du même intervalle GF; et prolongeons les perpendiculaires EG, FH jusqu'à ce qu'elles rencontrent les arcs GKI, FLM, nous aurons $EG = FH$; dont $2EG = 2FH$, ou (376) $GI = FM$: mais les arcs FLM, GKI sont décrits du même rayon; donc, puisque leurs cordes sont égales, ils sont égaux, ainsi que leurs moitiés GK, FL. Donc l'angle AFG qui a pour

FIG. mesure GK, est égal à l'angle FGD, dont la mesure est
10. FL; donc toutes les fois qu'une droite quelconque coupe deux parallèles, les angles alternes-internes formés par cette intersection sont égaux.

384. D'où on peut conclure, 1°. que les angles correspondans NFB, NGD sont égaux, ainsi que NFA, NGC.

2°. Que les angles alternes-internes CGQ, NFB sont égaux.

Réciproquement, si les angles alternes-internes AFG, FGD sont égaux, les lignes AB, CD sont parallèles. On en trouvera aisément la démonstration.

Si les angles correspondans, ou les angles alternes-externes étaient égaux, les angles alternes-internes le seraient. Donc les lignes seraient encore parallèles.

385. Cela posé, il est facile de mener d'un point donné G la parallèle GD à la ligne AB.

On décrira du centre G et d'un intervalle quelconque GF un arc indéfini FLM, ensuite du point d'intersection F pris pour centre et du même intervalle FG, on décrira l'arc GK. On prendra FL = GK, et la ligne GL menée par les points G et L sera la parallèle demandée, puisque les angles alternes-internes AFG et FGD seront égaux.

11. De l'égalité des angles correspondans, il suit, 1°. que si deux angles BAC, NLM ont leurs côtés AB, LN et AC, LM parallèles, ces deux angles sont égaux. Car si l'on prolonge NL jusqu'à la rencontre D de la ligne AC, on aura NLM = NDC = BAC.

12. 2°. Que pour mener une perpendiculaire AF à l'extrémité A de la ligne AB (374), on peut mener d'abord la perpendiculaire CD sur la ligne AB, et mener ensuite sur le point A la ligne AF parallèle à DC. Elle sera la perpendiculaire demandée. Car FAB = DCB.

7. 386. 3°. Que deux parallèles FG, IL qui traversent un cercle, coupent sur sa circonférence deux arcs égaux FI, LG. Car si on mène le rayon CM perpendiculaire sur FG, il sera aussi perpendiculaire sur IL, à cause des angles correspondans CDF, CHI. Or (375) FIM = MLG, et IM = ML, donc FIM — IM = MLG — ML, ou FI = GL.

Il en serait de même si une de ces parallèles était tangente, ou si elles l'étaient toutes deux. Jusqu'ici nous n'avons considéré que deux parallèles; s'il y en avait un plus grand nombre, elles auraient les mêmes propriétés. 116. 7.

De la mesure des Angles.

387. Si tous les angles avaient leur sommet au centre d'un cercle, leur mesure serait toujours l'arc entier compris entre leurs côtés; mais on en recontre souvent dont le sommet est à la circonférence, et dont on a besoin de connaître la grandeur. Quelquefois aussi on en trouve qui ont leur sommet au dehors du cercle, ou au dedans, mais non au centre; il s'agit de déterminer leur mesure dans tous les cas.

388. Proposons-nous d'abord de mesurer l'angle BAD formé par la tangente AB et par la corde AD (On le nomme *angle du segment.*). 13.

Par le centre C, je mène le diamètre HCG parallèle à AD, et le rayon CF perpendiculaire sur AD; enfin le rayon CA au point A de contact. Cela posé, BAC sera un angle droit, ainsi que FCG. On aura donc FCG=BAC, dont la mesure est l'arc FAG: or l'angle ACG= l'angle DAC (383), dont la mesure est l'arc AG; donc BAC—DAC, ou BAD a pour mesure FAG—AG=FA=$\frac{1}{2}$ AFD; donc l'angle du segment BAD a pour mesure la moitié de l'arc soutendu par la corde AD.

389. Il suit de là que l'angle inscrit DAK compris entre deux cordes DA, AK a pour mesure la moitié de l'arc DK compris entre ses côtés. Car BAK a pour mesure $\frac{1}{2}$AK, et BAD a pour mesure $\frac{1}{2}$ AD. Donc BAK—BAD, ou DAK a pour mesure..... $\frac{1}{2}$AK—$\frac{1}{2}$ AD=$\frac{1}{2}$ DK.

Donc 1°. l'angle central DCK est double de l'angle inscrit DAK appuyé sur le même arc DK.

2°. Tout angle inscrit appuyé sur le diamètre, est un angle droit, et tous les angles inscrits appuyés sur le même arc dans le même cercle, sont égaux. 14 et 15.

Il est aisé, d'après cela, de mener d'un point donné

FIG. 16. A hors d'un cercle une tangente à la circonférence de ce cercle. En effet, si on mène du point A au centre C la droite CA, et si après avoir divisé cette droite en deux parties égales au point B, on décrit du rayon BC et du point B comme centre une circonférence, elle coupera le cercle donné aux points M et M′, de sorte que si par ces points et par le point A on mène les lignes MA, AM′, elles seront tangentes aux points M et M′.

Car si on mène CM, l'angle CMA sera droit. Donc la ligne MA est perpendiculaire à CM, et parconséquent tangente en M (380). On voit donc que ce problême a deux solutions, puisqu'il est toujours possible de mener du même point A hors d'une circonférence deux tangentes AM, AM′ à cette circonférence.

17. 390. Proposons-nous maintenant de mesurer l'angle excentrique BAD, dont le sommet A est au-dedans du cercle.

Je suppose d'abord que l'angle BAD est aigu, et ayant prolongé BA et AD jusqu'en G et en F, je mène GE parallèle à AD. Cela posé, on aura

$$BAD = BGE = \tfrac{1}{2}\,BE + \tfrac{1}{2}\,DE = \tfrac{1}{2}\,BD + \tfrac{1}{2}\,FG.$$

Si l'angle excentrique est obtus, comme BAF, on aura

$$BAF = 180^\circ - BAD = \tfrac{1}{2}\,BFGDB - \tfrac{1}{2}\,BD - \tfrac{1}{2}\,FG = \tfrac{1}{2}\,BF + \tfrac{1}{2}\,GD.$$

Donc l'angle excentrique a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc compris entre ces mêmes côtés prolongés.

18. 391. Soit l'angle circonscrit BAD, dont le sommet A est hors du cercle, et dont les deux côtés AB, AD aboutissent à deux points de la circonférence, on aura pour sa mesure la moitié de la différence des arcs convexe et concave interceptés par ses côtés; c'est-à-dire, que l'angle BAD aura pour mesure l'arc $\tfrac{1}{2}$ (BD — GI).

Car si on mène GE parallèle à AD, on aura

$$BAD = BGE = \tfrac{1}{2}\,BE = \tfrac{1}{2}\,BD - \tfrac{1}{2}\,ED = \tfrac{1}{2}\,BD - \tfrac{1}{2}\,GI.$$

Car ED = GI (386).

Si la sécante AB devient la tangente AF, on aura

$$FAB = \tfrac{1}{2}\,FB - \tfrac{1}{2}\,FG;$$

donc si AM est l'autre tangente menée du point A, on aura de même $FAM = \tfrac{1}{2}$ (FBM — FGM).

DES FIGURES.

392. On appelle *Figure* tout espace terminé de tous côtés par des lignes.

Si ces lignes sont droites, la figure qu'elles forment est *rectiligne*; si elles sont courbes, la figure se nomme *curviligne*. Elles sont dans les deux cas les côtés de la figure, et leur somme en est *le contour* ou *le périmètre*. L'ensemble forme ce que l'on appelle *un polygone*. FIG. 18.

Nous ne parlerons ici que des figures rectilignes. Or il est aisé de voir qu'il faut au moins trois lignes droites pour renfermer un espace. Ainsi le premier et le plus simple de tous les polygones est le triangle, ou une figure de trois angles et de trois côtés.

Après le triangle vient le quadrilatère, ou une figure de 4 côtés; ensuite le pentagone, de 5; l'hexagone, de 6; l'heptagone, de 7; l'octogone, de 8; le décagone, de 10; le dodécagone, de 12; le pentédécagone, de 15, etc. Nous insisterons principalement sur le triangle, parceque les autres polygones s'y rapportent facilement.

Du Triangle.

393. Un triangle dont les trois côtés sont égaux, se nomme *équilatéral*. S'il n'a que deux côtés égaux, il se nomme *isoscèle*. Enfin si tous ses côtés sont inégaux, il se nomme *scalène*.

Un triangle qui a un angle droit se nomme *rectangle*, et le côté opposé à l'angle droit se nomme *hypoténuse*.

Le côté opposé à un angle quelconque d'un triangle se nomme la *base* de cet angle.

Deux côtés quelconques d'un triangle font une ligne brisée. Leur somme est donc plus grande que le troisième côté.

Si on fait passer une circonférence par les sommets A, B, C des trois angles d'un triangle ABC, ce triangle se trouvera inscrit dans la circonférence ABC. Or (377) on peut faire passer une circonférence par trois points de cette espèce; il est donc toujours possible d'inscrire un triangle donné dans un cercle. 19.

394. Cela posé, l'angle ABC $= \frac{1}{2}$ AC (389), l'angle ACB a pour mesure $\frac{1}{2}$ AB, et l'angle BAC a pour mesure $\frac{1}{2}$ BC; donc ABC + ACB + BAC $= \frac{1}{2}$ CABC $= 180°$.

FIG. 19. Donc la somme des trois angles d'un triangle quelconque est égale à 180°.

395. De là on peut conclure 1°. que si on prolonge un côté quelconque AC, l'angle extérieur BAF est égal à la somme des deux angles intérieurs opposés ABC, ACB. Car la somme de ces deux angles + l'angle BAC = 180°; de même l'angle FAB + BAC = 180°; donc, etc.

396. 2°. Que l'un quelconque des angles d'un triangle est le supplément de la somme des autres, et que par-conséquent si on connaît deux angles d'un triangle, ou seulement leur somme, on aura le troisième, en ôtant cette somme de 180°.

3°. Qu'un triangle quelconque ne peut avoir qu'un seul angle droit ou qu'un seul angle obtus; auxquels cas les deux autres sont nécessairement aigus.

4°. Que dans un triangle rectangle, l'un des angles aigus est complément de l'autre; d'où il est facile de conclure la valeur de l'un, quand on connaît celle de l'autre.

5°. Que dans un triangle quelconque, les côtés opposés aux angles égaux sont égaux, et réciproquement. Car les cordes AC, BC soutendent des arcs égaux, et réciproquement.

6°. Que dans un triangle quelconque, le plus grand angle est opposé au plus grand côté, le plus petit angle au plus petit côté, et réciproquement. Il ne faut pas croire cependant que les cordes croissent dans le même rapport que les angles, ensorte qu'un angle double, par exemple, soit opposé à une corde double. Nous verrons dans la Trigonométrie le rapport de leurs accroissemens.

20. 7°. Que dans un triangle isoscèle, un seul des angles étant connu, les deux autres le sont immédiatement. Car si on connaît l'angle A ou son égal C, on aura l'angle B = 180° — 2A. Si on donne au contraire l'angle B, on aura A = C = 90° — $\frac{1}{2}$ B.

8°. Que les angles opposés aux côtés égaux dans les triangles isoscèles, sont toujours aigus.

9°. Que chaque angle d'un triangle équilatéral = 60°;

car ses angles sont tous égaux; leur somme = 180°. FIG. 20.
Donc chacun = 60°.

397. Si du sommet B d'un triangle isoscèle ABC, on abaisse la perpendiculaire BF sur la base AC, tous les points de cette perpendiculaire seront chacun à égale distance de A et de C, et parconséquent la base AC sera divisée en deux également au point F. Car AB = BC, à cause du triangle isoscèle ABC. Donc, etc. (376).

REMARQUE. Toutes les fois que les deux angles de la base d'un triangle sont aigus, la perpendiculaire abaissée de son sommet tombe en dedans du triangle; mais si l'un des deux est obtus, cette perpendiculaire tombe en dehors. *Voyez* les triangles ACB, FCB. La dé- 21.
monstration est aisée.

De la similitude et de l'égalité des Triangles.

398. Deux triangles sont semblables lorsque les angles 22 et 23.
de l'un sont respectivement égaux aux angles de l'autre. Si l'angle ABC, par exemple, est égal à l'angle *dbf*, et si en même temps BAC = *bdf*, et ACB = *dfb*, les triangles ABC, *dbf* sont semblables. La similitude des triangles n'entraîne donc pas leur égalité. Car pour que deux triangles soient égaux, il faut non-seulement que les angles de l'un soient respectivement égaux aux angles de l'autre; mais il faut de plus que chaque côté de l'un soit égal au côté correspondant de l'autre.

Si deux triangles sont semblables, les côtés opposés aux angles égaux se nomment *côtés homologues*. En général on appelle *dimensions homologues* de deux figures, les lignes de même dénomination dans l'une et dans l'autre, ou même des lignes tirées de la même manière dans l'une et dans l'autre. Par exemple, dans deux cercles, les rayons, les diamètres, les circonférences, les arcs d'un égal nombre de degrés, ainsi que leurs cordes, sont des dimensions homologues.

Cela posé, nous allons faire connaître les cas dans lesquels on peut conclure la similitude ou l'égalité de deux triangles.

399. I. Deux triangles qui ont deux angles respecti-

Fig. vement égaux sont semblables. Car le troisième est égal
22 de part et d'autre (396).
et
23. Donc si deux triangles rectangles ont chacun un angle aigu égal de part et d'autre, ces deux triangles seront semblables.

22. 400. II. Deux triangles sont semblables lorsque tous leurs côtés homologues sont parallèles. Car alors tous leurs angles sont respectivement égaux.

401. III. Deux triangles sont semblables lorsque tous les côtés de l'un sont perpendiculaires aux côtés homologues de l'autre, ou lorsqu'étant prolongés, ils se rencontrent à angles droits. Il suffit pour s'en convaincre, de faire faire un quart de révolution autour d'un point fixe à l'un de ces triangles; car alors ses côtés homologues seront tous parallèles à ceux de l'autre triangle.

402. IV. Si un nombre quelconque de parallèles DF, IL, AC coupent les côtés d'un angle ABC, tous les triangles BDF, BIL, BAC seront semblables. Car outre qu'ils ont l'angle B commun, tous les angles BDF, BIL, BAC sont égaux (384); il en est de même des angles BFD, BLI, BCA.

Si les deux triangles ABC, *bdf* sont semblables, et que l'on imagine le triangle *bdf* posé sur le triangle ABC, de manière que l'angle *b* tombe sur son égal B, et le côté *db* sur son homologue AB, le côté *df* représenté alors par DF sera parallèle à la base AC. Car le triangle BDF égal à *bdf* sera semblable au triangle ABC. Donc l'angle BDF = BAC. Donc les lignes DF et AC sont parallèles.

403. V. Si deux triangles ont un angle égal et les côtés qui comprennent cet angle égaux de part et d'autre, ils sont égaux et semblables.

En effet, si le triangle BDF qui a déjà l'angle B commun avec le triangle ABC, avait aussi les deux côtés BD, BF, égaux respectivement à AB, BC, il est évident que ces deux triangles se confondraient.

22 404. VI. Deux triangles ABC, *abc*, qui ont tous
et
24. leurs côtés homologues égaux, sont égaux et semblables.

Pour le prouver, imaginons le triangle *abc* posé sur ABC, de manière que le côté *ac* tombe sur AC, il est

 FIG.

clair que puisque AB = *ab*, et que BC = *bc*, le point *b* doit se trouver sur les deux arcs décrits, l'un du centre A et du rayon AB, l'autre du centre C et du rayon CB. Donc il se trouvera sur leur intersection B. Le triangle *abc* se confondra donc avec ABC, et lui sera parconséquent égal et semblable. 22 et 24.

405. VII. Si deux triangles *abc*, ABC ont deux côtés homologues égaux *ab*, AB, et BC, *bc* avec les angles A et *a* opposés à l'un de ces côtés égaux de part et d'autre, je dis que ces triangles seront égaux et semblables, pourvu que les angles C, *c* opposés aux autres cotés égaux AB, *ab* soient de même espèce ; c'est-à-dire, ou tous deux aigus, ou tous deux obtus.

Posons l'angle *bac* sur l'angle BAC, le point *b* tombera sur le point B, à cause de AB = *ab*, et le point *c* sur quelque point de AC, à cause de l'angle BAC = *bac*. Mais *bc* = BC ; donc le point *c* doit tomber aussi sur quelque point de l'arc CE décrit du centre B et du rayon BC. Donc il est ou en E, ou en C. Or le triangle BEC étant isoscèle, les triangles C, E sont aigus (396), et parconséquent l'angle AEB est obtus. Donc si les angles C et *c* sont tous deux aigus, le point *c* tombera sur le point C ; le triangle *abc* sera donc confondu avec ABC, et lui sera égal et semblable. Mais si les angles *c*, C, ou plutôt *e*, E sont obtus ; le point *e* tombera en E, et parconséquent le triangle *abe* sera confondu avec AEB et lui sera égal et semblable.

406. De ce que nous venons de dire sur l'égalité des triangles, il suit 1°. que deux obliques parallèles AB, CD comprises entre deux autres parallèles AD, BC sont égales. 25.

Car si l'on mène AF et DE perpendiculaires sur BC, le triangle ABF sera semblable au triangle CDE. Or par la nature des parallèles AF = DE. Donc le triangle ABF est égal au triangle CDE ; donc AB = CD : on prouverait de même que AD = BC.

407. 2°. Que tout triangle ABD peut être circonscrit à un cercle, c'est-à-dire, que l'on peut décrire au dedans de ce triangle une circonférence qui touche tous ses côtés. 26.

Il suffit pour cela de diviser deux de ses angles en deux parties égales, et de mener du point de concours des deux lignes de division, une perpendiculaire sur l'un des trois côtés, n'importe lequel. Cette perpendiculaire sera le rayon de la circonférence cherchée. Car les triangles ACE, ACG sont égaux. Donc CE = CG ; et CG = CH,

FIG. à cause de l'égalité des triangles BCG, BCH. Donc les
26. trois perpendiculaires CE, CG, CH peuvent être rayons d'un même cercle inscrit dans le triangle proposé.

408. On a aussi BG = BH, HD = ED, AE = AG, et appelant p le périmètre du triangle ABD, on aura

$$p = 2AE + 2ED + 2BH = 2AD + 2BH = 2BD + 2AE = 2AB + 2ED.$$

Donc $AE = \frac{AD + AB - BD}{2}$; le point E est donc déterminé. Les points G et H peuvent l'être de même. Il n'y aura donc qu'à faire passer une circonférence par ces trois points.

409. Si le triangle était rectangle en B, l'angle CBH moitié de ABD serait de 45°; son complément BCH serait donc aussi de 45°; et le triangle BCH serait isoscèle. Donc $CH = BH = \frac{1}{2}p - AD$. Donc le rayon du cercle inscrit dans un triangle rectangle est égal à la moitié de son périmètre moins l'hypoténuse.

Des autres Polygones et de leurs principales propriétés.

410. On distingue trois sortes de polygones, les irréguliers, les symmétriques, et les réguliers.

Les polygones irréguliers sont ceux qui ont des angles et des côtés inégaux. On appelle *polygones symmétriques* ceux dont tous les côtés opposés sont parallèles et égaux. Les polygones réguliers ont tous leurs côtés et tous les angles égaux.

27. Un quadrilatère symmétrique se nomme *parallélo-*
28. *gramme*. Un quadrilatère régulier s'appelle *quarré*. Un
29. quadrilatère qui a deux côtés parallèles se nomme *trapèze*.
30. Un parallélogramme dont tous les angles opposés sont égaux, mais qui n'a d'angles égaux que les angles opposés, se nomme *rhombe* ou *lozange*. Enfin un parallélogramme dont les côtés opposés sont égaux, et dont tous les angles
31. sont droits, se nomme *parallélogramme rectangle*, ou simplement *rectangle*.
32. Une ligne quelconque AD qui traverse un polygone en passant d'un angle à un autre, se nomme *diagonale*.

On appelle *angle saillant* celui dont le sommet sort de la figure, comme ABC, et on nomme *angle rentrant*
33. celui dont le sommet est au-dedans de la figure. Tel est l'angle CDE.

411. Supposons maintenant qu'un polygone n'ait pas

d'angle rentrant, et cherchons quelle est la somme de ses angles intérieurs ABC, BCD, CDE, etc. FIG. 32.

De l'un quelconque A des angles de ce polygone, on peut mener les diagonales AC, AD, AE qui divisent le polygone en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux. Or il est évident que la somme de tous les angles de ces triangles est égale à celle des angles intérieurs du polygone; donc la somme des angles d'un polygone est égale à 180° multipliés par le nombre de ses côtés, moins deux; ensorte que si on appelle s la somme des angles du polygone, et n le nombre de ses côtés, on aura $s = 180° (n - 2)$.

Donc 1°. la somme des angles d'un quadrilatère quelconque $= 360°$; la somme des angles d'un pentagone $= 540°$, etc.

2°. L'un quelconque des angles d'un polygone régulier $= 180 \left(1 - \frac{2}{n}\right)$. Car alors tous les angles intérieurs sont égaux. Donc leur somme est égale au produit de l'un quelconque de ces angles par leur nombre : par-conséquent l'un de ces angles, ou $\frac{s}{n} = = 180 \left(1 - \frac{2}{n}\right)$. On voit donc que les angles d'un polygone régulier sont d'autant plus obtus, ou approchent d'autant plus de 180°, que ce polygone a de côtés.

De là il suit que chaque angle du triangle équilatéral $= 60°$; que chaque angle du quarré $= 90°$; que celui du pentagone régulier $= 108°$; que celui de l'hexagone régulier $= 120°$; que celui de l'heptagone régulier $= 128° + \frac{4}{7} = 128° 34' 17'' + \frac{1}{7}''$, etc. etc.

412. Quant à la somme des supplémens des angles intérieurs d'un polygone quelconque qui n'a pas d'angle rentrant, elle est encore plus facile à déterminer. Car chaque supplément $= 180°$ moins l'angle intérieur auquel il appartient; donc la somme de tous les supplémens $= 180° \times n$ — la somme des angles intérieurs $= 180° \times n - 180° (n - 2) = 360°$.

413. Si un polygone a des angles rentrans, la somme de tous les supplémens des angles saillans plus tous les angles rentrans $= 360° + 180°$ pris autant de fois que le polygone a d'angles rentrans.

FIG. 33. Car la somme de tous les supplémens des angles saillans du polygone ABCEFI = 360°. Or si on fait un angle rentrant CDE, la somme des supplémens augmente de ECD + DEC, ou de 180° moins l'angle rentrant CDE. De même si on faisait un autre angle rentrant FHI, la somme des supplémens serait 360° + 180° × 2 — CDE — FHI. Donc en général la somme des supplémens des angles saillans, plus la somme des angles rentrans = 360 + autant de fois 180° que le polygone a d'angles rentrans.

Des Polygones symmétriques.

414. Puisque les côtés opposés d'un polygone symmétrique doivent être parallèles et égaux, il est clair, 1° que le nombre de ces côtés est toujours pair; 2° que tout polygone régulier d'un nombre pair de côtés est en même temps symmétrique.

34 et 35. Cela posé, si de chaque angle d'un polygone symmétrique, on mène des diagonales aux angles opposés, les triangles opposés au sommet, comme AFB, DFC, seront égaux.

Car le côté AB est égal et parallèle au côté homologue DC; donc l'angle FDC = FBA, et l'angle FCD = FAB. Les triangles AFB, DFC sont donc semblables. D'ailleurs ils ont un côté homologue égal de part et d'autre, savoir AB, DC. Donc ils sont égaux.

De là il suit que AF = FC, que BF = FD etc. Donc toutes les diagonales AC, DB, etc. se coupent en deux parties égales au même point F qu'on peut appeler à cause de cela le centre du polygone symmétrique. Une diagonale quelconque AC divise donc le polygone symmétrique en deux parties égales et semblables, puisqu'il y a de part et d'autre de cette diagonale autant de triangles égaux et semblables.

415. En général toute droite IL passant par le centre F d'une polygonne symmétrique est divisée en deux également au point F, et partage le polygone en deux parties égales et semblables. Cela se prouve par l'égalité et la similitude des triangles FIB, DFL, et AIF, LCF.

416. De ces propriétés on peut déduire une manière facile de décrire un polygone symmétrique d'un nombre

de côtés donné. Veut-on, par exemple, d'écrire un polygone symmétrique de six côtés? on mènera par le point F, trois droites EFG, DFB, AFC qui fassent entre elles des angles quelconques. On prendra ensuite FB = DF, et d'une grandeur arbitraire; de même AF = FC, EF = GF, et par les points A, B, G, C, D, E, ainsi trouvés, on mènera AB, BG, etc. qui seront les six côtés du polygone demandé. Cela est évident, puisque les triangles AFB, DFC ayant deux côtés égaux autour d'angles égaux, doivent être égaux et semblables. Donc AB est égal et parallèle à DC, etc. FIG. 34 et 35.

Des Polygones réguliers.

417. Tout polygone régulier peut être inscrit et circonscrit à un cercle.

Cela se réduit à prouver qu'il y a au-dedans de ce polygone un point C également éloigné des sommets de tous les angles, et tel en même temps que les perpendiculaires menées de ce point sur chaque côté du polygone soient égales entre elles et divisent chaque côté en deux parties égales. 36.

Or si on divise en deux également tous les angles ABD, BDF, etc. par les lignes CB, CD, etc., je dis que toutes ces lignes se rencontreront au point cherché C. En effet les angles ABD, BDF, etc., étant égaux, leurs moitiés ABC, CBD, CDF, CFD, sont égales. Donc tous les triangles ABC, BCD, DCF, etc. sont isoscèles et semblables. Mais les bases AB, BD, DF, sont toutes égales. Donc ces triangles sont isoscèles, égaux et semblables. Donc AC = BC = CD = CF, etc. Donc le cercle décrit du rayon CB passe par tous les sommets des angles du polygone donné.

Pour prouver maintenant que l'on peut circonscrire tout polygone régulier à un cercle, il faut faire voir que les perpendiculaires CK, CL, CM, etc. sont égales Or les triangles ACB, BCD, etc. étant isoscèles, les perpendiculaires CK, CL, CM, etc. divisent en deux également les côtés sur lesquels elles tombent (376). De plus, l'angle CBL = CBK. Donc les triangles rec-

FIG. 36. tangles CBK, CBL sont égaux et semblables. Donc CK=CL; on prouvera de même que CL=CM=CN, etc. Donc toutes ces perpendiculaires sont égales.

418. De là il suit que le côté d'un polygone quelconque régulier inscrit dans un cercle est la corde d'un arc de $\frac{360°}{n}$, n étant le nombre des côtés du polygone. Ainsi le côté d'un triangle équilatéral inscrit est la corde d'un arc de 120°.

On voit par ce qui précède, qu'il est facile d'inscrire dans un cercle un polygone régulier donné. Mais lorsqu'il s'agit d'inscrire dans un cercle donné un polygone régulier d'un nombre de côtés donné, c'est un problême que la Géométrie élémentaire ne peut résoudre que dans très-peu de cas. Nous allons les exposer briévement.

419. I. Inscrire dans un cercle donné un triangle équilatéral. D'un point quelconque B pris sur la circonférence donnée, comme centre, et du rayon BC, je décris l'arc ACD qui coupe en A et en D la circonférence; par ces points A et D, je mène AD, et prenant AG, DG, égaux chacun à AD, j'aurai le triangle ADG qui sera équilatéral.

Car ayant mené les deux cordes AB, BD, les triangles ACB, BCD, seront équilatéraux. Donc les angles ACB, BCD, ou les arcs AB, BD seront chacun de 60°; et parconséquent l'arc total ABD sera de 120°. Or la corde de 120° est égale au côté du triangle équilateral. Donc, etc.

420. Puisque l'arc AB est de 60°, sa corde AB est le côté de l'hexagone régulier inscrit. Or AB = CB. Donc le côté de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon.

Si on divise l'arc AB en deux parties égales, la corde de la moitié de cet arc sera le côté du dodécagone régulier; on peut donc par la Géométrie élémentaire inscrire dans un cercle les polygones réguliers de 3, 6, 12, 24, 48, etc. côtés.

421. Soit proposé maintenant de trouver l'expression analytique du côté du triangle équilatéral.

A cause du triangle isoscèle BAC, la perpendiculaire AQ menée

Digitized by Google

du sommet A sur la base CB divisera cette base en deux parties égales au point Q. Donc CQ est la moitié de CB. Soit le rayon CB $= a$. On aura $CQ = \frac{1}{2}a$, et $\sqrt{(AC^2 - CQ^2)}$, ou $AQ = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Donc 2AQ ou le côté AD du triangle équilatéral a pour expression analytique $a\sqrt{3}$. FIG. 36.

422. II. Inscrire un quarré dans un cercle donné. 37.

Si on mène les diamètres AD, BF perpendiculaires l'un à l'autre, je dis qu'ils couperont la circonférence donnée aux points A, B, D, F, par lesquels si on mène les cordes AB, BD, DF, AF, on aura les quatre côtés du quarré demandé, puisque les arcs AB, BD, DF, AF sont chacun de 90°.

423. De là il suit que si on nomme le rayon AC, a, on aura le côté du quarré $= a\sqrt{2}$. Car $AC^2 + CF^2 = AF^2$, ou $AF^2 = 2a^2$.

424. III. Inscrire dans un cercle donné un décagone régulier.

Supposons que AB soit le côté cherché, et menons les rayons AC, BC avec la ligne BE, de manière qu'elle divise en deux également l'angle ABC. Cela posé, l'angle ACB est de 36°. Donc les angles ABC, BAC sont chacun de 72°. Or par la supposition, BE divise en deux également l'angle ABC. Donc l'angle ABE $= 36° =$ ACB. Le triangle ABE est donc isoscèle et semblable au triangle ACB. Donc AE : AB :: AB : AC ; mais l'angle EBC $= \frac{1}{2}$ ABC $= 36° =$ ACB. Donc le triangle ECB est isoscèle. Donc EB ou AB $=$ EC, et AE : EC :: EC : AC. Donc si on divise le rayon AC en moyenne et extrême raison au point E, le plus grand segment EC sera égal au côté AB du décagone régulier. 38.

425. IV. Inscrire dans un cercle un pentédécagone régulier, ou un polygone régulier de 15 côtés. 39.

On prendra d'abord AB égal au rayon AC, c'est-à-dire, l'arc ADB de 60°; ensuite on fera AD égal au côté du décagone, et la corde DB menée par les extrémités des deux arcs AB, AD sera le côté du pentédécagone cherché. Car l'arc ADB $= \frac{1}{6}$ de la circonférence, et l'arc AD $= \frac{1}{10}$ de cette même circonférence. Or $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$; d'où il est aisé d'inscrire dans un cercle les polygones de 30, 60, 120, etc. côtés.

426. Lorsqu'on voudra circonscrire à un cercle donné un polygone régulier, on commencera par inscrire dans ce cercle un polygone d'un égal nombre de côtés. Cela fait, du centre C on abaissera sur chaque côté, comme AD, une perpendiculaire CB. Ensuite par le point B, on fera passer la tangente EBF qui rencontrera en E et F les rayons CA, CD prolongés et on aura EF pour l'un des côtés du polygone cherché. 40.

FIG. 40. On fera la même chose pour les autres côtés FG, GH, etc., et par là le polygone cherché se trouvera décrit.

On voit en effet, que les triangles ECB, FCB, FCM, MCG, etc. sont tous égaux entre eux. Donc $EF = FG = GH$, etc. et $EB = BF = \frac{1}{2} EF = FM$, etc. Donc le cercle donné touche chaque côté du polygone EFGH, etc. par le milieu. Ce polygone est donc circonscrit au cercle donné.

427. Si on veut avoir l'expression du côté d'un polygone circonscrit, on nommera CA, a, le côté AD d'un polygone d'un même nombre de côtés inscrits $= b$, et on aura

$$AQ = \tfrac{1}{2} b, \; QC = \sqrt{(aa - \tfrac{1}{4} bb)},$$

et à cause des triangles semblables CAQ, CEB,

$$QC\,(\sqrt{aa - \tfrac{1}{4} bb}) : AQ\,(\tfrac{1}{2} b) :: CB\,(a) : EB$$

Donc 2EB ou le côté cherché $= \dfrac{2ab}{\sqrt{(4aa - bb)}} = EF$.

428. On peut déduire de la formule précédente, 1°. que le côté du quarré circonscrit $= 2a$, ce qui d'ailleurs est évident; 2° que le côté du triangle équilatéral circonscrit $= 2a\sqrt{3} =$ le double du côté du triangle équilatéral inscrit.

Des lignes proportionnelles.

429. Lorsqu'une première ligne est à une seconde, comme une troisième est à une quatrième, ces lignes sont proportionnelles entre elles.

Si la première est à la seconde comme la quatrième à la troisième, les deux premières sont réciproquement proportionnelles aux deux autres.

Dans l'un et dans l'autre cas, celles-là sont réciproques aux deux autres, qui sont les extrêmes d'une proportion dont les deux autres sont les moyens.

Si la première est à la seconde comme la seconde à la troisième, on a une proportion continue dont la seconde ligne est moyenne proportionnelle.

Cette proportion continue devient une progression, lorsque la première ligne est à la seconde, comme la seconde à la troisième, comme celle-ci à la quatrième, et ainsi de suite.

En

En général toutes les propriétés que nous avons dé- 116.
montrées sur les quantites proportionnelles, conviennent 40.
aux lignes qui ont entre elles ce rapport. Au reste, il ne s'agit ici que de proportions et progressions géométriques; et c'est la partie la plus essentielle des élémens de géométrie.

430. Supposons d'abord que sur la droite AB on 41.
prenne des parties égales AD, DG, GI, etc., et que l'on mène les parallèles DF, GH, IK, etc. sur la droite AC; il est clair que les parties AF, FH, HK, de cette droite seront égales entre elles : car si on mène parallélement à AC les lignes DE, GR, IS, les triangles ADF, DGE, GIR seront égaux. Donc

$$AF = DE = GR = FH = HK = \text{etc.}$$

On aura donc AD : AF :: DG : FH :: GI : HK; et parconséquent AP, somme de tous les antécédens, est à AQ, somme de tous les conséquens (241), comme un seul antécédent AD est à son conséquent AF; et comme un nombre quelconque de parties de AB est au même nombre de parties de AC; par exemple, :: AG : AH :: AI : AK :: DI : FK, etc.

431. Donc, 1°. si deux droites AE, AD sont coupées 42.
par deux ou par un plus grand nombre de parallèles ED, CB, leurs parties CE, BD seront proportionnelles aux lignes entières AE, AD.

432. 2°. Si deux triangles ABC, *abc* sont semblables, 43.
tous leurs côtés homologues sont proportionnels.

Car si l'angle B = *b*, et si on prend sur AB la partie DB égale au côté homologue *ab*, en menant DF parallèle à AC, le triangle BDF sera égal au triangle *abc*.

Or AB:BC :: BD:BF. Donc AB:BC :: *ab*:*bc*. On prouvera de même que AB : AC :: *ab* : *ac*; et que AC : CB :: *ac* : *cb*. Donc les triangles semblables ont tous leurs côtés homologues proportionnels.

433. Réciproquement, si les deux triangles ABC, *abc* ont tous leurs côtés homologues proportionnels, je dis qu'ils seront semblables.

Pour le prouver, prenons sur AB la partie DB égale

FIG. au côté homologue ab, et menons DF parallèle à AC.
43. Le triangle BDF sera semblable au triangle ABC. Donc AB:BD :: AC:DF :: CB:BF. Mais par la supposition AB: ab ou DB :: AC:ac :: BC:bc; donc DF $= ac$, et BF $= bc$. Le triangle BDF est donc égal et semblable au triangle abc; et puisque le premier est semblable à ABC, le second l'est aussi.

434. Si deux triangles ABC, abc, ont un angle égal B, b et les côtés autour de cet angle proportionnels, je dis qu'ils seront semblables.

Soit encore pris BD $= ab$, et on aura AB : BC :: ab:bc :: BD ou ab : BF. Donc BF $= bc$; de même DF $= ac$. Le triangle abc est donc égal et semblable au triangle BDF, et parconséquent semblable au triangle ABC. On prouvera de même que si les triangles ABC, abc ont un angle égal, B $= b$, et deux autres côtés homologues, AB, AC, et ab, ac, proportionnels, ils seront semblables.

La propriété des triangles semblables que nous venons d'exposer, est un principe fondamental de la Géométrie. En voici deux applications.

44. 435. Le point B étant supposé inaccessible, on demande la distance de ce point au point D.

Du point D ayant visé le point B, on marquera sur le rayon visuel BD un point quelconque G, et on construira sur le terrain le triangle AGD dont on mesurera exactement les trois côtés; cela fait, d'un point quelconque C de la base AD, on visera de nouveau l'objet B, et on observera le point E où le rayon visuel BC coupe le côté AG; la distance EG étant mesurée, voici comment on trouvera la distance inconnue BD que j'appelle x.

Soit EF parallèle à AD, soit AD $= a$... AG $= b$... GD $= c$... CD $= d$... EG $= f$. A cause des triangles semblables AGD, GEF, on aura

$$AG : EG :: AD : EF = \frac{af}{b} :: GD : GF = \frac{cf}{b}.$$

Donc

$$BF = BD - FD = BD - (GD - GF) = BD + GF - GD = x + \frac{cf}{b} - c.$$

Or à cause des triangles semblables BEF, BCD, on a

$$BD : CD :: BF : EF, \text{ ou } x : d :: x + \frac{cf}{b} - c : \frac{af}{b};$$

donc FIG. 44.

$$\frac{afx}{b} = dx + \frac{cdf}{b} - cd\,;$$

et parconséquent

$$x = cd.\ \frac{b-f}{bd-fa}.$$

il n'y a donc qu'à substituer les valeurs dans cette formule.

436. La règle de double fausse position peut se démontrer aussi par les triangles semblables : car soit représenté par AC $= a$ le premier nombre supposé : soit AB $= b$ le second nombre. Si le nombre cherché est 45. entre ces deux-là, on pourra le représenter par AP$=x$, et supposant une droite indéfinie EG qui passe par le point P et qui fasse avec AC un angle aigu quelconque, on aura CD $= c$ pour marquer l'écart de ces deux lignes dans la première supposition : ainsi CD exprimera la première erreur, et BE$=d$ exprimera la seconde.

Or les triangles BPE et CPD sont semblables; donc BP : BE :: CP : CD, ou $x-b : d :: a-x : c$; ce qui donne $cx - bc = ad - dx$, et $x = \frac{ad+bc}{c+d}$, formule exactement la même que celle que nous avons trouvée (238), pour le cas où les erreurs ont des signes contraires.

Si les deux quantités supposées eussent été moindres que AP, telles, par exemple, que AI et AB, on eût trouvé deux erreurs de même signe, et la formule qui convient à ce cas-là. On trouve avec la même facilité la correction indiquée (269).

437. De la propriété des triangles semblables il 46. suit, que si on divise un angle quelconque A d'un triangle ABC en deux parties égales par la droite AD, les côtés AB et AC seront proportionnels aux segmens BD et DC.

Car soit BF parallèle à AD et qui rencontre en F le côté AC prolongé, on aura BD : DC :: FA : AC. Or l'angle DAC=DAB=ABF=BFC. Donc le triangle

FIG. 46. FAB est isoscèle, et parconséquent FA = AB. Donc BD : DC :: BA : AC.

438. Il suit aussi que les parties de deux droites qui se coupent entre parallèles, sont proportionnelles. *Voyez* les figures 34 et 35.

47. 439. Si du sommet de l'angle droit A d'un triangle rectangle BAC on abaisse sur l'hypoténuse BC la perpendiculaire AD, il en résultera que les triangles BAD, ADC seront semblables entre eux et au triangle total BAC.

Il en résultera aussi que la perpendiculaire AD sera moyenne proportionnelle entre les segmens BD, DC.

Il en résultera enfin que chaque côté AB, ou AC du triangle rectangle BAC sera moyen-proportionnel entre l'hypoténuse entière BC et le segment adjacent à ce côté, c'est-à-dire, qu'on aura BC : AB :: AB : BD, et BC : AC :: AC : DC.

I°. Le triangle rectangle BAD a un angle aigu B commun avec le triangle rectangle BAC. Donc il lui est semblable. Le triangle rectangle ADC a aussi un angle aigu C commun avec le triangle BAC; il lui est donc semblable aussi. Or deux triangles semblables à un même triangle sont semblables entre eux. Donc, etc.

II°. De la similitude des triangles BAD, ADC, on déduit BD : AD :: AD : DC. Donc $AD^2 = BD \times DC$.

III°. A cause des triangles semblables BAD, BAC, on a BD : BA :: BA : BC, et par la même raison les triangles BAC, ADC donnent DC : AC :: AC : BC.

Or de ces deux dernières proportions, on tire

$$AC^2 = DC \times BC, \text{ et } BA^2 = BD \times BC.$$

Donc

$$BA^2 + AC^2 = (DC + BD) \times BC = BC \times BC = BC^2.$$

440. Et parconséquent dans tout triangle rectangle le quarré de l'hypoténuse est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés : proposition célèbre par sa grande utilité. Elle est la quarante-septième du premier Livre d'Euclide.

441. Soit le côté $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, on aura $c^2 = a^2 + b^2$, d'où il suit que deux quelconques

des côtés d'un triangle rectangle étant connus, le troisième l'est immédiatement. Ainsi $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$... $b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$... $a = \sqrt{(c^2 - b^2)}$. Si $a = b$, on a $c = a\sqrt{2}$. Or dans ce cas BC est la diagonale du quarré ABCD dont le côté $AB = a$. Donc la diagonale est incommensurable avec le côté du quarré. FIG. 48.

442. De ce qui précède, on peut conclure que si du sommet A d'un triangle quelconque ABC on abaisse sur la base BC la perpendiculaire AD, on aura cette proportion : la base BC est à la somme $AC + AB$ des deux autres côtés, comme leur différence $AC - AB$ est à la somme ou à la différence $DC \pm DB$ des segmens DC, BD. (On doit prendre la somme des segmens DC, lorsque cette perpendiculaire tombe en dehors du triangle). 49.

Car $AB^2 - DB^2 = AD^2 = AC^2 - DC^2$. Donc.... $AC^2 - AB^2 = DC^2 - DB^2$; d'où l'on tire..... $BC : AC + AB :: AC - AB : DC \pm DB$.

Des lignes proportionnelles considérées dans le Cercle.

443. Si d'un point quelconque M pris sur la demi-conférence AMB, on mène la perpendiculaire MP sur le diamètre AB, cette perpendiculaire sera toujours moyenne proportionnelle entre les deux segmens ou abscisses AP, PB; ensorte que l'on aura toujours $PM^2 = AP \times PB$. 50.

Car si on mène AM et MB, le triangle AMB sera rectangle. Donc $MP^2 = AP \times PB$. On a aussi le quarré AM^2 de la corde $AM, = AP \times AB$.

444. Soit le diamètre $AB = 2a$, l'abscisse $AP = x$, ce qui donne $2a - x$ pour l'autre abscisse BP. Soit la perpendiculaire ou l'ordonnée $PM = y$, et nous aurons généralement $yy = (2a - x)x = 2ax - xx$; équation fondamentale que nous retrouverons souvent, et qui exprime la propriété si connue du cercle, d'avoir toujours le quarré de chacune de ses ordonnées égal au produit des abscisses correspondantes. On l'appelle à cause de cela l'équation du cercle.

Si on eût fait $PC = x$, c'est-à-dire, si on eût mis l'origine des abscisses au centre du cercle, alors on eût trouvé par le triangle

rectangle CPM, l'équation $yy = aa - xx$, laquelle exprime la
50. même propriété du cercle.

Et si au lieu d'appeler $2a$ le diamètre, on l'appelait a, les deux équations précédentes deviendraient $yy = ax - xx$, et $yy = \frac{1}{4}aa - xx$; ce qui reviendrait toujours au même.

445. Imaginons maintenant la tangente MT, et prolongeons l'axe AB jusqu'à ce qu'il rencontre cette tangente au point T, la ligne PT est ce qu'on appelle la *soutangente*.

Pour en trouver l'expression, rappelons-nous que le triangle CMT est rectangle en M. On a donc $TP \times PC = PM^2$. Donc $PT = \frac{PM^2}{CP}$. Soit $CP = x$, et on aura $PT = \frac{aa - xx}{x}$. Donc $PT + CP = CT = \frac{aa}{x}$. Ce qui donne cette proportion $CP : CA :: CA : CT$. D'où il est facile de connaître le point T, et parconséquent de mener la tangente TM, le point M étant donné.

Veut-on maintenant avoir l'expression de la tangente TM? Le triangle TCM rectangle en M donnera

$$TM = \sqrt{(CT^2 - CM^2)} = \sqrt{\left(\frac{a^4}{x^2} - aa\right)} = \frac{a}{x}\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

446. Si deux cordes se coupent dans un cercle, leurs parties seront réciproquement proportionnelles, c'est-
51. à-dire, qu'on aura $CF : AF :: FB : FD$, ou ..... $CF \times FD = AF \times FB$.

Car si on mène AC, BD, les triangles ACF, FBD seront semblables, puisque l'angle $CFA = DFB$, et que l'angle $CDB = CAB$. Donc $CF : AF :: FB : FD$.

447. Par là on peut résoudre les deux problêmes suivans :

I. Mener par le point donné A la corde BAD, de manière que AD soit à $AB :: m : n$.

52. Par le point A et par le point C je mène d'abord le diamètre FG; puis je remarque que le point A étant donné, on connaît sa distance AC au centre C. Soit donc $AC = b$, $CF = a$, $AD = x$, et on aura $AB = \frac{nx}{m}$, $BA \times AD = \frac{nx^2}{m} = FA \times AG = aa - bb$. Donc x, ou $AD = \sqrt{\left[\frac{m}{n}(aa - bb)\right]}$, et $AB = \sqrt{\left[\frac{n}{m}(aa - bb)\right]}$. Donc si du point A comme centre, et d'un rayon $\sqrt{\left[\frac{m}{n}(aa - bb)\right]}$ on décrit un arc de cercle, cet arc coupera la circonférence en un point D, par lequel et par le point A si on mène DAB, elle sera la corde demandée.

II. Par le point A mener la corde BAD égale à une droite donnée c. En gardant les mêmes dénominations, on aura $AB = c - x$, et

$AB \times AD = cx - xx = aa - bb$. D'où l'on tire AD, ou FIG.
$x = \frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}cc + bb - aa)}$, et $AB = \frac{1}{2}c - \sqrt{(\frac{1}{4}cc + bb - aa)}$.

448. Si du même point A pris hors de la circonférence d'un cercle on mène les deux sécantes AB, AC, leurs 53.
parties extérieures AD, AE seront réciproquement proportionnelles aux sécantes entières; ensorte que l'on aura AD : AE :: AC : AB. Car si on mène BE, DC, les triangles ABE, ADC, seront semblables, ayant, outre l'angle commun A, les angles DBE, DCE égaux. Donc AD : AE :: AC : AB Donc .....
$AD \times AB = AE \times AC$. 54.

449. Si l'une des sécantes devient la tangente AM, cette tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière AB et sa partie extérieure AD.

Car si on mène MD, MB, les triangles AMD, AMB seront semblables, puisqu'outre l'angle commun A les angles AMD, ABM sont égaux, ayant chacun pour mesure la moitié de l'arc MD. Donc .....
$AD : AM :: AM : AB$, et $AM^2 = AD \times AB$. Donc les deux tangentes AM, AN menées du même point A sont égales.

450. Si quatre cordes forment un quadrilatère inscrit, le pro- 55.
duit des deux diagonales BD, AC sera égal à la somme des deux produits de chaque côté par le côté opposé ; c'est-à-dire, qu'on aura $AC \times BD = BC \times AD + AB \times CD$.

Menons DE de manière que l'angle $ADE = BDC$, les triangles AED, BCD seront semblables, puisque par la supposition $ADE = BDC$, et que l'angle $DAE = DBC$. Donc $BD : BC :: AD : AE = \frac{BC \times AD}{BD}$.
Or les triangles BAD, EDC sont aussi semblables, puisque $ABD = ACD$, et que $ADB = CDE$ (car $ADB = ADE - BDE = BDC - BDE = CDE$).

Donc $$BD : AB :: CD : CE = \frac{AB \times CD}{BD}.$$

Donc $$AE + CE = AC = \frac{AB \times CD + BC \times AD}{BD}.$$

D'où l'on tire $AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$.

451. Pour faire quelque application de cette propriété, soient 56.
les deux arcs AC, CB, et ayant mené AB, proposons-nous de trouver une équation générale qui exprime le rapport qu'il y a entre AC, CB, AB et le rayon du cercle.

Je mène par le point C le diamètre CD et les cordes AD, DB; je nomme ensuite CD ($2a$), AC (b), CB (c), AB (d); cela posé,

le quadrilatère inscrit ACBD donne $2ad = CB \times AD + AC \times BD$:
56. or $AD = \sqrt{(CD^2 - AC^2)}$, et $BD = \sqrt{(CD^2 - CB^2)}$. Donc $2ad = c\sqrt{(4a^2 - b^2)} + b\sqrt{(4a^2 - c^2)}$, équation générale par le moyen de laquelle on peut résoudre les problèmes suivans.

I. Etant donnée la corde AC d'un arc, trouver la corde AB du double de cet arc.

On a dans ce cas $b = c$. Donc $d = AB = \frac{b}{a}\sqrt{(4a^2 - b^2)}$.

II. Etant donnée la corde AB d'un arc, trouver la corde AC de la moitié de cet arc.

Soit x la corde cherchée AC, et on aura $ad = x\sqrt{(4a^2 - x^2)}$. Donc $x = \sqrt{2a^2 - \sqrt{4a^4 - a^2d^2}} = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{2}ad)} - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{2}ad)}$.

III. Etant données les cordes AC, CB de deux arcs, trouver la corde AB d'un arc ACB égale à leur somme.

On a $AB = d = \frac{c}{2a}\sqrt{(4a^2 - b^2} + \frac{b}{2a}\sqrt{(4a^2 - c^2)}$.

IV. Etant données les cordes AB, AC de deux arcs, trouver la corde CB d'un arc égal à leur différence.

Soit $CB = c = x$, on aura $2ad = x\sqrt{(4a^2 - b^2)} + b\sqrt{(4a^2 - x^2)}$. D'où l'on tire $x = \frac{d}{2a}\sqrt{(4a^2 - b^2)} - \frac{b}{2a}\sqrt{(4a^2 - d^2)}$.

V. Etant donnés trois points A, C, B, trouver le rayon du cercle qui passerait par ces trois points.

En regardant a comme l'inconnue dans l'équation

$$2ad = c\sqrt{(4a^2 - b^2)} + b\sqrt{(4a^2 - c^2)},$$

on trouve

$$a = \frac{bcd}{\sqrt{4c^2d^2 - (d^2 + c^2 - b^2)^2}}.$$

Si le triangle ABC est rectangle, on a $a = \frac{1}{2}d$. Donc le centre du cercle tombe alors au milieu de AB ; ce qui d'ailleurs est évident.

Solutions de quelques problèmes sur les lignes proportionnelles.

57. 452. I. Etant données trois droites a, b, c, trouver une quatrième proportionnelle $\frac{bc}{a}$.

Ayant mené deux droites AD, AE qui fassent entre elles un angle quelconque, je prends sur AD la partie $AB = a$, et $AD = c$, je prends ensuite sur AE la ligne $AC = b$, et ayant mené CB, je tire DE parallèle à CB. Cela posé, je dis que AE est la quatrième proportionnelle demandée.

Car les triangles ACB, AED sont semblables. Donc FIG. 57.
$AB : AC :: AD : AE = \frac{bc}{a}$. On eût trouvé la même chose par l'intersection de deux droites entre parallèles.

S'il fallait trouver une troisième proportionnelle à deux droites données a et b, il est évident que la construction serait toujours la même. Il faudrait seulement prendre $AD = AC$.

453. Trouver entre deux droites a et b, une moyenne 58.
proportionnelle $\sqrt{ab}$.

Ayant mené la ligne indéfinie APB, je prends sur cette ligne la partie $AP = a$, $BP = b$, et je décris une demi-circonférence sur le diamètre AB. Cela posé, il est clair que la perpendiculaire PM menée par le point de division P sera la moyenne proportionnelle demandée. Car $PM^2 = AP \times PB$.

454. III. Diviser une droite donnée a de la même 59.
manière qu'une autre droite AB est divisée.

Par l'une des extrémités A de la droite AB je mène AC égale à la droite donnée a et qui fasse avec AB un angle quelconque. Ensuite je tire CB, et des points de divisions I, F, D de la ligne AB, je mène parallèlement à CB les lignes DE, FG, IH qui diviseront AC de la même manière que la droite AB est divisée. Car les lignes BC, DE, FG, IH étant parallèles, on a $AB : AC :: AI : AH :: IF : HG :: FD : GE :: DB : EC$.

455. IV. Diviser une droite AB en un nombre quel- 60.
conque n de parties égales.

Par le point A on mènera la ligne indéfinie AC sur laquelle ayant pris un nombre n de parties égales de telle grandeur que l'on voudra AE, EG, etc.... LC, on mènera par l'extrémité C et par le point B la ligne CB. Cela posé, les lignes LK, IH, etc. parallèles à CB diviseront la ligne AB en un nombre n de portions égales. Car $AB : AC :: AD : AE :: DF : EG :: FH : GI$, etc.

$$AE = EG = GI = IL = \frac{1}{n} AC. \text{ Donc.....}$$

$$AD = DF = FH = \frac{1}{n} AB.$$

456. V. Diviser une droite donnée AB en moyenne 61.
et extrême raison; c'est-à-dire, de manière que le plus

FIG. 61. grand segment FB soit moyen-proportionnel entre la ligne entière AB et le plus petit segment AF.

Par l'extrémité A de la ligne AB élevez la perpendiculaire $AC = \frac{1}{2} AB$, et ayant mené CB, prenez $FB = CB - AC$; la ligne AB sera divisée en moyenne et extrême raison au point F.

Car CB^2 ou $FB^2 + 2AC \times FB + AC^2 = AC^2 + AB^2$. Donc $FB^2 = AB^2 - 2AC \times FB = AB^2 - AB \times FB = AB \times AF$. Donc $AB : FB :: FB : AF$.

Construction géométrique des Equations déterminées du premier et du second degré.

Parmi les découvertes qui ont rendu Descartes si célèbre, il n'en est point qui ait plus contribué aux progrès des Mathématiques, que celle de l'application de l'Algèbre à la Géométrie. Les constructions géométriques font partie de cette application; mais nous nous bornerons ici à celles des équations du premier et du second degré.

457. Construire géométriquement une équation, c'est trouver en lignes les valeurs de l'inconnue.

Si l'équation n'est que linéaire, ou du premier degré, on déterminera toujours la valeur de l'inconnue par la seule intersection des lignes droites.

Si l'équation est quadratique, ou du second degré, auquel cas l'inconnue doit avoir deux valeurs, on les trouvera par l'intersection de la circonférence du cercle avec une ligne droite.

Mais si l'équation à construire est plus élevée, il faut alors se servir de différentes courbes, dont le choix et l'usage entraînent beaucoup de difficultés. Celle de les décrire exactement est si grande, que les résultats donnent des racines moins approchées, que ceux des méthodes purement algébriques.

458. Si on a $\frac{ac}{b} = x$, on prendra (452) une quatrième proportionnelle à b, a, c; et on aura la valeur de x. Si on a $x = \frac{abc}{de}$, on prendra $m = \frac{ab}{d}$, ensuite $n = \frac{cm}{e}$, et on aura $n = x$. De même $\frac{abcd}{efg}$ se construit en prenant une ligne $m = \frac{ab}{e}$, ensuite une ligne $n = \frac{cmd}{fg}$, et on a $n = \frac{abcd}{efg}$, et ainsi des autres. Ce serait la même chose, si on avait à construire $\frac{aa}{b}$, $\frac{a^3}{b^2}$, $\frac{a^4}{b^3}$, etc.

459. Mais si on a une fraction à construire dont le numérateur soit complexe, comme $\frac{abc + ccd + mnp}{rq}$, on prendra, par ce qui

précède, une ligne $k=\frac{abc}{rq}$, une ligne $i=\frac{ccd}{rq}$, enfin une ligne $l=\frac{mnp}{rq}$, et en ajoutant k, i, l, on aura une ligne égale à la fraction proposée. FIG. 61.

460. Si le numérateur et le dénominateur étaient complexes, comme dans $\frac{abc+cfg}{mk+nh}$, on prendrait une ligne $l=k+\frac{nh}{m}$, et la fraction proposée deviendrait $\frac{abc}{ml}+\frac{cfg}{ml}$, que l'on construirait comme ci-dessus. De même si on avait $x=\frac{abcc+q^3h+noqk-m^3p}{q^2i-klq+cmd}$, on prendrait une ligne $f=i-\frac{kl}{q}+\frac{cmd}{qq}$, et on aurait..... $x=\frac{abcc}{fqq}+\frac{qh}{f}+\frac{okn}{fq}-\frac{m^3p}{fqq}$, que l'on construirait comme ci-dessus.

461. Au reste, il y a plusieurs cas où la construction est plus facile que par les méthodes précédentes; nous en allons donner quelques exemples.

Soit $x=\frac{ab+bc}{c+d}$. Au lieu de décomposer cette fraction en deux autres $\frac{bc}{c+d}$, $\frac{ab}{c+d}$, on prendra une quatrième proportionnelle à $c+d$, $a+c$, b, et on aura la valeur de x.

Soit $x=\frac{aa-bb}{c}$, on prendra une quatrième proportionnelle à c, $a+b$, $a-b$, et on aura x.

Soit encore $\frac{abcc-aabb}{abc+c^3}$; on prendra une ligne $m=\frac{ab}{c}$; et on aura $x=\frac{cm-mm}{m+c}$; d'où en prenant une quatrième proportionnelle à $m+c$, $c-m$, m, on aura la valeur de x.

Nous ne nous arrêterons pas à éclaircir ces exemples par des figures; cela ne peut avoir aucune difficulté.

462. Voyons donc comment on doit construire les radicaux du second degré.

Si on avait d'abord $xx=am$, ou $x=\sqrt{am}$, il faudrait prendre une moyenne proportionnelle entre a et m, et ce serait la valeur de x. Si on avait $x=\sqrt{(ab+bc)}$, on prendrait entre b et $a+c$ une moyenne proportionnelle qui serait égale à $\sqrt{(ab+bc)}$.

De même si on avait $x=\sqrt{(a^2+bc)}$, on prendrait $m=\frac{bc}{a}$, et on aurait $x=\sqrt{a(a+m)}$ qui se construirait comme dans le cas précédent.

463. Soit maintenant $x=\sqrt{(ac+bd)}$, on prendra $m=\frac{bd}{a}$, et on aura $x=\sqrt{a(c+m)}$.

FIG. Si on avait $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, on prendrait une moyenne proportionnelle entre $a + b$ et $a - b$, et on aurait la valeur de x. On peut aussi construire $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ de cette autre manière. Soit décrite du
62. diamètre $AB = a$ une demi circonférence ACB, je dis que si on y inscrit la corde $AC = b$, en menant CB, cette ligne sera $= \sqrt{(a^2 - b^2)}$. Car le triangle ACB est rectangle.

Si on avait à construire $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, on prendrait $m = \frac{b^2}{a}$, ensuite une moyenne proportionnelle entre a et $a + m$; mais il est plus simple de construire un triangle rectangle ACB, dont les côtés AC, CB soient a et b; l'hypoténuse AB sera égale à $\sqrt{(a^2 + b^2)}$.

S'il y avait sous le radical proposé plus de deux termes, comme dans $\sqrt{(ab + bc + df)}$, on prendrait (460) $m = \frac{ab}{d} + \frac{bc}{d} + f$, et le radical deviendrait $\sqrt{dm}$, quantité facile à construire. Si on avait $x = \sqrt{(ac - fg + mq + rd)}$, on prendrait $n = c - \frac{fg}{a} + \frac{mq}{a} + \frac{rd}{a}$, et on aurait $x = \sqrt{an}$.

63. 464. Soit l'expression à construire $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.})}$; au lieu de faire comme dans la méthode précédente $m = \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}$ etc., on prendra $AB = a$; ensuite on mènera $BC = b$ perpendiculaire à AB, et on aura $CA^2 = a^2 + b^2$. Si on mène $CD = c$ perpendiculaire à CA, on aura $AD^2 = a^2 + b^2 + c^2$. En menant $DE = d$ perpendiculaire à DA, on aura $AE^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, etc. etc.; d'où il est évident que la dernière hypoténuse AF sera $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 \text{ etc.})}$.

S'il y avait dans cette expression quelques quarrés négatifs, on prendrait, par ce qui précède, un seul quarré m^2 égal à la somme des quarrés positifs, un autre quarré n^2 égal à la somme des quarrés négatifs; on aurait ensuite à construire $\sqrt{(m^2 - n^2)}$, ce qui est facile.

465. On peut réduire à la construction que nous venons de donner, toutes les autres quantités radicales. Si on a, par exemple, $\sqrt{(bc + am + dn - cq)}$, on prendra $bc = i^2$, $am = k^2$, $dn = l^2$, $cq = p^2$, et on aura à construire $\sqrt{(i^2 + k^2 + l^2 - p^2)}$.

S'il y a des fractions sous le radical proposé, il sera aisé de s'en débarrasser. Qu'on ait, par exemple, $x = \sqrt{\left(\frac{ab^2 + cd^2}{b + c}\right)}$, on prendra $\frac{ab}{b + c} = m$, $\frac{cd}{b + c} = n$, et on aura $x = \sqrt{(bm + dn)}$, quantité facile à construire.

Supposons maintenant qu'on ait $x = \sqrt{\left(aa - ff \cdot \frac{c^2 + d^2}{ab + cd}\right)}$, je prends $cc + dd = mm$, $\sqrt{(ab + cd)} = n$, et j'ai $x = \sqrt{\left(aa - \frac{ffmm}{nn}\right)}$, je prends $p = \frac{fm}{n}$, et j'ai $x = \sqrt{(aa - pp)}$.

466. Nous avons supposé, jusqu'ici 1°. que la quantité donnée était homogène : si elle ne l'était pas comme $\frac{a^3+b}{a^2+c}$, on la rendrait telle, en multipliant ses termes par différentes puissances d'une ligne l qu'on regarderait comme l'unité, ce qui ne changerait pas la valeur de la quantité. On aurait donc dans cet exemple $\frac{a^3+l^2b}{a^2+lc}$, quantité homogène et égale à la proposée. Si on avait $\frac{a^4c+ab^3-d}{b^4+a^3-c}$, on rendrait cette expression homogène en l'écrivant ainsi $\frac{a^4c+alb^3-l^4d}{b^4+a^3l-l^3c}$, etc. FIG. 63.

467. Nous avons supposé, 2°. que la quantité donnée n'était que d'une dimension ; si elle en avait plusieurs, il ne serait pas difficile de la réduire à une seule quantité monome de la même dimension.

Qu'on ait, par exemple, $\frac{abc+cfg}{m+n}$. Je prendrais (460) $p=\frac{ab+fg}{m+n}$, et j'aurais $pc=\frac{abc+cfg}{m+n}$.

468. S'il entrait deux radicaux dans la quantité proposée, comme dans $\sqrt{[ff+g\sqrt{(kk-bb)}]}$, on prendrait $\sqrt{(kk-bb)}=c$, ensuite $\sqrt{(ff+gc)}=n=\sqrt{[ff+g\sqrt{(kk-bb)}]}$. Si on avait à construire $\sqrt[4]{a^3c}$, on ferait $ac=m^2$, et on aurait

$$\sqrt[4]{(a^2m^2)}=\sqrt{am}=\sqrt[4]{(a^3c)}.$$

De même $\sqrt[4]{abcd}$ se construit en prenant $ab=m^2$, $cd=n^2$, ce qui donne $\sqrt[4]{abcd}=\sqrt{mn}$. Enfin, si on avait $\sqrt[4]{(a^2fg+bcfk-a^3f)}$, on prendrait $m=\frac{fg}{a}+\frac{bcfk}{a^3}-f$, et le radical proposé deviendrait $\sqrt[4]{a^3m}$, quantité facile à construire.

En général, on voit que toute quantité dans laquelle il n'entre que des radicaux du second degré, ou même du quatrième ou du huitième, etc., peut toujours être construite par le moyen du cercle.

469. De là il suit que toute équation du second degré peut être résolue par le moyen du cercle. En effet l'équation $xx-px=qq$, qui peut représenter toutes celles du second degré, donne $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}pp+qq)}$, quantité facile à construire par ce qui précède.

470. Pour donner quelques exemples, proposons-nous de mener du point donné A hors des parallèles EB, CD, la droite AK, de manière que la partie KI interceptée par ces parallèles, soit égale à une droite donnée c. FIG. 64.

Soit menée AF perpendiculaire sur les parallèles EB, CD, et soit AF $=a$, FG $=b$, FK $=x$. On aura

$$\text{AK}, \sqrt{(a^2+x^2)} : \text{AF}\ (a) :: \text{IK}\ (c) : \text{FG}\ (b).$$

FIG. D'où l'on tire

64. $$\frac{ac}{b} = \sqrt{(a^2 + x^2)},$$

et parconséquent

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{(c^2 - b^2)};$$

ce qui donne cette construction.

Du point G comme centre et d'un rayon égal à la droite donnée c; soit décrit un arc de cercle qui coupe en H la ligne FB, je dis que AK parallèle à GH sera la ligne demandée.

Car FG (b) : AF (a) :: FH $(\sqrt{cc-bb})$: FK $(x) = \frac{a}{b}\sqrt{(cc-bb)}$.

Il est pourtant à remarquer que l'équation $\frac{ac}{b} = \sqrt{(a^2 + x^2)}$, donne $x = -\frac{a}{b}\sqrt{(cc-bb)}$ aussi bien que $x = \frac{a}{b}\sqrt{(cc-bb)}$.

Mais pour savoir ce que signifie cette valeur négative..... $-\frac{a}{b}\sqrt{(cc-bb)}$, il faut observer que l'arc de cercle décrit du centre G et du rayon GH $= c$, coupe la ligne FB en deux points M et H. D'où il suit que AK′ parallèle à MG n'est pas moins propre à résoudre le problême proposé que AK; c'est donc FK′ égale et directement opposé à FK, qu'exprime la valeur négative $-\frac{a}{b}\sqrt{(c^2-b^2)}$. D'où l'on peut conclure en général, que lorsque le résultat d'un calcul donne une valeur négative de l'inconnue, cela signifie qu'on doit prendre cette inconnue dans un sens opposé à celui où on l'avait prise d'abord.

65. 471. Soit proposé maintenant de décrire un cercle qui passe par les deux points donnés A et B, et qui touche la droite CF donnée de position.

Le problême se réduit à trouver le point M où le cercle touche la droite CF; car ce point étant trouvé, si on fait passer une circonférence de cercle par A, B, M, elle sera la circonférence cherchée.

Soit menée par les points A et B la droite ABF qui rencontre en F la droite CF, et soit divisée AB en deux également au point D; en nommant FM (x), FD (a), AD $=$ DB $= b$, on aura $xx =$ BF $\times$ AF $= a^2 - b^2$. D'où $x = \sqrt{(a^2-b^2)}$, ce qui donne cette construction.

Sur le diamètre DF soit décrite la demi-circonférence DGF dans laquelle si on inscrit la corde DG $=$ DB, je dis que GF sera égale à FM; car FG $= \sqrt{(a^2 - b^2)} =$ FM. Or le point M étant déterminé, le problême est résolu.

FIG.

Des Figures semblables. 65.

472. Deux figures sont semblables, lorsqu'ayant un égal nombre de côtés, tous les côtés de l'une sont proportionnels aux côtés homologues de l'autre, et que de plus tous les angles de l'une sont respectivement égaux à ceux de l'autre.

D'où il faut conclure que tous les polygones réguliers d'un égal nombre de côtés sont des figures semblables, et que parconséquent les cercles sont tous semblables entre eux, puisqu'on peut les regarder comme des polygones réguliers d'une infinité de côtés.

473. Si deux figures ABCDE, *abcde* sont semblables, 66
le contour ou le périmètre de la première figure sera au contour de la seconde, comme un côté quelconque AB pris dans la première figure est au côté homologue *ab* pris dans la seconde, ou comme un nombre quelconque de côtés AB + AE + DE pris dans la première, est au même nombre *ab* + *ae* + *de* de côtés homologues pris dans l'autre.

Car AB : *ab* :: BC : *bc* :: DC : *dc* :: DE : *de*, etc.; donc la somme des antécédens, ou le périmètre de la première figure est à la somme des conséquens, ou au périmètre de la seconde, comme AB : *ab*, ou comme AB + AE + DE, etc. : *ab* + *ae* + *de*, etc.

De là il suit que les contours de deux polygones régu- 67.
liers ABDEFG, *abdefg* sont entre eux :: le côté AG : au côté homologue *ag* :: la portion BAGF du périmètre du premier polygone est à la portion homologue *bagf* du second. Or si C est le centre de ces polygones, à cause des triangles isoscèles et semblables *a*C*g*, ACG, on aura AG : *ag* :: CG : C*g*; donc.....
ABDEFG : *abdefg* :: BAGF : *bagf* :: CG : C*g*.

474. Les circonférences de deux cercles sont donc 68.
entre elles comme leurs rayons et comme deux arcs quelconques AM, BN compris entre deux rayons CA, CM.

Et puisqu'on a d'ailleurs CM : CN :: AM : BN, on

FIG. aura aussi AMF : BND :: l'arc AM : l'arc BN :: la corde
68. AM : la corde BN :: CM : CN.

Ainsi les circonférences AMF, BND contenant chacune 360 degrés, leurs arcs correspondans AM, BN, contiennent autant de degrés l'un que l'autre. On voit donc bien que la mesure d'un angle en degrés est toujours la même, de quelque rayon que l'on décrive l'arc qui doit mesurer cet angle.

66. 475. Si dans deux figures semblables ABCDE, *abcde* on mène les diagonales AD et AC, *ad* et *ac*, elles seront proportionnelles entre elles et aux côtés homologues AE, *ae*. Car les triangles ADE, *ade* sont semblables, ayant 1°. un angle égal E, *e*; 2°. les côtés autour de cet angle proportionnels. On a donc AD : *ad* :: AE : *ae*. On prouvera de même que AC : *ac* :: BC : *bc* :: AE : *ae* :: AD : *ad*. En général, la propriété des figures semblables est d'avoir toutes leurs dimensions homologues proportionnelles.

69. Cela posé, s'il s'agissait de décrire un polygone semblable au polygone donné ABCDEF et dont le côté homologue à AB fût donné, on prendrait sur AB prolongé, s'il était nécessaire, la ligne A*b* égale au côté homologue à AB donné par la supposition. On mènerait ensuite du point A les diagonales AC, AD, AE, et les parallèles *bc* à BC, *cd* à CD, *de* à DE, *ef* à EF formeraient le polygone demandé.

Car, par la construction, les angles des figures ABCDEF, A*bcdef* sont respectivement égaux. D'ailleurs leurs côtés sont proportionnels à cause des triangles semblables ABC, A*bc*, et ACD, A*cd*, etc. Donc les figures A*bcdef*, ABCDEF sont semblables.

SECONDE PARTIE.

DES ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

476. On appelle *Surface*, *Aire*, ou *Superficie*, tout ce que l'on conçoit n'avoir que deux dimensions de l'étendue, la longueur et la largeur.

Supposons,

Supposons, par exemple, que ce livre soit partagé en deux moitiés, et que chacune de ses moitiés soit partagée en deux autres, et ainsi de suite; il est clair que chaque feuillet peut se diviser de même; et qu'après avoir épuisé tous les procédés des arts pour diviser et soudiviser un seul de ces feuillets, on conçoit encore possibles des divisions sans fin, d'où résulteraient à chaque fois des feuillets de plus en plus minces, quoique toujours égaux en longueur et en largeur au premier. FIG. 69.

Mais comme à l'image distincte des premières divisions succèdent des idées confuses du nombre de ces feuillets, lequel va toujours croissant, et de leur épaisseur qui diminue de plus en plus, tout ce que l'on retire de cette considération est une idée bien imparfaite de ce qu'on appelle infiniment grand et infiniment petit. Il en résulte cependant d'une manière fort claire, 1°. qu'à force de diviser et de soudiviser, on approche de plus en plus du terme où le feuillet n'aurait aucune épaisseur; 2°. que pour atteindre ce terme, il faudrait un nombre vraiment infini de divisions; 3°. que ce nombre est impossible, et que parconséquent on n'arrivera jamais à ce terme, quoique l'on en approche de plus en plus.

477. On appelle des *Limites* ces sortes de quantités vers lesquelles d'autres tendent sans pouvoir jamais y atteindre. Ainsi on peut dire que la surface est la limite du corps, que la ligne est la limite de la surface, et que le point est la limite de la ligne.

On peut dire aussi que la surface d'un corps est cette enveloppe extérieure dont il est revêtu, et sur laquelle tombent nos regards. Pour en déterminer la grandeur, cherchons d'abord quelle est en général la mesure naturelle des surfaces, et nous verrons ensuite comment on évalue en particulier celles des différens polygones qui peuvent servir de faces aux corps.

478. Il faut, 1°. que la mesure des surfaces soit elle-même une surface à laquelle on puisse rapporter celles que l'on veut évaluer. Cette surface primitive est en quelque sorte la base de toutes ces évaluations, comme l'unité est la base de tous les calculs des nombres. Il

110. faut, 2°. que cette mesure soit la plus simple de toutes;
69. il faut donc que sa longueur et sa largeur soient égales, et que chacune de ces dimensions soit représentée par l'unité. Or la largeur se mesure en prenant la distance des extrémités parallèles, et la mesure de cette distance est la perpendiculaire qui les joint (372); donc la mesure la plus naturelle des surfaces est un quarré plus ou moins grand, que l'on prend toujours pour l'unité de surface.

Une surface d'un pouce de long sur un pouce de large, par exemple, est la mesure commune des surfaces estimées en pouces quarrés. Ainsi on dit qu'il y a 144 pouces quarrés dans une surface d'un pied de long sur un pied de large, et qu'il y en a 5184 dans une toise quarrée.

479. C'est parceque la mesure commune des surfaces doit toujours être un quarré, que l'on nomme *Quadrature* l'évaluation d'une surface. Ainsi le problême si connu de la quadrature du cercle, consiste à trouver un quarré égal en surface à un cercle donné, c'est-à-dire, qui renferme précisément autant d'espace que ce cercle.

En général, lorsqu'on se propose de mesurer une surface, il faut chercher combien de fois elle contient le quarré que l'on prend alors pour unité. Or cette recherche est aisée dans toutes les figures rectilignes, comme on va le voir.

70. Commençons par le quarré ABCD, autre que celui qui lui doit servir de mesure et que nous représenterons par *abcd*. Il est certain que sur la base AB on peut mettre autant de quarrés égaux au quarré *abcd*, que cette base contient de fois le côté *ab*, ou l'unité de longueur. Donc AB étant la somme de ces unités, si on exprime par s la surface du petit quarré, on aura $AB \times s$ pour celle de tous les petits quarrés qui peuvent être mis sur AB, et qui forment le rectangle ABFE. Mais n'est-il pas évident que la surface du quarré total ABCD contient autant de fois celle de ce rectangle, que la ligne AD ou AB contient AE ou *ad* unité de largeur? Donc ABCD ou AC (car on désigne souvent

les quarrés et les triangles par deux lettres diagonalement opposées) $= AB^2 \times s$, et comme $s = 1$, on a FIG. 70. $AC = AB^2$: c'est-à-dire, que pour avoir la surface d'un quarré, il faut multiplier l'unité de surface par le quarré du nombre des unités simples contenues dans un de ses côtés, et non par le quarré d'un de ses côtés.

Remarquez en effet que cette dernière expression n'est pas exacte, puisqu'on ne multiplie jamais une ligne par une autre. Mais comme elle est usitée, nous nous en servirons dans le sens que nous venons d'indiquer.

480. Cela posé, cherchons la mesure de la surface 71. d'un rectangle quelconque ABCD,

Si on décrit sur son plus grand côté AB le quarré ABEF, ce quarré contiendra autant de rectangles égaux à ABCD, que AE contient de fois AD. Il en contiendra donc un nombre exprimé par $\frac{AE}{AD}$, ou $\frac{AB}{AD}$; et si on appelle x la surface du rectangle, on aura $AB^2 = \frac{AB}{AD}x$; d'où $x = AB \times AD$; c'est-à-dire, que la surface d'un rectangle quelconque est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Par exemple, si un rectangle a 7 pouces de long sur 3 pouces de large, sa surface contient 21 pouces quarrés. Ce que nous disons des pouces quarrés peut s'appliquer à toute autre mesure semblable.

481. Il suit de ce que nous venons de prouver, 1°. que la surface du triangle rectangle ACB est égale au produit de sa hauteur par la moitié de la base. Car ce triangle est la moitié du rectangle ABCD.

2°. Que la surface d'un triangle quelconque ABC 72. est égale au produit de l'un quelconque AC de ses côtés par la moitié de la perpendiculaire menée de l'angle opposé B sur cette base prolongée, s'il est nécessaire.

Car le triangle $ABD = \frac{1}{2} BD \times AD$, et le triangle $CDB = \frac{1}{2} BD \times DC$. Donc $CDB \pm ABD$, ou la surface du triangle $ABC = \frac{1}{2} BD (DC \pm AD) = \frac{1}{2} BD \times AC$.

482. Donc la surface d'un parallélogramme quel- 73. conque ABDE est égale au produit de la base AE par la

FIG. 73. distance des côtés parallèles AE, BD, $= AE \times BC$. Car si on mène la diagonale BE, le triangle ABE sera égal au triangle BED. Donc la surface du parallélogramme ABDE est double de celle du triangle AEB.

74. 483. Pour mesurer la surface d'un trapèze quelconque ABCD, soit menée la diagonale AC; on aura..... $ABC = \frac{AE \times BC}{2} = \frac{BC \times CF}{2}$, et $ACD = AD \times \frac{1}{2} CE$. Donc $ABC + ACD = ABCD = \frac{1}{2} CF \times (BC + AD)$; c'est-à-dire, que la surface d'un trapèze quelconque est égale au produit de la demi-somme de ses bases par la perpendiculaire qui en mesure la distance.

484. Il est également facile de mesurer la surface d'un polygone quelconque régulier; car si du centre de ce polygone on imagine des rayons menés à tous ses angles, ces rayons diviseront le polygone en autant de triangles égaux et semblables qu'il a de côtés. Or la surface de l'un quelconque de ces triangles est égale au produit de la moitié du côté du polygone par le rayon du cercle inscrit. Donc la surface d'un polygone régulier quelconque est égale à la moitié du périmètre, multipliée par le rayon du cercle inscrit.

67. Donc la surface d'une portion BCG de polygone régulier, comprise entre deux rayons CB, CG et les côtés BA et AG, est égale à la portion $\frac{BA + AG}{2}$ du périmètre, multipliée par le rayon du cercle inscrit.

Donc la surface d'un cercle quelconque est égale au produit de sa circonférence par la moitié de son rayon, et parconséquent la surface d'un secteur quelconque est égale au produit de son rayon, par la moitié de l'arc qui le termine.

Pour avoir la surface ou la quadrature d'un cercle, il faudrait donc connaître le rapport du rayon à la circonférence. Mais on n'a pu le déterminer que par approximation; et on a trouvé que le diamètre d'un cercle est à sa circonférence, à-peu-près comme 7 à 22, ou comme 113 à 355, ou plus exactement, comme 1 à 3,14159265358979 32 avec cent onze autres décimales, ce qui fait une approximation presque infinie. *Voyez*

l'histoire des Recherches sur la Quadrature du cercle et rié.
l'histoire des Mathématiques; ouvrages de M. Montucla, 67.
généralement estimés.

485. Soit π le nombre 3, 14159, etc.; on aura $1 : \pi$ pour le rapport du diamètre à la circonférence. Soit r le rayon d'un cercle quelconque, on aura $1 : \pi :: 2r : 2r\pi$ pour la circonférence de ce cercle. Sa surface sera donc πr^2.

486. Soit proposé maintenant de mesurer la surface d'un polygone quelconque irrégulier.

On le divisera d'abord en triangles; on prendra ensuite la surface de chacun de ces triangles, et la somme de ces surfaces sera évidemment celle du polygone proposé. Mais s'il s'agissait de trouver un seul triangle égal en surface à un polygone donné (au pentagone ABCDE, 75.
par exemple), on mènerait la diagonale CE pour retrancher l'angle D; ensuite par le point D on mènerait DG parallèle à cette diagonale, et qui rencontre en G le côté AE prolongé. Cela posé, si on mène CG, le quadrilatère ABCG sera égal en surface au pentagone ABCDE, puisque le triangle CKD = le triangle EKG; ce qui se prouve par l'égalité des triangles CGE, CDE, dont les bases et les hauteurs sont respectivement égales, de manière qu'en retranchant le triangle commun CKE, il reste CKD = EKG.

Si on mène à présent la diagonale CA et BF parallèle à cette diagonale, on prouvera de même que le triangle FCG est égal en surface au quadrilatère BCGA, et parconséquent au pentagone proposé, qui se trouvera par ce moyen réduit en un triangle de même surface.

Par cette méthode, on peut réduire un polygone quelconque en un triangle de même surface, d'où il suit qu'on peut trouver la quadrature exacte de toutes les figures rectilignes.

De la comparaison des Surfaces.

487. Si B représente la base et H la hauteur d'un triangle quelconque, sa surface sera $S = \frac{1}{2}$ BH : de même, si on nomme b et h la base et la hauteur d'un

FIG. 75. autre triangle dont la surface est s, on aura $s = \frac{1}{2} bh$. Donc $S : s :: BH : bh$, d'où il suit,

I°. Que les surfaces de deux triangles quelconques sont entre elles en raison composée de leurs bases et de leurs hauteurs.

II°. Que deux triangles qui ont la même base ou des bases égales, sont entre eux comme leurs hauteurs. Car alors $B = b$. Donc $S : s :: H : h$.

III°. Que deux triangles qui ont des hauteurs égales, sont comme leurs bases, puisque H étant égale à h, on a $S : s :: B : b$.

IV°. Que deux triangles sont égaux en surface, lorsque leurs bases et leurs hauteurs sont en raison inverse. Car si $B : b :: h : H$, on a $bh = BH$ et parconséquent $S = s$.

V°. Que les surfaces de deux triangles semblables sont comme les quarrés de leurs dimensions homologues. Car dans ce cas $B : b :: H : h$; d'ailleurs $S : s :: BH : bh$. Donc $S : s :: B^2 : b^2 :: H^2 : h^2$, comme le quarré d'une dimension prise dans l'un est au quarré de la dimension homologue de l'autre.

488. De là il suit, 1°. que la surface du triangle équilatéral circonscrit est quadruple de celle du triangle équilatéral inscrit. Car le côté de l'un est double du côté de l'autre (427).

2°. Que le quarré circonscrit est double du quarré inscrit. Car en appelant a le rayon du cercle, leurs côtés sont $2a$, $a\sqrt{2}$. Or le quarré de $2a$ est double de celui de $a\sqrt{2}$.

76. 489. Si deux triangles BAC, bac ont chacun un angle égal A, a; je dis que leurs surfaces seront comme les produits des côtés qui entourent l'angle égal dans chacun. Ainsi on aura $BAC : bac :: AB \times AC : ab \times ac$.

Car si on mène les perpendiculaires BD, bd sur les côtés AC, ac, on aura $BAC : bac :: BD \times AC : bd \times ac :: AC : ac \times \frac{bd}{BD}$. Or à cause des triangles semblables ABD, abd, on a $\frac{bd}{BD} = \frac{ab}{AB}$. Donc $BAC : bac :: AC : \frac{ac \times ab}{AB} :: AC \times AB : ac \times ab$.

77. Pour faire quelque application de cette propriété, proposons-nous de mener du point donné B la droite BF sur le triangle ACD, de manière qu'il soit divisé en deux parties AEF, EFDC dont les surfaces soient dans le rapport de m à n.

Puisque AEF : EFDC :: $m : n$; donc AEF + EFDC, ou.... ACD : AEF :: $m+n : m$. Or ACD : AEF :: AC × AD : AE × AF. Donc $m+n : m$ :: AC × AD : AE × AF. Cela posé, soit mené BI parallèle à AC, et soient nommées les connues BI (a), AI (c), AC (b), AD (d), et l'inconnue AF (x); à cause des triangles semblables AEF, BIF, on aura FI ($x+c$) : BI (a) :: AF (x) : AE $= \frac{ax}{x+c}$. Donc $m+n : m :: bd : \frac{ax^2}{x+c}$. D'où l'on tire $xx - \frac{bdmx}{a(m+n)} = \frac{bcdm}{a(m+n)}$. Donc $x = \frac{bdm \pm \sqrt{[b^2d^2m^2+4abdmc(m+n)]}}{2a(m+n)}$. De ces deux valeurs, l'une positive, l'autre négative, il n'y a que la positive $x = \frac{bdm + \sqrt{\text{etc.}}}{2a(m+n)}$ qui soit propre à résoudre la question proposée. FIG. 77.

Pour savoir ce que l'autre signifie, il faut observer que si AC, AD (b, d) étaient toutes deux négatives, c'est-à-dire, devenaient AC′, AD′, cela ne changerait rien du tout à l'équation trouvée ci-dessus; d'où il suit que cette équation doit donner aussi la solution du cas où il s'agirait de mener du point B la droite BF′E′ qui divise le triangle AD′C′ en deux parties, dont le rapport soit $\frac{m}{n}$. C'est donc AF′ que signifie la valeur négative trouvée ci-dessus. Or AF′ est directement opposée à AF. On voit donc se confirmer ce que nous avons déjà dit des quantités négatives (470).

Si le point donné B était sur le côté AC comme en E, on aurait alors AI (c) = 0, et AF $= \frac{bdm}{a(m+n)}$; et si le point était en dedans du triangle ACD, on aurait, en faisant c négatif dans la formule trouvée ci-dessus, la solution de ce cas.

490. Lorsque deux figures sont semblables, leurs surfaces sont toujours proportionnelles aux quarrés de leurs dimensions homologues.

Car soient A et B les deux dimensions dont le produit donne la surface S de la première figure, et a, b, les deux dimensions homologues dont le produit donne la surface s de la seconde. On aura S : s :: AB : ab. Mais par la nature des figures semblables on a, A : a :: B : b; donc S : s :: $A^2 : a^2$ :: $B^2 : b^2$. Donc les surfaces des figures semblables sont comme les quarrés de leurs dimensions homologues.

491. De là il suit, 1°. que les surfaces des cercles sont comme les quarrés de leurs rayons, comme les quarrés de leurs diamètres, comme les quarrés de leurs circon-

FIG. férences, et en général comme les quarrés de leurs dimensions homologues.

78. 2°. Qu'une figure quelconque ALMNC construite sur l'hypoténuse AC d'un triangle rectangle est égale à la somme des deux figures semblables ADFGB, BHIKC construites sur les deux autres côtés.

Car ALMNC : ADFGB : BHIKC :: $AC^2 : AB^2 : BC^2$.
Donc ALMNC : ADFGB + BHIKC :: $AC^2 : AB^2 + BC^2$.
Or..... $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
Donc.....ALMNC = ADFGB + BHIKC.

Donc si sur l'hypoténuse AB on décrit un demi-cercle ACB, il sera égal en surface à la somme des demi-cercles ACD, CFB construits sur les deux autres
79. côtés AC, CB. On aura donc AECGB = ADC + CFB, et en retranchant les parties communes AECA + CGBC, resteront les espaces curvilignes ADCEA + CFBGC égaux en surface au triangle ABC. Si AC était = CB, chaque espace serait égal au triangle ACK, ou KCB. On nomme ces espaces les *Lunules d'Hippocrate*, parcequ'un ancien géomètre de ce nom en trouva la quadrature.

492. Nous allons terminer cette matière par la résolution de quelques problêmes.

78. I. Etant données les deux figures semblables ADFGB, BHIKC, trouver une troisième figure ALMNC égale à leur somme, et qui leur soit en même temps semblable.

On disposera à angle droit les deux côtés homologues AB, BC, et AC sera le côté homologue du polygone demandé. Il sera donc facile de le décrire.

Donc pour trouver un cercle égal à la somme de deux autres cercles, il faut disposer les diamètres ou les rayons de ceux-ci à angle droit, l'hypoténuse AC sera le diamètre ou le rayon du cercle demandé.

II. Trouver une figure ADFGB semblable à deux autres figures ALMNC, BHIKC, et qui soit égale à leur différence.

De l'un quelconque AC des côtés de la plus grande figure comme diamètre, on décrira un demi-cercle dans

lequel on inscrira la corde BC égale au côté homologue à AC dans la seconde figure. Cela posé, je dis que AB sera le côté homologue du polygone demandé. Car $AB^2 = AC^2 - BC^2$. Il est donc facile de décrire un cercle égal à la différence de deux autres cercles donnés. 79.

III. Trouver une seule figure égale à la somme ou à la différence de tant de figures semblables qu'on voudra, et qui leur soit en même temps semblable.

Soient A, B, D, etc. les côtés homologues des figures qu'il faut ajouter; soient a, b, d, etc. les côtés homologues des figures à soustraire; soit enfin x le côté homologue du polygone demandé, on aura $x^2 = A^2 + B^2 + D^2 \ldots$ etc... $- a^2 - b^2 - d^2 \ldots$ etc., quantité facile à construire (464). On peut donc trouver un seul cercle égal à la somme ou à la différence de tant de cercles qu'on voudra.

IV. Trouver une figure semblable à une autre figure donnée et qui soit avec elle dans le rapport de m à n.

Je nomme a un côté quelconque de la figure donnée, et x le côté homologue dans la figure cherchée. J'ai donc $a^2 : x^2 :: m : n$. D'où $x = \sqrt{\left(\frac{n}{m}a^2\right)} = a\sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{a}{m}\sqrt{mn}$, quantité facile à construire.

On peut donc trouver deux cercles qui soient entre eux $:: m : n$, quel que soit ce rapport, fût-il même incommensurable.

V. Trouver la surface et les côtés d'un rectangle ABCD, dont on ne connaît que le périmètre (p), et la diagonale AC (a). 71.

Soit $AB = x$, $AD = y$; on aura $x + y = \frac{1}{2}p$, et $x^2 + y^2 = a^2$. La première équation donne $xx + 2xy + yy = \frac{1}{4}pp$. D'où xy, ou la surface cherchée $= \frac{1}{8}pp - \frac{1}{2}a^2$, et $x = AB = \frac{1}{4}p + \sqrt{(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{16}p^2)}$, $y = AD = \frac{1}{4}p - \sqrt{(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{16}pp)}$.

VI. Trouver la surface d'un triangle dont on ne connaît que les trois côtés.

Soit $AC = a$, $AB = b$, $BC = c$, la perpendiculaire $BD = x$, 80.
on aura $AD = \sqrt{(bb - xx)} \ldots$ $DC = \sqrt{(cc - xx}$. Donc.... $AD + DC = a = \sqrt{(bb - xx)} + \sqrt{(cc - xx)}$. D'où l'on tire $x = \frac{1}{2a}\sqrt{[4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2]}$. Donc $\frac{ax}{2}$ ou la surface demandée

$$
\begin{aligned}
(s) &= \tfrac{1}{4}\sqrt{[4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2]} \\
&= \tfrac{1}{4}\sqrt{[(2b^2 - a^2)a^2 + (2c^2 - b^2)b^2 + 2a^2 - c^2)c^2]} \\
&= \tfrac{1}{4}\sqrt{[(2ab - (a^2 + b^2 - c^2))(2ab + (a^2 + b^2 - c^2)]} \\
&= \tfrac{1}{4}\sqrt{[(c2 - (a - b)^2)(a + b)^2 - c^2)} \\
&= \tfrac{1}{4}\sqrt{[(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)a + b + c)]}.
\end{aligned}
$$

FIG. 80. Soit q la demi-somme des trois côtés, ou $q = \frac{a+b+c}{2}$, on aura

$2q - 2a = b + c - a$, $2q - 2b = a + c - b$, $2q - 2c = a + b - c$.

Donc la surface $s = \sqrt{(q.q - a.q - b.q - c)}$.

Si C'N est le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC, en menant C'B, C'A, C'C et les perpendiculaires C'M, C'P, on aura le triangle

$ABC' = C'N \times \frac{1}{2} AB$, $BC'C = \frac{1}{2} C'P \times BC = \frac{1}{2} C'N \times BC$, $AC'C = \frac{1}{2} C'N \times AC$;

donc la surface s du triangle

$$ABC = C'N \times \tfrac{1}{2}(a + b + c).$$

Donc le rayon

$$C'N = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{[4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2]}}{a + b + c} = \sqrt{\left(\frac{q - a.q - b.q - c}{q}\right)}.$$

81. Si le triangle ABC est rectangle en A, on a $cc = a^2 + b^2$, et

$$C'N = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c)}{(a+b+c)(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c)} = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c = q - c.$$

VII. Etant donnés l'hypoténuse d'un triangle rectangle, et le rapport de ses deux autres côtés, trouver sa surface.

Soit $AC = a$; $BC : AB :: m : n$; $AB = x$, BC sera $\frac{mx}{n}$, et on aura $a^2 + \frac{mm}{n^2}x^2 = a^2$. D'où $x^2 = \frac{a^2n^2}{m^2 + n^2}$, et $\frac{mx^2}{2n}$, ou la surface cherchée $= \frac{a^2nm}{2(m^2+n^2)}$. On a aussi $AB = \frac{an}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$, et $BC = \frac{am}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$.

VIII. Etant donnés le rapport des trois côtés d'un triangle quelconque, et leur somme, trouver la surface de ce triangle.

80. Soit $AC = x$, $AB = y$, $BC = z$, le périmètre $= p = x + y + z$, le rapport des trois côtés $x : y : z :: a : b : c$. Donc $x + y + z$, ou $p : a + b + c :: x : a :: y : b :: z : c$; d'où l'on tire

$$x = \frac{ap}{a + b + c} \ldots y = \frac{bp}{a + b + c} \ldots z = \frac{cp}{a + b + c}.$$

Or les trois côtés étant connus, on a la surface.

IX. Le périmètre d'un triangle rectangle étant donné, avec le rapport de l'hypoténuse à la somme des deux autres côtés, déterminer la surface de ce triangle.

Soit p le périmètre donné; $AC : AB + BC :: m : n$; $AC = x$; $AB = y$; $BC = z$; on aura $x : y + z :: m : n$. Donc $x + y + z$, ou $p : x :: m + n : m$. Donc

$$x = \frac{mp}{m+n} \ldots y + z = \frac{np}{m+n} \ldots y^2 + 2yz + z^2 = \frac{n^2p^2}{(m+n)^2};$$

or FIG. 81.

$$y^2 + z^2 = x^2 = \frac{m^2p^2}{(m+n)^2}.$$

Donc la surface cherchée

$$\tfrac{1}{2}\, yz = \tfrac{1}{4}\, pp \left(\frac{n-m}{m+n}\right).$$

Si on veut avoir les côtés du triangle, on trouvera que le plus petit $= \frac{\frac{1}{2}p}{m+n}(n - \sqrt{(2m^2-n^2)})$, et le plus grand $= \frac{\frac{1}{2}p}{m+n}(n + \sqrt{(2m^2-n^2)})$.

Des Surfaces planes.

On appelle surface plane celle à laquelle une ligne droite s'applique exactement dans tous les sens. Telle serait la surface d'un miroir parfaitement poli, s'il existait un miroir de cette espèce.

493. Le plan est donc parmi les surfaces ce que la droite est parmi les lignes. Mais pour nous en former une idée plus distincte, concevons un triangle rectangle ABF, qui tourne autour de la perpendiculaire immobile AB : il est clair que si dans sa révolution la ligne BF laisse des traces de son passage, elles seront toutes dans un plan circulaire, pendant que les traces de l'oblique AF couvriront une surface convexe.

494. Il résulte de là, 1°. que si une droite quelconque a deux points communs avec un plan, tous les autres points de cette droite doivent être dans le même plan; et que parconséquent si on prolonge tout à la fois ce plan et cette droite, ils resteront toujours confondus.

495. 2°. Qu'une droite AB perpendiculaire à un plan est nécessairement perpendiculaire à toutes les droites FB, GB, DB, NB, HB, LB qui étant dans le même plan passent par l'extrémité B de cette droite.

On ne peut donc mener d'un point donné A hors d'un plan, qu'une seule perpendiculaire AB sur ce plan. Car si on en pouvait mener une autre comme AF, l'angle AFB serait droit ainsi que l'angle FBA; on pourrait donc mener du même point A deux perpendiculaires sur la même ligne FB, ce qui serait impossible. On prouverait de même que d'un point donné B dans

FIG. 82. un plan on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à ce plan.

3°. Que la distance d'un point à un plan se mesure par la perpendiculaire menée de ce point sur le plan.

4°. Que deux droites AB, MN perpendiculaires à un même plan, sont parallèles entre elles. Car alors les angles ABC, MNC sont tous deux droits. On voit même que si ces droites étaient également inclinées et dans le même sens sur le plan PQ, elles seraient encore parallèles, puisque les angles ABC, MNC seraient égaux.

496. Lorsque deux plans se coupent, il est clair que leur intersection n'a qu'une seule dimension qui est la longueur, puisque les plans sont censés n'avoir aucune épaisseur. Il est clair aussi que leur intersection est toujours une ligne droite.

497. Il est donc évident que trois points, non en ligne droite, déterminent la position d'un plan.

On voit bien, en effet, qu'une infinité de plans différens, comme HD, CG, peuvent avoir les deux points A et B communs entre eux; mais on voit en même temps qu'il n'y a qu'un seul de ces plans qui passant par les points A et B, puisse passer par le point déterminé C. Donc les trois points A, B, C déterminent la position du plan CG.

Donc, 1°. trois points ne peuvent être communs à deux plans différens, si ces points ne sont pas en ligne droite.

498. 2°. Deux droites CA et AD qui se coupent, sont dans un même plan PQ. Car les trois points C, A, D déterminent la position des deux droites AC, AD. D'où il suit qu'un angle quelconque CAD détermine la position d'un plan.

499. 3°. Si une droite AB est perpendiculaire à deux droites FB, GB dans leur point d'intersection B, elle sera perpendiculaire à leur plan PQ.

Car si on conçoit que FB tourne autour de la ligne immobile AB, elle décrira dans ce mouvement un plan perpendiculaire à AB. Or il est clair que ce plan est celui des deux droites FB, GB, puisque GB est perpendiculaire à AB.

500. Supposons maintenant que deux plans DH et CG se coupent dans la ligne AB, et menons AC dans le plan CG, perpendiculaire à AB et AD perpendiculaire à AB dans le plan DH; alors l'angle CAD sera la mesure de l'inclinaison des deux plans DH, CG. D'où l'on voit que les inclinaisons des plans les uns à l'égard des autres, se mesurent comme celles des lignes droites; ensorte que, FIG. 83.

1°. Un plan qui rencontre un autre plan fait avec lui deux angles dont la somme est de 180°.

2°. Dans l'intersection de deux plans les angles opposés au sommet sont égaux.

3°. Si un nombre quelconque de plans se coupent sur une même ligne, la somme de tous les angles qu'ils feront deux à deux, tant en dessus qu'en dessous de leur commune intersection, sera de 360°.

4°. Un plan qui coupe deux ou plusieurs plans parallèles, fait avec eux des angles correspondans égaux, etc. etc.

501. Si un plan coupe deux ou plusieurs plans parallèles, les lignes droites qui naîtront de leurs intersections seront toutes parallèles. Car si elles ne l'étaient pas, elles se rencontreraient en les prolongeant. Les plans dans lesquels elles sont, se rencontreraient donc aussi : ils ne seraient donc pas parallèles.

502. Si le plan CG est perpendiculaire au plan PQ, et si l'on mène d'un point quelconque B du plan CG la perpendiculaire BA sur la commune intersection CF, je dis que BA sera perpendiculaire au plan PQ.

Car si dans le plan PQ on mène DA perpendiculaire à CA, l'angle BAD sera droit à cause des plans perpendiculaires. Donc BA sera perpendiculaire aux deux droites CA et AD; et parconséquent (499) à leur plan PQ.

503. Si deux plans DH, CG sont perpendiculaires à un troisième PQ, leur intersection BA sera aussi perpendiculaire à ce troisième plan. Car BA est alors perpendiculaire aux deux droites CA, AD. Donc elle est perpendiculaire à leur plan PQ.

FIG.

Des Lignes droites coupées par des Plans parallèles.

84. 504. Si d'un même point A on mène à travers deux plans parallèles PQ, *pq* tant de droites que l'on voudra A*d*D, A*f*F, etc. 1°. toutes ces droites seront coupées proportionnellement; 2°. les figures DFGEH, *dfgeh* seront semblables.

Car si on fait passer un plan par les trois points A, D, F, ses intersections avec les plans parallèles PQ, *pq* seront (501) les droites parallèles DF, *df*. Donc les triangles ADF, A*df* seront semblables. On prouvera la même chose des triangles AFG et A*fg*, AEG et A*eg*, etc.; d'où il suit que

AD : A*d* :: DF : *df* :: AF : A*f* :: FG : *fg* :: AG : A*g*, etc. ::

les perpendiculaires AB et A*b* menées du même point A sur les deux plans *pq* et PQ. Donc, 1°. toutes les droites AD, AF, AG, etc. sont coupées proportionnellement par les plans PQ, *pq*.

2°. Puisque DF : *df* :: AF : A*f* :: FG : *fg*, etc. on a DF : *df* :: FG : *fg* :: EG : *eg*, etc. : or si on mène DG, *dg*, on prouvera, comme ci-dessus, que les triangles ADG, A*dg* sont semblables. Donc.....
AD : A*d* :: DG : *dg* :: DF : *df* :: FG : *fg*; les triangles DFG, *dfg* ont donc tous leurs côtés homologues proportionnels, et sont parconséquent semblables. D'où il suit que les angles F, *f* sont égaux. On prouvera la même chose des angles G et *g*, E et *e*, etc. Donc tous les angles de la figure DFGEH sont respectivement égaux à ceux de la figure *dfgeh*. D'ailleurs tous leurs côtés homologues sont proportionnels. Donc elles sont semblables.

505. De ce que l'angle F est égal à l'angle *f*, il suit que si deux angles DFG, *dfg* ont leurs côtés respectivement parallèles, ils seront égaux quoique situés dans différens plans, ce que nous avons déjà démontré pour le cas où ces angles sont dans le même plan.

Si les lignes A*d*D, A*f*F, etc. au lieu de partir d'un même point A étaient parallèles, il est clair que toutes

les lignes dD, fF, gG, etc. seraient égales entre elles et les figures DFGEH, *dfgeh* seraient égales et semblables. FIG. 84.

De ce que les figures DFGEH, *dfgeh* sont semblables, il suit que leurs surfaces sont entre elles :: $DF^2 : df^2$ :: $AD^2 : Ad^2$ :: le quarré BA^2 de la distance du point A au plan PQ est au quarré bA^2 de la distance du même point A au plan *pq*. Or le rapport de AB^2 à Ab^2 est constant pour un même point A. Donc, quel que soit le nombre des droites AD, AF, etc., les surfaces des figures DFGEH, *dfgeh* seront entre elles dans le rapport constant de AB^2 à Ab^2, et leurs périmètres seront aussi dans la raison constante de AB à A*b*.

S'il y avait un plus grand nombre de plans parallèles, ils auraient tous les mêmes propriétés.

TROISIÈME PARTIE

DES ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

506. On appelle *Solide* tout ce qui réunit les trois dimensions de l'étendue. Or pour former un solide, on peut supposer que plusieurs plans soient tellement unis par leurs angles, qu'ils enferment de tout côté un certain espace; alors on aura un polyèdre dont les faces seront les plans qui concourent à le former, et dont les angles solides résulteront du concours des angles plans.

Si le polyèdre n'a que quatre faces planes, on le nomme *Tetraèdre;* s'il en a six, c'est un *Hexaèdre*, etc., etc. Lorsque tous les angles d'un polyèdre sont égaux, et que toutes les faces sont des plans égaux et semblables, ce polyèdre est régulier.

507. On mesure les angles solides en prenant la somme des angles plans qui les forment. L'angle solide B, par exemple, a pour mesure la somme des degrés des angles plans ABC, CBD, DBE, EBA. 85.

FIG. 85. Or il est aisé de voir qu'il faut au moins trois angles plans pour former un angle solide, et que la somme de deux quelconques de ces angles est toujours plus grande que le troisième.

508. D'où il suit qu'un angle solide est moindre que 360°. Car soit la pyramide quadrangulaire BACDE, dont les faces sont les quatre triangles ABE, EBD, etc., et dont la base est le quadrilatère ACDE. Il est clair que les deux angles AEB + DEB sont plus grands que l'angle AED, avec lequel ils forment l'angle solide E; donc leur supplément est moindre que celui de l'angle AED. Par la même raison, le supplément des deux angles EAB + CAB est moindre que celui de l'angle CAE, et ainsi de suite. Donc la somme des supplémens des huit angles inférieurs des faces de la pyramide, laquelle somme est l'angle solide B, est moindre que la somme des supplémens des quatre angles de la base, qui est de 360°. L'angle solide est donc moindre que 360°.

509. Et parconséquent il ne peut y avoir que cinq polyèdres réguliers, savoir, trois dont les faces soient des triangles équilatéraux; un dont les faces soient des quarrés, et un dont les faces soient des pentagones réguliers.

Car puisqu'il faut au moins trois angles pour former un angle solide, et qu'un angle solide ne peut être de 360 degrés, il est clair qu'il n'y a que cinq cas où on puisse faire un angle solide avec des plans de polygones réguliers. 1°. L'angle d'un triangle équilatéral étant de 60 degrés, trois de ces angles font un angle solide de 180 degrés; et parconséquent quatre triangles de cette espèce peuvent faire un tétraèdre. 2°. Quatre triangles équilatéraux joints ensemble, peuvent faire un angle solide de 240 degrés, et former un corps régulier à huit faces, appelé *octaèdre*. 3°. Cinq de ces triangles joints ensemble peuvent former un angle de 300°, et parconséquent on en peut former un corps régulier à 20 faces, appelé *icosaèdre*; mais six triangles équilatéraux joints ensemble feraient 368°. 4° Chaque angle d'un quarré valant 90°, trois de ces angles feront un angle solide de 270°, et parconséquent on en pourra composer un corps régulier à six faces, appelé *hexaèdre;* mais quatre de ces angles feraient 360°, ce qui ne peut faire un angle solide. 5°. Chaque angle du pentagone régulier valant 108°, trois de ces angles joints ensemble pourront faire un angle solide de 324°, et on en pourra faire un corps régulier à 12 faces, appelé *dodécaèdre;* mais si on joignait quatre de ces angles, on aurait 432°, angle solide impossible. Enfin

l'angle

l'angle de l'hexagone régulier étant de 120°, si on en ajoute trois ensemble, la somme 360° montre qu'on ne peut faire d'angles solides, ni parconséquent de corps régulier avec des hexagones, et à plus forte raison n'en pourra-t-on pas faire avec des heptagones, des octogones, etc.; donc il ne peut y avoir que cinq corps réguliers. FIG. 85.

510. Comme il faut au moins trois angles plans pour former un angle solide, et qu'alors même ces angles laissent un vide à la base, il faut un autre plan pour le fermer. C'est pourquoi de tous les polyèdres, le plus simple est la pyramide triangulaire, ou le tétraèdre.

Si au lieu d'un triangle ou d'un quadrilatère, on suppose que la base d'une pyramide est un polygone d'un plus grand nombre de côtés, les faces de cette pyramide se multiplieront dans le même rapport, jusqu'à ce que la base étant devenue un cercle, la pyramide devienne alors un *Cône*.

Si la perpendiculaire abaissée du sommet de la pyramide sur la base, passe par le centre de cette base, la pyramide est droite. Il en est de même pour le cône : on l'appelle *droit* ou *oblique*, selon que la perpendicu- 86.
laire, menée de son sommet, passe ou ne passe point par le centre de sa base.

511. Autre manière de concevoir la formation des 87.
solides. Si la base ADHC monte parallélement à elle-même le long de GD ou AB, la somme de tous les élémens égaux à cette base forme un solide que l'on appelle *Prisme*. Il est droit ou oblique, suivant que DG est perpendiculaire ou incliné sur la base.

Le prisme est donc un solide terminé par des bases égales et parallèles, et par des faces qui sont des parallélogrammes. Sa grosseur est donc uniforme. On l'appelle *Prisme triangulaire*, lorsque le polygone générateur est un triangle; *Prisme quadrangulaire*, lorsqu'il a pour base un quadrilatère; et si ce quadrilatère est un parallélogramme, le prisme alors se nomme *Parallélipipède*. 91.

Ce sera un parallélipipède rectangle, toutes les fois 87.
que la base sera un rectangle, et que de plus la ligne le long de laquelle se fait le mouvement sera perpendiculaire à cette base.

Si la base était un quarré, dont le côté fût égal à la

116. ligne de hauteur, le prisme engendré par son mouvement
96. serait un hexaèdre régulier, que l'on appelle aussi *Cube*. Le cube est donc un prisme à six faces toutes égales et toutes quarrées. Un dé à jouer, par exemple, est un cube.

Lorsque le polygone générateur est un cercle, le prisme devient rond, et on l'appelle *Cylindre*. Il est droit ou oblique selon la position de la ligne de mouvement ou de ses côtés par rapport à la base.

90. 512. Troisième manière de former des solides. Si autour d'une ligne immobile CA, on fait tourner une figure quelconque AFBC, elle engendrera un solide appelé *solide de révolution*. Son axe est la ligne immobile CA.

Il suit de cette description qu'un point quelconque B de cette figure, trace dans son mouvement la circonférence d'un cercle dont le rayon BP est perpendiculaire à l'axe, et dont le centre est P : ce qui fait voir que toutes les sections faites dans un solide de révolution par des plans perpendiculaires à son axe, sont des cercles.

88. Si le polygone générateur est un rectangle, il engen-
86. drera un cylindre droit. Si ce n'est qu'un triangle rectangle, le solide de révolution sera un cône droit. Si c'est la moitié d'un polygone d'un grand nombre de côtés, elle produira un sphéroïde. Enfin le solide de révolution sera une sphère, si le demi-polygone qui l'engendre est un demi-cercle.

513. La sphère est donc un solide tel que tous les points de sa surface sont également éloignés d'un point en dedans que l'on nomme *centre*. D'où il suit que toute ligne droite qui passe par son centre, et qui est terminée de part et d'autre à sa surface, est égale son axe.

On peut donc prendre pour axe de la sphère toute droite qui passe par son centre, et qui aboutit des deux côtés à sa surface. Donc toutes les sections faites dans une sphère par des plans qui passent par son centre, sont des cercles égaux.

514. En général, si on coupe une sphère par un plan quelconque, la section sera toujours un cercle. Car si du centre de la sphère on mène un diamètre perpendicu-

laire au plan coupant, on pourra regarder ce diamètre 88.
comme l'axe autour duquel la sphère a été engendrée. Or dans ce cas la section est un cercle (512).

On appelle *grands cercles d'une sphère* tous ceux dont les plans passent par son centre. On appelle *petits cercles* ceux dont les plans passent au-dessus ou au-dessous du centre, et il est évident que plus ces cercles en sont éloignés, plus ils sont petits.

De la mesure des surfaces des solides.

515. Nous appellerons *surface latérale*, ou simplement *surface d'un solide* celle de ses faces, sans y comprendre celle des bases, et nous appellerons *surface totale d'un solide* celle de ses bases et de ses faces.

Un polyèdre étant terminé par des faces planes, il est aisé d'en avoir la surface. C'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas.

516. La surface d'un prisme quelconque est égale à la 91.
longueur BC, multipliée par le contour GIH de la section faite dans ce prisme par un plan perpendiculaire à BC.

Car la surface du parallélogramme..... BCED = DE × GI = BC × GI. La surface du parallélogramme ABCF = BC × IH ; enfin celle du parallélogramme AFDE = AF × GH = BC × GH. Donc la somme de tous ces parallélogrammes, ou la surface du prisme = BC × GIH.

517. De là il suit que la surface d'un prisme droit, et parconséquent celle d'un cylindre droit, est égale au produit du contour de sa base par sa hauteur, ou par la distance de ses bases parallèles.

La surface du cylindre oblique ABCD est donc aussi égale à sa 89.
longueur AB multipliée par le contour GMIMG de la section faite par un plan perpendiculaire à AB.

Or il est aisé de s'assurer que cette section est une ellipse ; en effet par un point quelconque P de l'axe GI, faisons passer un plan parallèle à la base du cylindre, son intersection avec la surface courbe sera un cercle, et son intersection avec le plan GMI sera la droite MPM perpendiculaire à l'axe GI. Cela posé, soit GP = x, PM = y, LP = z, GI = a, LK = BC = AD = b. On aura par la propriété du cercle, $yy = bz - zz$; et à cause des triangles semi-

FIG. blables LPG, PKI, $z=\frac{bx}{a}$. Donc $yy=\frac{bb}{aa}(ax-xx)$, équation à l'ellipse, dont le petit axe est b et dont le grand axe est a. (*Voyez les Sections coniques.*)

518. La surface d'une pyramide régulière est égale à la moitié du périmètre du polygone qui lui sert de base, multipliée par la perpendiculaire menée de son sommet sur l'un quelconque des côtés de la base, et que l'on nomme *Apothême*. Cela est trop évident pour avoir besoin de démonstration.

Il suit de là que la surface du cône droit est égale au produit de la demi-circonférence de sa base par son apothême, ou par la distance de son sommet à l'un quelconque des points de sa base.

92. 519. Supposons le cône droit ABC coupé par un plan DE parallèle à sa base AC, et proposons-nous de mesurer la surface du cône tronqué ACED.

Soit $AC=a$, $DE=b$, EC reste de l'apothême $BC=d$; $BE=x$, on aura $x+d:a::x:b$; d'où $x=\frac{bd}{a-b}$. Soit exprimé par $1:\pi$ le rapport du diamètre à la circonférence, on aura $b\pi$ et $a\pi$, pour les circonférences des bases DE et AC. Donc $BC\times\frac{a\pi}{2}$ et $BE\times\frac{b\pi}{2}$ seront les surfaces des cônes droits ABC, BDE; et par-conséquent leur différence, ou la surface du cône tronqué $=(x+d)\frac{a\pi}{2}-x\times\frac{b\pi}{2}=d\times\frac{\pi}{2}(a+b)$. Or $\frac{\pi}{2}(a+b)$ est la circonférence du cercle qui tient le milieu entre les bases DE et AC. Donc la surface du cône tronqué est égale au produit de ce qui reste de l'apothême, par la circonférence moyenne proportionnelle arithmétique entre celle des bases supérieure et inférieure.

93. 520. Imaginons maintenant que le demi-polygone régulier SAN tourne autour de l'axe SN qui passe par son centre C, et cherchons la surface du sphéroïde que ce demi-polygone engendre par sa révolution.

Il faut d'abord observer qu'il y a deux côtés dans ce polygone qui décrivent des cônes : ce sont les côtés BS et IN. Le seul côté AE décrit un cylindre : tous les

autres, comme BA et IE décrivent des cônes tronqués. FIG.
Or il suit de ce qui précède que la surface de l'un quel- 93.
conque de ces cônes tronqués est égale au produit du côté générateur (AB, par exemple), par la circonférence du cercle que décrit le milieu M de ce côté.

Cela posé, soit CM le rayon du cercle inscrit dans le polygone donné, et soient menées les perpendiculaires BQ, MP, AR, sur l'axe SN, et soit mené BD parallélement à QR; les triangles rectangles ABD, CPM sont semblables, puisqu'ils ont leurs côtés homologues perpendiculaires. Donc AB : BD ou QR :: CM : PM :: la circonférence qui a pour rayon CM est à la circonférence qui a pour rayon PM :: circ CM : circ PM. Donc AB × circ PM, ou la surface du cône tronqué décrit par AB = QR × circ CM.

Par un raisonnement semblable, appliqué aux solides décrits par les autres côtés du polygone, on prouve que la surface du sphéroïde est égale à

(SQ + QR + RK + KL + LN), ou SN × circ CM.

Donc la surface d'un sphéroïde quelconque est égale au produit de son axe par la circonférence du cercle auquel il est circonscrit.

Or la sphère peut être regardée comme un sphéroïde d'une infinité de côtés. Donc la surface de la sphère est égale au produit de son axe par la circonférence de l'un quelconque de ses grands cercles.

Et la surface d'une calotte sphérique produite par la 90.
révolution du demi-segment BCP est égale à l'épaisseur CP de cette calotte, multipliée par la circonférence de l'un des grands cercles de la sphère.

521. Donc, 1°. la surface de la sphère est quadruple de celle de l'un quelconque de ses grands cercles, puisqu'un grand cercle n'a pour surface que la moitié de l'axe, multipliée par la demi-circonférence.

2°. La surface de la sphère est égale à la surface convexe du cylindre circonscrit, puisqu'elles ont toutes deux pour mesure le produit de l'axe EK ou FA, par 94.
la circonférence d'un des grands cercles de la sphère, ou par la circonférence qui a pour diamètre AB.

FIG. 94. 3°. La surface de la sphère est à la surface totale du cylindre circonscrit :: 2 : 3. Car les deux bases du cylindre sont chacune égales à un grand cercle de la sphère. Donc la surface de la sphère est à la surface totale du cylindre circonscrit :: $1 : \frac{3}{2} :: 2 : 3$.

522. Si on conçoit un cône équilatéral DIL circonscrit à la sphère, sa surface totale sera à celle de la sphère :: 9 : 4.

Car soit S la surface d'un des grands cercles de la sphère, et a son diamètre, on aura $IL = a\sqrt{3}$, et AB^2 (a^2) : IL^2 ($3a^2$) :: S : la surface de la base du cône $= 3S$. Or la surface totale du cône équilateral est triple de celle de sa base, puisqu'elle est égale à $\frac{ID}{2} \times circ\ IL + \frac{IL}{4} \times circ\ IL = 3 \times \frac{1}{4}\ IL\ circ\ IL$. Cette surface est donc égale à 9S. D'ailleurs la surface de la sphère est 4S. Donc, etc.

Les surfaces totales de la sphère, du cylindre circonscrit et du cône équilatéral circonscrit, sont donc :: 4 : 6 : 9. D'où il suit que la surface du cylindre circonscrit est moyenne proportionnelle entre celle de la sphère et celle du cône équilatéral circonscrit ; on trouverait de la même manière, que la surface de la sphère est à celle du cylindre inscrit, est à celle du cône équilatéral inscrit :: 16 : 12 : 9. Donc la surface totale du cylindre inscrit est aussi moyenne proportionnelle entre celle de la sphère et celle du cône équilatéral inscrit.

523. La comparaison des surfaces de deux solides quelconques est fort aisée. Car appelant S et s ces surfaces, A et B les facteurs de la première, a et b les facteurs de la seconde, on aura toujours $S : s :: AB : ab$.

D'où il suit, 1°. que si $A = a$, on aura $S : s :: B : b$. 2°. que si $A : a :: b : B$, on aura $S = s$; 3°. que si $A : a :: B : b$. on aura $S : s :: A^2 : a^2 :: B^2 : b^2$. Ce dernier cas a lieu dans les solides semblables. On appelle ainsi ceux dont les dimensions homologues sont proportionnelles. Les sphères, par exemple, sont des solides semblables. Ainsi leurs surfaces sont entre elles, comme les quarrés de leurs rayons, ou de leurs diamètres, ou des circonférences de leurs grands cercles, et en général, comme les quarrés de leurs dimensions homologues.

De la mesure des Solides.

524. La solidité d'un corps est la portion d'étendue comprise entre ses faces. Ainsi deux cylindres de même grosseur et de même hauteur ont une même solidité,

de quelque matière qu'on les suppose, l'un de plomb massif, par exemple, l'autre de liége. Il ne faut donc pas confondre le poids d'un corps avec sa solidité. Fig. 94.

525. On sait, 1°. que pour mesurer la longueur des lignes, on se sert d'une mesure que l'on regarde comme l'unité, et que cette mesure est elle-même une ligne droite; 2°. que pour mesurer les surfaces, on a recours aussi à la plus simple d'entre elles, qui est le quarré, auquel on rapporte toutes les autres comme à leur unité. Donc pour mesurer les solidités, il n'y a qu'à voir quel est le solide le plus simple, afin de le prendre pour l'unité commune à tous.

Or le plus simple des solides est celui dont les trois dimensions sont égales, et dont chacune est égale à l'unité. C'est donc le cube qui est la mesure la plus naturelle des solidités. Aussi dit-on indifféremment la cubature ou la solidité d'un corps.

La recherche de la solidité d'un corps se réduit donc à trouver le nombre de fois qu'un cube d'une grandeur déterminée, que l'on prend alors pour l'unité de solidité, est contenu dans ce corps. Si l'on veut, par exemple, estimer un solide en pieds cubes, on imaginera un autre solide plus petit, dont la longueur, la largeur et l'épaisseur soient chacune d'un pied; ce sera un pied cube, ou l'unité à laquelle il n'y aura plus qu'à rapporter le solide proposé, pour savoir combien de fois il la contient.

526. Cela posé, cherchons la solidité d'un cube autre que celui que l'on prend pour l'unité. 95 et 96.

Je suppose que le cube à mesurer soit ABCDF, et que celui que l'on veut prendre pour sa mesure soit *abcdf*; il est clair, 1°. que l'on pourra mettre sur la base ABCD un nombre de ces petits cubes exprimé par $\frac{ABCD}{abcd} = \frac{AB^2}{ab^2}$; 2°. qu'il y aura dans le grand cube autant de tranches composées d'un nombre $\frac{AB^2}{ab^2}$ de petits cubes, qu'on pourra en mettre sur la hauteur AE; que le nombre de ces tranches sera $\frac{AE}{ae}$. Il y aura donc dans le cube ABCDF un nombre de petits cubes *abcdf*, représenté par

FIG. 95 et 96. $\frac{AB^2}{ab^2} \times \frac{AE}{ae} = \frac{AB^3}{ab^3}$; et puisque $ab = 1$, l'expression de la solidité du grand cube sera simplement AB^3.

Donc la mesure de la solidité d'un cube est le produit de l'unité de solidité par la troisième puissance d'une quelconque de ses dimensions. Un pied cube, par exemple, contient 1728 pouces cubes; une toise cube = 216 pieds cubes = 216 × 1728 pouces cubes, etc.

Proposons-nous maintenant de mesurer la solidité d'un parallélipipède rectangle HDMPI.

Pour cet effet, je suppose que sur le plus grand côté DI de ce parallélipipède, on ait construit le cube ABCDF; il est clair, 1°. que ce cube doit contenir le parallélipipède proposé, autant de fois que sa base contient celle du parallélipipède; 2°. que ce nombre de fois est exprimé par $\frac{ABCD}{HDMP} = \frac{DI^2}{HDMP}$; 3°. que la solidité du cube doit être égale à celle du parallélipipède, prise ce nombre de fois. Appelant donc x la solidité du parallélipipède, on aura

$$x \cdot \frac{DI^2}{HDMP} = DI^3;$$

d'où $x = DI \times HDMP = DI \times DH \times DM =$ le produit de la surface de sa base par sa hauteur.

527. Il suit de là que la solidité d'un prisme quelconque, droit ou oblique, est égale au produit de sa base, par la perpendiculaire abaissée d'un des points de la base supérieure sur la base inférieure, prolongée s'il est nécessaire.

97. Car soit le prisme ABCDEF, droit ou oblique, il n'importe. On peut réduire sa base à celle d'un rectangle *abcd*, sur lequel on peut former un parallélipipède rectangle *abcdf* dont la hauteur soit égale à la hauteur GO du prisme. On peut aussi diviser ces deux solides par des plans parallèles à leurs bases, et former ainsi des sections IKLMN, *iklmn* qui seront toutes égales aux bases et parconséquent égales entre elles. Or ces sections auront toujours la même propriété, à quelque point de hauteur qu'on les fasse, et leur somme est égale dans les deux solides. Donc la solidité du prisme est égale à celle du parallélipipède;

elle s'estime donc en multipliant la surface de sa base par sa hauteur. FIG. 97.

Le cercle pouvant être regardé comme un polygone d'une infinité de côtés, le cylindre peut être regardé aussi comme un prisme dont la base est un cercle; ainsi la mesure de la solidité d'un cylindre est toujours le produit de sa base par sa hauteur.

528. Soient à présent deux pyramides SABCDE, *sabc*, dont les hauteurs SF, *sf* soient égales; si l'on coupe ces pyramides par un plan parallèle à celui de leurs bases, les sections seront deux polygones IKLMN, *ikl* également éloignés des sommets S, *s*. On aura donc (505). 98.
$SF^2 : SP^2 :: ABCDE : IKLMN :: sf^2 : sp^2 :: abc : ikl$; d'où l'on tire $ABCDE : abc :: IKLMN : ikl$; et parconséquent la somme de tous les élémens IKLMN, ou la solidité de la première pyramide, est à la somme de tous les *ikl*, ou à la solidité de la seconde, comme la base ABCDE est à la base *abc*.

Cela posé, soient deux pyramides d'une même hauteur a, et appelons X la solidité de la première, B sa base; x la solidité de la seconde, b sa base : nous aurons $X : x :: B : b$, et parconséquent $X = \frac{B}{b} x$; ce qui fait voir que la solidité d'une seule pyramide une fois connue, on aura immédiatement celle de toutes les autres pyramides qui auront la même hauteur. Cherchons donc à connaître la solidité d'une pyramide de hauteur donnée.

529. Je me représente un cube comme formé par l'assemblage de six pyramides égales, qui toutes vont se réunir par leur sommet au centre du cube, et qui ont chacune pour base une de ses faces. La hauteur de ces pyramides sera donc égale à la moitié de la hauteur du cube; de manière que si la hauteur du cube est $2a$, j'aurai $8a^3$ pour l'expression de sa solidité, et parconséquent $\frac{8a^3}{6}$, ou $\frac{4a^3}{3}$, pour l'expression de la solidité x de chacune de ces pyramides. D'ailleurs leur base $b = 4a^2$; donc la formule $X = \frac{B}{b} x$, devient

FIG. 98. $X = \frac{1}{3} a B$; c'est-à-dire, que la solidité d'une pyramide quelconque est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

Donc, 1°. la pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur; 2°. la solidité du cône est aussi le tiers de celle du cylindre qui lui est circonscrit.

92. 530. Pour trouver celle du cône tronqué ADEC, menons la perpendiculaire CF sur ses bases, et supposons $AC = a$, $DE = b$, $GF = d$, le rapport du diamètre à la circonférence $= 1 : \pi$, et la partie $BG = x$. Nous aurons donc, $x : x + d :: b : a$. D'où $x = \frac{db}{a-b}$. Or les surfaces des cercles qui ont DE et AC pour diamètres, sont exprimées par $\frac{b^2\pi}{4}$ et $\frac{a^2\pi}{4}$. Donc les solidités des cônes ABC et BDE sont $(x+d)\frac{a^2\pi}{3.4}$ et $\frac{b^2\pi x}{3.4}$; et parconséquent leur différence ou la solidité du cône tronqué

$$ACDE = \frac{\pi}{3.4}[(a^2 - b^2)x + a^2 d] = \frac{\pi d}{3.4}(a^2 + b^2 + ab),$$

en mettant pour x sa valeur $\frac{bd}{a-b}$.

531. Pour mesurer la solidité d'un polyèdre, on le divisera en pyramides dont on calculera séparément la solidité. Leur somme sera celle du polyèdre proposé. Si ce polyèdre est régulier, on multipliera le rayon de la sphère à laquelle on peut le concevoir circonscrit, par le tiers de sa surface, et on aura sa solidité. Car on peut concevoir que du centre de la sphère inscrite on ait mené à tous les angles du polyèdre des droites qui le divisent en autant de pyramides égales qu'il a de faces. Or la solidité de l'une quelconque de ces pyramides est égale au tiers de sa base qui est une des faces du polyèdre, multipliée par la perpendiculaire menée de son centre sur cette face, c'est-à-dire, par le rayon de la sphère inscrite.

532. A l'égard de la sphère même, sa solidité est égale au tiers de sa surface multipliée par son rayon.

Car on peut concevoir la sphère divisée en un nombre

Digitized by Google

infini de petites pyramides, qui ont toutes pour sommets le centre même de cette sphère, et pour base une portion infiniment petite de sa surface. Or la solidité de l'une de ces pyramides est égale au produit du rayon par le tiers de la portion infiniment petite de la surface de la sphère qui lui sert de base. Donc la somme de toutes ces petites pyramides, ou la solidité de la sphère est egale au produit de son rayon par le tiers de sa surface. FIG. 92.

533. Soit s la surface d'un des grands cercles de la sphère et a son rayon, sa solidité sera $\frac{4}{3}as$. Or le cylindre circonscrit à la sphère a pour solidité $2as$. Donc la solidité de la sphère est à celle du cylindre circonscrit $:: \frac{4}{3}as : 2as :: 2 : 3$. Archimède, qui le premier découvrit ce rapport, fut frappé de son identité avec celui des surfaces des mêmes solides.

La surface de la base du cône équilatéral étant $3s$, et sa hauteur $3a$, sa solidité est $3as$. Donc la sphère est au cône équilatéral $:: 4 : 9$; rapport qui est encore le même que celui de leurs surfaces.

Si l'on conçoit un cône AEB, qui ait même hauteur que le cylindre circonscrit à la sphère, la solidité de ce cône sera le tiers de celle du cylindre. D'où il suit que le cylindre, la sphère et le cône sont alors..... $:: 3 : 2 : 1$. 91.

534. Supposons maintenant qu'un secteur circulaire BCD tourne autour du rayon DC; il décrira un secteur sphérique BCDM : or pour mesurer la solidité de ce secteur, Soit $BD = a$, $x = CP$, qui est l'épaisseur de la calotte BCM, soit $1 : \pi$ le rapport du diamètre à la circonférence. On aura $2a\pi$ pour la circonférence d'un des grands cercles de la sphère, et $2a\pi x$ sera la surface décrite par BC. Donc la solidité du secteur sphérique $BCDM = \frac{2a^2\pi x}{3}$. D'où l'on voit que dans la même sphère, les secteurs sphériques sont entre eux, comme les épaisseurs des calottes sur lesquelles ils sont appuyés. 90.

535. A l'égard de la calotte décrite par le demi-segment BCP, sa solidité est égale à celle du secteur sphérique BCMD moins celle du cône droit décrit par

FIG. 90. le triangle BPD. Or il est aisé de trouver que ce cône a pour solidité $\frac{\pi}{3}(2ax - xx)(a - x)$; donc une calotte sphérique dont l'épaisseur est x, a pour expression de sa solidité

$$\frac{\pi}{3}[2a^2x - (2ax - xx)(a - x)] = \pi x^2 (a - \tfrac{1}{3}x).$$

536. De cette dernière expression on déduit facilement celle de la solidité de la portion sphérique engendrée par la révolution du trapèze circulaire DPBF ; car en nommant z son épaisseur DP, on a tout de suite $\pi(aaz - \frac{1}{3}z^3)$ pour sa solidité. On trouve de même qu'en nommant u l'épaisseur DQ, la portion sphérique décrite par le trapèze DQNF a pour expression $\pi(aau - \frac{1}{3}u^3)$.

Il n'est donc pas difficile de connaître la solidité de la zone engendrée par le trapèze QPBN. Son expression est $\pi\left(aa(z-u) + \frac{u^3 - z^3}{3}\right)$. Or appelant g son épaisseur PQ, y son plus grand rayon, ou la plus grande ordonnée NQ, y' la plus petite BP, on a $z = u + g$; ce qui donne d'abord pour sa solidité $\pi g(aa - uu - gu - \frac{1}{3}gg)$; on a ensuite $yy = aa - uu$; d'où $yy + uu = aa = y'y' + uu + 2gu + gg$. Donc $gu = \frac{yy - y'y' - gg}{2}$; et parconséquent la solidité d'une zone quelconque $= \pi g\left(\frac{yy + y'y' + gg}{2} - \frac{gg}{3}\right) = \frac{\pi g}{6}(3yy + 3y'y' + gg)$. Ainsi quand même on ne connaîtrait pas la rayon de la sphère dont cette zone fait partie, on n'en déterminerait pas moins sa solidité.

537. Maintenant pour comparer deux solides ensemble, appelons S la solidité du premier, et A, B, C ses trois facteurs; s la solidité du second, a, b, c ses facteurs. Nous aurons donc $S : s :: ABC : abc$. D'où il suit, 1°. que si $A = a$, $S : s :: BC : bc$. 2°. Que lorsque $A : a :: bc : BC$, on a $S = s$. 3°. Que dans les solides semblables, $S : s :: A^3 : a^3 :: B^3 : b^3 :: C^3 : c^3$; ensorte, par exemple, que les solides des sphères sont entre elles comme les cubes de leurs rayons, ou de leurs diamètres, ou de leurs dimensions homologues quelconques.

Il suit de là que les solidités des sphères sont proportionnelles aux cubes de leurs rayons, tandis que les surfaces des cercles sont proportionnelles aux quarrés des rayons, et que les circonférences suivent le rapport simple des rayons.

FIG.

APPLICATION DES PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE ET D'ALGÈBRE AU CALCUL DES SINUS ET A LA TRIGONOMÉTRIE.

Il était naturel de chercher à réduire toutes les figures rectilignes au triangle, parceque le triangle est la plus simple de toutes ces figures. Aussi voyons-nous que les anciens Géomètres avaient déjà ramené l'arpentage à ce point de simplicité : ils partageaient en triangle les terrains qu'ils avaient à mesurer. De là vient le nom de Trigonométrie à la science qui apprend à résoudre les triangles.

Quand ils sont formés par des lignes droites, on l'appelle *Trigonométrie rectiligne*. Quand ces triangles sont formés par des arcs de cercle, on l'appelle *Trigonométrie sphérique*. L'une et l'autre Trigonométrie sont d'une grande utilité : mais pour être en état d'en juger, il faut commencer par se rendre familière la théorie des *sinus*.

DU CALCUL DES SINUS.

538. On appelle *sinus* d'un arc ou d'un angle, toute 99
ligne qui partant d'une des deux extrémités de cet arc ou de cet angle, tombe perpendiculairement sur le rayon ou le diamètre qui passe par l'autre extrémité. Ainsi la perpendiculaire BD, menée de l'extrémité B de l'arc BA, sur le rayon CA, qui passe par l'autre extrémité A, se nomme le *sinus* de l'arc AB, ou de l'angle ACB que cet arc mesure.

539. Si EB est le complément de l'arc BA, son sinus GB est le sinus de complément, ou le *cosinus* de l'arc AB. Or il est clair que CD = BG, et que BD = GC.

FIG. 99. 540. La perpendiculaire AT menée par le point A sur le rayon CA jusqu'à la rencontre du rayon CB prolongé, se nomme la *tangente* de l'arc AB et CT en est la *sécante*. De même la tangente EM de l'arc EB est la tangente de complément, ou la *cotangente* de l'arc AB, et CM est la *cosécante*.

On nomme encore *sinus verse* et *cosinus verse* les lignes AD, EG; mais on s'en sert rarement.

Pour abréger, nous écrirons *sin*, *cos*, *tang*, *cot*, *séc*, *coséc*, *sin v*, *cos v*; au lieu de sinus, cosinus, tangente, cotangente, sécante, cosécante, sinus verse et cosinus verse.

541. Il suit de la définition des sinus, que le *sinus* d'un arc quelconque est la moitié de la corde d'un arc double. Car si on prolonge BD jusqu'en F, BD sera la moitié de BF, corde du double de l'arc BA.

Et c'est de là, pour le dire en passant, que vient probablement la dénomination des sinus; car autrefois les cordes d'un cercle s'appelaient *inscriptæ*, et leurs moitiés, ou *semisses inscriptæ*, se désignaient par S. *ins*. On finit donc par prononcer *sinus* dans un temps, où la plupart des mots se terminaient en *us*.

De ce que le sinus d'un arc est la moitié de la corde qui soutend un arc double, il suit évidemment que le sinus d'un arc de 30° est la moitié du rayon (420).

542. La définition des sinus fait voir avec la même clarté, que le sinus d'un angle aigu quelconque BCA est le même que celui de l'angle obtus *a*CB, qui lui sert de supplément.

543. Quant au cosinus d'un angle obtus, il est toujours négatif. Il en est de même de sa tangente, cotangente, sécante, etc.

544. On voit bien que les sinus croissent depuis 0°, auquel cas leur cosinus est égal au rayon, jusqu'à 90°. Alors le sinus devient égal au rayon, et le cosinus s'évanouit. Les sinus décroissent ensuite depuis 90° jusqu'à 180°, où ils deviennent nuls, pendant que leur cosinus devient égal au rayon pris négativement.

545. On voit également que les tangentes et les sécantes croissent depuis 0, où la tangente est nulle, pen-

dant que la sécante est égale au rayon, jusqu'à 90°, où la tangente et la sécante deviennent égales, parallèles, et parconséquent infinies. La cotangente est alors nulle, et la cosécante égale au rayon. FIG. 99.

Depuis 90° jusqu'à 180°, elles décroissent de plus en plus; mais elles sont négatives. Lorsqu'elles ont atteint 180°, la tangente s'évanouit, et la sécante devient égale au rayon pris négativement. Dans ce même point, la cotangente et la cosécante deviennent égales et infinies négatives.

546. La tangente de 45° est égale au rayon, ainsi que la cotangente : car alors les triangles rectangles CEM, CTA deviennent égaux et isoscèles.

547. Cela posé, soit l'arc BA = A, le rayon CB = CA = 1 (supposition que nous ferons désormais, afin de rendre le calcul plus facile), on aura, à cause des triangles rectangles et semblables CBD, CGB, CTA, CEM, les proportions et les équations suivantes.

I. $CD^2 + BD^2 = CB^2$; ou

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 = \sin^2 B + \cos^2 B$$

(B étant un autre arc quelconque). Donc

$$\sin A + \sin B : \cos B + \cos A :: \cos B - \cos A : \sin A - \sin B.$$

II. $CT^2 - AT^2 = AC^2 \ldots\ldots \text{séc}^2 A - \text{tang}^2 A = 1.$

III. $CE^2 = CM^2 - EM^2$

$$1 = \text{coséc}^2 A - \cot^2 A = \text{séc}^2 A - \text{tang}^2 A.$$

IV. $CD : BD :: CA : AT \ldots\ldots \cos A : \sin A :: 1 : \text{tang } A.$ Donc

$$\sin A = \cos A \times \text{tang } A \ldots \cos A = \frac{\sin A}{\text{tang } A} \ldots \text{tang } A = \frac{\sin A}{\cos A}.$$

V. $CB : BD :: CT : AT \ldots\ldots 1 : \sin A :: \text{séc } A : \text{tang } A.$ Donc

$$\text{séc } A = \frac{\text{tang } A}{\sin A} = \frac{1}{\cos A}.$$

VI. $CG : GB :: CE : EM.$

$$\sin A : \cos A :: 1 : \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\text{tang } A}$$

Donc

$$\cot A \times \text{tang } A = 1;$$

FIG. 100. 548. Soit proposé maintenant de déterminer le sinus et le cosinus de la somme de deux arcs donnés AB et BE.

Je nomme s le sinus BD de l'arc AB ; c son cosinus CD ; s' le sinus EG de l'arc EB ; c' son cosinus CG ; enfin x le cosinus cherché CF $=$ cos (AB $+$ BE); et y le sinus EF $=$ sin (AB $+$ BE).

Cela posé, à cause des triangles semblables CBD, CFH, EGH, on aura

$$\mathrm{CD}\,(c) : \mathrm{CF}\,(x) :: \mathrm{CB}\,(1) : \mathrm{CH} = \frac{x}{c} :: \mathrm{BD}\,(s) : \mathrm{FH} = \frac{sx}{c}.$$

Ensuite

$$\mathrm{CD}\,(c) : \mathrm{EG}\,(s') :: \mathrm{BD}\,(s) : \mathrm{GH}\left(c' - \frac{x}{c}\right) :: \mathrm{CB}\,(1) : \mathrm{EH}\left(y - \frac{sx}{c}\right).$$

Donc

$$s's = cc' - x, \text{ et } s' = cy - sx.$$

La première équation donne $x = cc' - ss'$, et substituant cette valeur dans la seconde, on a (en faisant attention que $1 - s^2 = c^2$), $y = sc' + s'c$. Donc en général a et b étant deux arcs quelconques, on a

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

549. Soit $a + b = c$, on aura

$$\sin c = \sin a \cos(c-a) + \cos a \sin(c-a).$$
$$\cos c = \cos a \cos(c-a) - \sin a \sin(c-a).$$

Or en traitant sin $(c-a)$ et cos $(c-a)$ comme des inconnues, on trouve

$$\sin(c-a) = \sin c \cos a - \sin a \cos c,$$

et $$\cos(c-a) = \cos c \cos a + \sin a \sin c.$$

Donc en général

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

En faisant $a = b$, on a $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, et $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$ (en mettant pour $\sin^2 a$, sa valeur $1 - \cos^2 a$). Il est donc bien facile d'avoir le sinus et le cosinus du double d'un arc dont on connaît déjà le sinus et le cosinus.

On

On trouve avec la même facilité le sinus et le cosinus de la moitié de cet arc. Car si on fait $2a = c$, on aura FIG. 100

$$\sin c = 2 \sin \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} c, \text{ et } \cos c + 1 = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} c.$$

Donc

$$\cos \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos c}{2}\right)}, \text{ et } \frac{\sin c}{2 \cos \frac{1}{2} c},$$

ou

$$\sin \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin c}{\sqrt{2(1+\cos c)}}, = \sqrt{\left(\frac{1-\cos^2 c}{2(1+\cos c)}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1-\cos c}{2}\right)}.$$

Mais comme ces formules supposent que les sinus et cosinus sont déjà connus, il faut, avant d'aller plus loin, apprendre à les connaître.

550. Et d'abord, il est clair que si on calcule les sinus de tous les arcs compris dans un quart de cercle, depuis l'arc de 1″ jusqu'à l'arc de 90°, on connoîtra tous les sinus, depuis celui de 1″, jusqu'à celui de 180° (542). Or depuis 180° jusqu'à 360°, les sinus sont les mêmes que depuis 0° jusqu'à 180, au signe près qui est négatif. Donc le calcul des sinus se réduit à celui des sinus d'un quart de cercle.

Il est clair ensuite que les cosinus peuvent aisément se déterminer par la formule $\cos a = \sqrt{(1 - \sin^2 a)}$. Occupons-nous donc seulement du calcul des sinus.

On sait (485) que le rayon étant 1, l'arc de 90° est représenté par 1,5707963267948 96 etc.; donc l'arc de 1″ est de 0,000004848 etc. partie du rayon; et comme un arc aussi petit ne diffère pas sensiblement de son sinus, on a pris 0,000004848 etc. pour sinus de l'arc de 1″. On a doublé, triplé cette fraction, et on a eu les sinus de 2″, de 3″., etc.

On aurait pu calculer le sinus de 2″, puis celui de 3″, etc. par les formules $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$; mais on a trouvé que la différence entre des arcs aussi petits et leurs sinus était trop insensible, pour ne pas prendre chacun de ses arcs au lieu de son sinus respectif.

En s'élevant ainsi des secondes jusqu'aux minutes, et en continuant le calcul depuis les minutes jusqu'aux

210. degrés, par le moyen des deux formules précédentes, on
100. parvient au sinus de 30°. Ce sinus devant être égal à la moitié du rayon, on peut vérifier par là les calculs antérieurs; et on se trouve avoir tous les sinus depuis celui d'une seconde jusqu'à celui de 30°. Mais pour ne pas trop grossir le volume des tables, on n'y a fait entrer que les sinus des minutes et des degrés.

551. Supposons maintenant que $a = 30°$, on aura

$$\sin(30° + b) = \sin 30° \cos b + \cos 30° \sin b.$$

Or

$$\sin 30° = \tfrac{1}{2} \ldots \text{ et } \cos 3° = \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Donc

$$\sin(30° + b) = \tfrac{1}{2} \sin b \sqrt{3} + \tfrac{1}{2} \cos b,$$

et

$$\sin(30° - b) = \tfrac{1}{2} \cos b - \tfrac{1}{2} \sin b \sqrt{3}.$$

Donc

$$\sin(30° + b) = \sin(30° - b) + \sin b \sqrt{3}.$$

Il suit de là que connaissant tous les sinus depuis 0° jusqu'à 30°, on a facilement tous ceux qui sont depuis 30° jusqu'à 60°.

552. Cela posé, soit $a = 60°$, on aura

$$\sin(60° + b) = \tfrac{1}{2} \cos b \sqrt{3} + \tfrac{1}{2} \sin b.$$

et

$$\sin(60° - b) = \tfrac{1}{2} \cos b \sqrt{3} - \tfrac{1}{2} \sin b.$$

Donc

$$\sin(60° + b) = \sin(60° - b) + \sin b.$$

Par exemple,

$$\sin 66° = \sin 54° + \sin 6°.$$

Connaissant donc les sinus des arcs qui sont entre 30° et 60°, on aura tout de suite ceux qui sont depuis 60° jusqu'à 90°; ce qui complétera ce genre de calcul.

553. Reprenons les deux formules

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$

et ajoutons-les ensemble, nous aurons

$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2} \sin(a + b) + \tfrac{1}{2} \sin(a - b).$$

En soustrayant la seconde de la première, nous trouverons

$$\sin b \cos a = \tfrac{1}{2} \sin (a+b) - \tfrac{1}{2} \sin (a-b).$$

Faisant les mêmes opérations sur les deux autres formules

$$\cos (a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos (a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

on en déduira

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2} \cos (a+b) + \tfrac{1}{2} \cos (a-b)$$
$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2} \cos (a-b) - \tfrac{1}{2} \cos (a+b).$$

Ces quatre dernières formules sont utiles quand on veut transformer des produits de sinus en sinus simples. Les quatre suivantes servent à substituer à des sommes ou à des différences de sinus, des produits d'autres sinus, afin que le calcul par logarithmes puisse s'y appliquer.

554. Soit $a+b=p \ldots a-b=q$, on aura

$$a = \frac{p+q}{2} \ldots . b = \frac{p-q}{2}.$$

Donc

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}.$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}.$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}.$$

$$\cos q - \cos p = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

555. Supposons dans les deux premières formules $p = 90°$, et dans les deux dernières $q = 0$, nous aurons

$$1 + \sin q = 2 \sin (45° + \tfrac{1}{2} q) \cos (45° - \tfrac{1}{2} q) = 2 \sin^2 (45° + \tfrac{1}{2} q).$$
$$1 - \sin q = 2 \sin (45° - \tfrac{1}{2} q) \cos (45° + \tfrac{1}{2} q) = 2 \sin^2 (45° - \tfrac{1}{2} q).$$
$$= 2 \cos^2 (45° + \tfrac{1}{2} q) = \cos \text{v}.q.$$
$$1 + \cos p = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} p.$$
$$1 - \cos p = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} p = \sin \text{v}.p.$$

556. Divisons maintenant les formules du n° 554, les unes par les autres, nous aurons

$$\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q}=\frac{\sin\frac{p+q}{2}}{\cos\frac{p+q}{2}}\times\frac{\cos\frac{p-q}{2}}{\sin\frac{p-q}{2}}=\tang\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}=\frac{\tang\frac{p+q}{2}}{\tang\frac{p-q}{2}}.$$

$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q}=\tang\frac{p+q}{2}. \qquad \frac{\sin p-\sin q}{\cos p+\cos q}=\tang\frac{p-q}{2}.$$

$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos q-\cos p}=\cot.\frac{p-q}{2} \qquad \frac{\sin p-\sin q}{\cos q-\cos p}=\cot\frac{p+q}{2}.$$

$$\frac{\cos p+\cos q}{\cos q-\cos p}=\cot\frac{p+q}{2}\cot\frac{p-q}{2}.$$

557. En divisant de même les unes par les autres, quelques-unes des formules du n° 555, on trouve

$$\frac{1+\sin q}{1-\sin q}=\frac{\sin^2(45^\circ+\frac{1}{2}q)}{\sin^2(45^\circ-\frac{1}{2}q)}=\frac{\sin^2(45^\circ+\frac{1}{2}q)}{\cos^2(45^\circ+\frac{1}{2}q)}=\tang^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}q).$$

$$\frac{1+\cos p}{1-\cos p}=\frac{\cos^2\frac{1}{2}p}{\sin^2\frac{1}{2}p}=\cot^2\tfrac{1}{2}p.$$

$$\frac{1+\sin q}{1+\cos p}=\frac{\sin^2(45^\circ+\frac{1}{2}q)}{\cos^2\frac{1}{2}p}.$$

$$\frac{1-\sin q}{1-\cos q}=\frac{\cos v.q}{\sin v.q}=\frac{\sin^2(45^\circ-\frac{1}{2}q)}{\sin^2\frac{1}{2}q}.$$

558. Reprenons encore une fois les valeurs de $\sin(a+b)$, ,$\sin(a+b)\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, nous en déduirons

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\sin a\cos b-\sin b\cos a}=\frac{\frac{\sin a\cos b}{\sin a\sin b}+\frac{\sin b\cos a}{\sin a\sin b}}{\frac{\sin a\cos b}{\sin a\sin b}-\frac{\sin b\cos a}{\sin a\sin b}}$$

$$=\frac{\frac{\cos b}{\sin b}+\frac{\cos a}{\sin a}}{\frac{\cos b}{\sin b}-\frac{\cos a}{\sin a}}=\frac{\cot b+\cot a}{\cot b-\cot a}=\frac{\frac{1}{\tang b}+\frac{1}{\tang a}}{\frac{1}{\tang b}-\frac{1}{\tang a}}=\frac{\tang a+\tang b}{\tang a-\tang b}.$$

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a-b)}=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b+\sin a\sin b}=\frac{\frac{\cos b}{\sin b}+\frac{\cos a}{\sin a}}{\frac{\cos a\cos b}{\sin a\sin b}+1}=\frac{\cot b+\cot a}{1+\cot b\cot a}$$

$$=\frac{\tang a+\tang b}{1+\tang a\tang b}.$$

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b-\sin b\cos a}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}=\frac{\cot b-\cot a}{\cot b\cot a-1}=\frac{\tang a-\tang b}{1-\tang a\tang b}.$$

$$\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)}=\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\cos a\cos b+\sin a\sin b}=\frac{\cot b-\tang a}{\cot b-\tang a}=\frac{1-\tang a\tang b}{1+\tang a\tang b}$$

$$=\frac{\cot a-\tang b}{\cot a+\tang b}.$$

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\tang(a+b)=\frac{\tang a+\tang b}{1-\tang a\tang b}=\frac{\cot a+\cot b}{\cot a\cot b-1}.$$

Donc $\cot(a+b)=\frac{1}{\tang(a+b)}=\frac{1-\tang a\tang b}{\tang a+\tang b}=\frac{\cot a\cot b-1}{\cot a+\cot b}.$

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}=\tang(a-b)=\frac{\tang a-\tang b}{1+\tang a\tang b}=\frac{\cot b-\cot a}{\cot b\cot a+1}.$$

Donc $\cot(a-b)=\frac{1+\tang a\tang b}{\tang a-\tang b}=\frac{\cot b\cot a+1}{\cot b-\cot a}.$

559. Soit $a=45°$, on aura

$$\tang(45°+b)=\frac{1+\tang b}{1-\tang b}=\frac{\cot b+1}{\cot b-1},$$

et

$$\tang(45°-b)=\frac{1-\tang b}{1+\tang b}=\cot(45°+b)=\frac{\cot b-1}{\cot b+1}.$$

Si l'on fait $a=b=\frac{1}{2}c$, on aura

$$\tang 2a=\frac{2\tang a}{1-\tang^2 a}\text{ ou }\tang c=\frac{2\tang\frac{1}{2}c}{1-\tang^2\frac{1}{2}c},$$

et

$$\cot 2a=\frac{1-\tang^2 a}{2\tang a}=\tfrac{1}{2}\cot a-\tfrac{1}{2}\tang a.$$

Donc

$\cot c=\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}\tang\frac{1}{2}c$, et $\cot\frac{1}{2}c=2\cot c+\tang\frac{1}{2}c$.

Or (549)

$$\tang\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\left(\frac{1-\cos c}{1+\cos c}\right)}=\frac{1-\cos c}{\sin c}.$$

560. Puisque $\text{séc}\,a=\frac{1}{\cos a}$, et $\text{cosec}\,a=\frac{1}{\sin a}$, on a

$$\text{séc}(a+b)=\frac{1}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}=\frac{\frac{1}{\cos a\cos b}}{1-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}=\frac{\text{séc}\,a\,\text{séc}\,b}{1-\tang a\tang b}$$

$$=\frac{\text{cosec}\,a\,\text{cosec}\,b}{\cot a\cot b-1}.$$

$$\text{Séc}\,(a-b)=\frac{\text{séc}\,a\,\text{séc}\,b}{1+\text{tang}\,a\,\text{tang}\,b}.$$

$$\text{Coséc}\,(a+b)=\frac{\text{coséc}\,a\,\text{coséc}\,b}{\cot b+\cot a}.$$

$$\text{Coséc}\,(a-b)=\frac{\text{coséc}\,a\,\text{coséc}\,b}{\cot b-\cot a}.$$

561. Soit $a=b$, on aura

$$\text{coséc}\,2a=\frac{\text{coséc}^2 a}{2\cot a}=\frac{1+\cot^2 a}{2\cot a}=\frac{\cot a+\text{tang}\,a}{2}.$$

Donc

$$\text{coséc}\,a=\frac{\cot\frac{1}{2}a+\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{2}.$$

Or

$$\cot\tfrac{1}{2}a=2\cot a+\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a\ (559).$$

Donc

$$\text{coséc}\,a=\cot a+\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a=\frac{\cot\frac{1}{2}a+\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{2}=\cot\tfrac{1}{2}a-\cot a,$$

en mettant pour $\text{tang}\,\frac{1}{2}a$ sa valeur $\cot\frac{1}{2}a-2\cot a$.

On a aussi

$$\text{séc}\,2a=\frac{\text{séc}^2 a}{1-\text{tang}^2 a}=\frac{1+\text{tang}^2 a}{1-\text{tang}^2 a}=\frac{(1+\text{tang}\,a)^2}{1-\text{tang}^2 a}-\frac{2\,\text{tang}\,a}{1-\text{tang}^2 a}$$
$$=\frac{1+\text{tang}\,a}{1-\text{tang}\,a}-\frac{2\,\text{tang}\,a}{1-\text{tang}^2 a}.$$

Mais

$$\frac{1+\text{tang}\,a}{1-\text{tang}\,a}=\text{tang}\,(45^\circ+a),\ \text{et}\ \frac{2\,\text{tang}\,a}{1-\text{tang}^2 a}=\text{tang}\,2a.$$

Donc

$$\text{séc}\,2a=\text{tang}\,(45^\circ+a)-\text{tang}\,2a,$$

et

$$\text{séc}\,a=\text{tang}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}a)-\text{tang}\,a=\cot\,(45^\circ-\tfrac{1}{2}a)-\text{tang}\,a.$$

De ce que $\text{séc}\,a=\frac{1}{\cos a}$, et que $\text{coséc}\,a=\frac{1}{\sin a}$, on a $\text{séc}\,a=\text{tang}\,a\,\text{coséc}\,a$; et en substituant toutes les valeurs de $\text{coséc}\,a$ trouvées ci-dessus, on aura

$$\text{séc}\,a=\frac{\text{tang}\,a}{2}(\cot\tfrac{1}{2}a+\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a)=\text{tang}\,a\,(\cot a+\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a)$$
$$=1+\text{tang}\,a\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}a=\text{tang}\,a\,(\cot\tfrac{1}{2}a-\cot a)$$
$$=\text{tang}\,a\cot\tfrac{1}{2}a-1=\frac{\text{tang}\,a}{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}-1.$$

Au reste, toutes ces formules peuvent être variées d'une infinité de manières, en les ajoutant, sous-

trayant, divisant, etc. Mais il est inutile d'insister sur une matière aussi facile : voyez l'introduction à l'analyse des Infinis par Euler.

Du calcul des tables de Sinus par les séries.

Il est arrivé pour les tables des Sinus, ce qui était déjà arrivé pour les tables des Logarithmes. Les premiers calculateurs avaient fini depuis long-temps leur travail, lorsqu'on imagina des moyens de le simplifier. Ces moyens cependant n'en sont pas moins ingénieux, comme on peut en juger par celui que Jean Bernoulli propose dans le IIe volume de ses ouvrages. En voici à peu près l'analyse.

562. Si l'on remonte à la valeur de tang $(a+b)$ en en déduira facilement.

$$\text{tang}\,(A+B+C)=\frac{\text{tang}\,(A+B)+\text{tang}\,C}{1-\text{tang}\,C\,\text{tang}\,(A+B)}.$$

Soient donc a, b, c les tangentes respectives des arcs A, B, C; on aura.

$$\text{tang}\,(A+B+C)=\frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc}.$$

Pareillement, si a, b, c, d sont les tangentes respectives des quatre arcs A, B, C, D, on aura.

$$\text{tang}\,(A+B+C+D)=\frac{a+b+c+d-abc-abd-acd-bcd}{1-ab-ac-ad-bc-bd-cd+abcd}.$$

D'où il suit en général, que si on a un nombre quelconque d'arcs A, B, C, D, etc. on aura en nommant s la somme de leurs tangentes, s^{ii} leurs produits deux à deux, s^{iii} leurs produits trois à trois, etc.

$$\text{tang}\,(A+B+C+D+\text{etc.})=\frac{s-s^{iii}+s^{v}-s^{vii}+\text{etc.}}{1-s^{ii}+s^{iv}-s^{vi}+\text{etc.}}.$$

Supposons pour un moment que tous les arcs A, B, C, etc. soient égaux, si l'on nomme n leur nombre, tang A la tangente de l'un quelconque de ces arcs, on aura (313)

$$s^{ii}=\frac{n.n-1}{2}\,\text{tang}^2A\ldots s^{iii}=\frac{n.n-1.n-2}{2.3}\,\text{tang}^3A\ldots$$

$$s^{iv}=\frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}\,\text{tang}^4A,\ \text{etc.}$$

On a donc généralement

$$\tang nA = \frac{n\tang A - \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\tang^3 A + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{2.3.4.5}\tang^5 A - \text{etc.}}{1 - \frac{n.n-1}{2}\tang^2 A + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}\tang^4 A - \text{etc.}}$$

$$= \frac{n\frac{\sin A}{\cos A} - \frac{n.n-1.n-2.\sin^3 A}{2.3.\cos^3 A} + \text{etc.}}{1 - \frac{n.n-1.\sin^2 A}{2.\cos^2 A} + \text{etc.}}$$

$$= \frac{n\cos^{n-1} A \sin A - \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\cos^{n-3} A \sin^3 A + \text{etc.}}{\cos^n A - \frac{n.n-1}{2}\cos^{n-2} A \sin^2 A + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}\cos^{n-4} A \sin^4 A - \text{etc.}}$$

Soit N le numérateur de cette dernière quantité, soit D le dénominateur; on aura, en faisant le calcul

$$N^2 + D^2 = \cos^{2n} A + n\cos^{2n-2} A \sin^2 A + \frac{n.n-1}{2}\cos^{2n-4} A \sin^4 A + \ldots \sin^{2n} A = (\cos^2 A + \sin^2 A)^n = 1.$$

Mais puisque d'un côté on a $N^2 + D^2 = 1$, et que de l'autre on a $\frac{N^2}{D^2} = \tang^2 nA = \frac{\sin^2 nA}{\cos^2 nA}$, il est clair que $N = \sin nA$, et que $D = \cos nA$; on a donc en général

$$\sin nA = n\cos^{n-1} A \sin A - \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\cos^{n-3} A \sin^3 A + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{2.3.4.5}\cos^{n-5} A \sin^5 A - \text{etc.}$$

$$\cos nA = \cos^n A - \frac{n.n-1}{2}\cos^{n-2} A \sin^2 A + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}\cos^{n-4} A \sin^4 A - \text{etc.}$$

Supposons maintenant que l'arc A soit infiniment petit, ensorte qu'il faille que n soit infini pour que l'arc n A soit d'une grandeur finie a, on aura 1°. $\sin A = A$, parceque l'arc infiniment petit ne diffère pas de son sinus.

On aura, 2°..... $\cos A = 1$, parceque le cosinus d'un arc infiniment petit est égal au rayon. On aura, 3°.... $n-1 = n = n-2 = n-3$, etc., parceque n est infini; on aura enfin $A = \frac{a}{n}$. Ces valeurs étant sub-

stituées dans les formules précédentes, donnent

$$\sin a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{a^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \text{etc.}$$

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6} + \frac{a^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \text{etc.}$$

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \text{tang}\, a = \frac{a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{a^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} - \text{etc.}}{1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6} + \frac{a^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \text{etc.}}$$

$$\frac{\cos a}{\sin a} = \cot a = \frac{1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}}{a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}}$$

563. Soit maintenant l'arc a une partie quelconque $\frac{1}{m}$ de 90°. ; comme l'arc de 90° = 1,5707963267948 96 etc. on aura, en appelant c ce nombre

$$\sin \frac{90°}{m} = \frac{c}{m} - \frac{c^3}{2.3.m^3} + \frac{c^5}{2.3.4.5.m^5} - \frac{c^7}{2.3.4.5.6.7.m^7} + \frac{c^9}{2.3...9.m^9} - \text{etc.}$$

TERMES POSITIFS.	TERMES NÉGATIFS.
$= \frac{1}{m}.1,5707963267948 96$	$\frac{1}{m^3}.0,6459640975062 46$
$\frac{1}{m^5}.0,0796926262461 67$	$\frac{1}{m^7}\ 0,0046817541353 18$
$\frac{1}{m^9}.0,0001604411847 87$	$\frac{1}{m^{11}}.0,0000035988432 35$
$\frac{1}{m^{13}}.0,0000000569217 29$	$\frac{1}{m^{15}}.0,0000000006688 03$
$\frac{1}{m^{17}}.0,0000000000060 66$	$\frac{1}{m^{18}}.0,0000000000000 43$
etc.	etc.

On aura de même la valeur d'un cosinus quelconque par la formule suivante

$$\cos \frac{90°}{m} = 1 - \frac{c^2}{2m^2} + \frac{c^4}{2.3.4m^4} - \frac{c^6}{2.3.4\ 5.6m^6} + \text{etc.}$$

qui, en substituant les valeurs des puissances de c, donne

TERMES POSITIFS.	TERMES NÉGATIFS.
$1 + \frac{1}{m^4} . 0,253669507901048$	$\frac{1}{m^2} . 1,233700550136169$
$\frac{1}{m^8} . 0,000919260274839$	$\frac{1}{m^6} . 0,020863480763352$
$\frac{1}{m^{12}} . 0,000000471087477$	$\frac{1}{m^{10}} . 0,000025202042373$
$\frac{1}{m^{16}} . 0,000000000065659$	$\frac{1}{m^{14}} . 0,000000006386603$
$\frac{1}{m^{20}} . 0,000000000000003$	$\frac{1}{m^{18}} . 0,000000000000529$
etc.	etc.

564. Il en est de même pour tang $\frac{90°}{m}$, et pour cot $\frac{90°}{m}$. On peut donc par le moyen de ces séries calculer les sinus et les tangentes de tous les arcs ; il n'y a qu'à substituer les valeurs convenables de m. Par exemple, pour calculer le sinus de l'arc de 30°, on fera $m = 3$, et on aura

$$\begin{array}{rl}
\text{Sin } 30° = & 0,523\ 598\ 775\ 598\ 299 \\
+ & 0,000\ 327\ 953\ 194\ 428 \\
+ & 0,000\ 000\ 008\ 151\ 256 \\
+ & 0,000\ 000\ 000\ 000\ 036 \\
\hline
+ & 0,523\ 926\ 736\ 944\ 019 \\
\hline
- & 0,023\ 924\ 596\ 203\ 935 \\
- & 0,000\ 002\ 140\ 719\ 769 \\
- & 0,000\ 000\ 000\ 020\ 315 \\
\hline
- & 0,023\ 926\ 736\ 944\ 019 \\
\hline
\end{array}$$

Donc sin 30° = 0,5 ; comme on le sait d'ailleurs (541).

Au reste, comme il suffit de calculer les sinus jusqu'à 30° pour avoir tous les autres, la fraction $\frac{1}{m}$ sera toujours plus petite que $\frac{1}{3}$: ensorte que la série égale à sin $\frac{90°}{m}$ sera très-convergente. Veut-on, par exemple, avoir le sinus de 9° ? On fera $m = 10$, et on trouvera aussitôt sin 9° = 0,156434465040231.

Si on proposait de trouver le sinus d'un arc d'un certain nombre de degrés, avec des minutes, des se-

condes, etc.; il est clair qu'on pourrait le trouver par la même méthode.

565. Les sinus que l'on a par ce calcul, conviennent à un cercle dont le rayon $= 1$, et parconséquent, pour avoir ceux qui conviendraient à un cercle dont le rayon serait a, il faudrait multiplier les premiers par a.

Dans les tables ordinaires, on suppose que le rayon $= 10\,000\,000\,000$, et pour faciliter le calcul, on y a mis les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes, cotangentes, depuis 1′ jusqu'à 90°, en exceptant ceux des arcs où il entre des secondes, parcequ'il est facile d'en trouver les sinus, cosinus, etc. comme on peut le voir dans les tables déjà citées (290).

566. Quant aux sécantes et cosécantes, on n'en a point fait de tables particulières, parceque leur usage est peu fréquent, et qu'il est aisé d'ailleurs de les calculer par le moyen des formules sec $a = \frac{1}{\cos a}$ et .... cosec $a = \frac{1}{\sin a}$, qui deviennent pour le rayon R des tables sec $a = \frac{R^2}{\cos a}$ et cosec $a = \frac{R^2}{\sin a}$; d'où l'on tire Log. sec $a = 2LR - L \cos a = 20{,}0000000 - L \cos a$, et L cosec $a = 20{,}0000000 - L \sin a$.

567. Après avoir résolu généralement ce problême : étant donné un arc, trouver son sinus, son cosinus, sa tangente, etc., il nous reste à donner la solution du problême inverse : étant donné le sinus, ou le cosinus, la tangente ou la cotangente d'un arc, trouver la longueur de cet arc.

Si l'on donne le cosinus ou la cotangente, on a immédiatement le sinus et la tangente. Ainsi le problême se réduit à trouver la longueur d'un arc dont on donne le sinus ou la tangente.

Or 1°. si l'on remonte à la valeur de sin a, on en déduira par la méthode inverse des séries (284)

$$a = \sin a + \frac{\sin^3 a}{2.3} + \frac{3 \sin^5 a}{2.4.5} + \frac{3.5.\sin^7 a}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.\sin^9 a}{2.4.6.8.9} + \text{etc.}$$

2°. Si l'on nomme t la tangente de l'arc a, on aura (562)

$$t=\frac{a-\frac{a^3}{2.3}+\frac{a^5}{2.3.4.5}-\text{etc.}}{1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{2.3.4}-\text{etc.}},\ \text{ou}\ t=a+\frac{a^2t}{2}-\frac{a^3}{2.3}-\frac{a^4t}{2.3.4}+\text{etc.}$$

Soit $a=At+Bt^3+Ct^5$ etc., on aura en substituant et déterminant les inconnues A, B, C, etc. $A=1$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{1}{5}$, etc. D'où

$$a=\text{tang}\,a-\frac{\text{tang}^3\,a}{3}+\frac{\text{tang}^5\,a}{5}-\frac{\text{tang}^7\,a}{7}+\text{etc.}$$

568. Ces deux séries donnent donc la solution du problême proposé. Appliquons-les maintenant à la recherche du rapport du diamètre à la circonférence.

Si on fait $\sin a=\frac{1}{2}$, on aura la longueur de l'arc de

$$30^\circ.=\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3.2^3}+\frac{3}{2.4.5.2^5}+\frac{3.5}{2.4.6.7.2^7}+\text{etc.}$$

Cette quantité multipliée par 6 donnerait la demi-circonférence, et parconséquent le rapport cherché; mais comme cette série, toute convergente qu'elle est, est assez longue à calculer, il vaut mieux se servir de la seconde qui donne, en supposant l'arc a de 45°.... $a=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+$ etc. Et parceque la marche de celle-ci est encore trop lente, on a imaginé un moyen plus expéditif pour avoir la longueur de ce même arc de 45°.

569. Ce moyen consiste à décomposer l'arc de 45° en deux autres arcs que nous appellerons a et b, et à chercher séparément leur longueur. Or, dans cette supposition, $\text{tang}\,(a+b)=1=\frac{\text{tang}\,a+\text{tang}\,b}{1-\text{tang}\,a\,\text{tang}\,b}$. Donc $\text{tang}\,a=\frac{1-\text{tang}\,b}{1+\text{tang}\,b}$. Soit $\text{tang}\,b=\frac{1}{3}$, on aura $\text{tang}\,a=\frac{1}{2}$. La somme des arcs a et b, ou le quart de la demi-circonférence π sera donc

$$\frac{\pi}{4}=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}-\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{5.2^5}-\frac{1}{7.2^7}+\frac{1}{9.2^9}-\text{etc.}\\ +\frac{1}{3}-\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}-\frac{1}{7.3^7}+\frac{1}{9.3^9}-\text{etc.}\end{array}\right\}=0,7853981633974483\ \text{etc.}$$

d'où l'on tire $\pi=3,14159265358979 32$ etc.; et le rapport du diamètre à la circonférence, comme on l'a donné (484).

570. Avant de terminer cette matière, nous remarquerons que les formules déjà trouvées pour les valeurs de tang nA, sin nA, etc. peuvent servir à trouver les sinus, cosinus, tangentes, cotangentes des arcs multiples. Car faisant $\sin a=s$, $\cos a=c$, $\text{tang}\,a=t$, on aura la table suivante :

$\sin a = s.$ $\sin 2a = 2sc.$ $\sin 3a = 3sc^2 - s^3.$ $\sin 4a = 4sc^3 - 4cs^3.$ $\sin 5a = 5sc^4 - 10s^3c^2 + s^5$ etc.	$\cos a = c.$ $\cos 2a = c^2 - s^2.$ $\cos 3a = c^3 - 3cs^2.$ $\cos 4a = c^4 - 6c^2s^2 + s^4.$ $\cos 5a = c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4.$ etc.
$\text{tang } a = t.$ $\text{tang } 2a = \frac{2t}{1-tt}.$ $\text{tang } 3a = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}.$ $\text{tang } 4a = \frac{4t-4t^3}{1-6tt+t^4}.$ $\text{tang } 5a = \frac{5t-10t^3+t^5}{1-10t^2+5t^4}.$ etc.	$\cot a = \frac{1}{t}.$ $\cot 2a = \frac{1-tt}{2t}.$ $\cot 3a = \frac{1-3tt}{3t-t^3}.$ $\cot 4a = \frac{1-6tt+t^4}{4t-4t^3}.$ $\cot 5a = \frac{1-10t^2+5t^4}{5t-10t^3+t^5}.$ etc.

571. On peut aussi par le moyen des mêmes formules trouver les équations qui servent à diviser un arc ou un angle quelconque en un nombre donné de parties égales. Car alors sin (nA) est connu, et on cherche sin A. Soit donc sin (nA) $= b$, sin A $= x$, et cos A $= z$; on aura cette équation à résoudre

$$b = nz^{n-1}x - \frac{n.n-1.n-2}{2.3}z^{n-3}x^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{2.3.4.5}z^{n-5}x^5 - \text{etc.}$$

Ainsi en donnant à n les valeurs successives 2, 3, 4, 5, etc. les équations suivantes serviront à diviser un arc en autant de parties égales.

$b = 2zx = 2x\sqrt{(1-x^2)}$ ..... pour 2 parties.
$b = 3z^2x - x^3 = 3x - 4x^3$ 3
$b = 4z^3x - 4zx^3 = (4x - 8x^3)\sqrt{(1-xx)}$ 4
$b = 5z^4x - 10z^2x^3 + x^5 = 5x - 20x^3 + 16x^5$ ... 5
etc.

572. Pour faire quelque application de ces principes, nous allons donner la méthode de résoudre par approximation toute équation du troisième degré dans le cas irréductible.

Selon ce que nous venons de voir, si a est un arc dont le sinus $= b$, on aura sin $\frac{1}{3}a$, ou x, en résolvant cette équation $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}b = 0$, et lorsque le rayon du cercle, au lieu d'être $= 1$, sera $= r$, on aura $x^3 - \frac{3}{4}r^2x + \frac{1}{4}br^3 = 0$.

Observons maintenant que les arcs $180° - a$, $-(180° + a)$ ont le même sinus que l'arc a, ensorte que pour les diviser en trois

parties égales, on a la même équation $x^3 - \frac{3}{4}r^2x + \frac{1}{4}br^3 = 0$, à résoudre; d'où il suit que les trois racines de cette équation, sont $\sin\frac{1}{3}a$, $\sin\frac{180^\circ - a}{3}$, $-\sin\frac{180^\circ + a}{3}$, ou $\sin\frac{1}{3}a$, $\sin(60^\circ - \frac{1}{3}a)$, $-\sin(60^\circ + \frac{1}{3}a)$.

Cela posé, soit l'équation à résoudre $x^3 - px + q = 0$ (si elle était $x^3 - px - q = 0$, il serait facile de la ramener à la forme précédente, en faisant $x = -y$); en comparant cette équation à $x^3 - \frac{3}{4}r^2x + \frac{1}{4}br^3 = 0$, on a $\frac{3}{4}r^2 = p$, $\frac{1}{4}br^3 = q$, d'où l'on tire $r = 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, $b = \frac{3q}{p}$. Donc si l'on décrit un cercle dont le rayon soit $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, l'arc de ce cercle qui aura pour sinus $\frac{3q}{p}$, étant nommé a, on aura $\sin\frac{1}{3}a$, $\sin(60^\circ - \frac{1}{3}a)$, $-\sin(60^\circ + \frac{1}{3}a)$ pour les trois valeurs de x. Mais tout sinus doit être plus petit que le rayon; il faut donc que $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$ surpasse $\frac{3q}{p}$, ou que $\frac{1}{27}p^3$ soit plus grand que $\frac{1}{4}q^2$. D'où il suit que toutes les équations du troisième degré dans le cas irréductible, sont résolubles par cette méthode.

573. Représentons par R le rayon des tables, et nous aurons $\frac{R \times 3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}$ pour le sinus tabulaire de l'arc a, ou $\sin a = \frac{R \times 3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}$. Or a étant connu, $\sin\frac{1}{3}a$, $\sin(60^\circ - \frac{1}{3}a)$, $-\sin(60^\circ + \frac{1}{3}a)$ le seront aussi, et parconséquent les trois racines de la proposée seront (en ramenant ces sinus à ceux qui conviennent au rayon $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$),

$$x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}\sin\frac{1}{3}a,\quad x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}\sin(60^\circ - \tfrac{1}{3}a),$$

$$x = \frac{-2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{R}\sin(60^\circ + \tfrac{1}{3}a).$$

Ex. I. Soit l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$, qui donne $p = 3$, $q = 1$; d'où $\sin a = \frac{1}{2}R$, et $a = 30^\circ$. Les trois valeurs de x sont donc

$$x = \frac{2\sin 10^\circ}{R} = 0{,}3472964;\quad x = \frac{2\sin 50^\circ}{R} = 1{,}5320888;$$

$$x = -\frac{2\sin 70^\circ}{R} = -1{,}8793852.$$

Ex. II. Soit $x^3 - x + \frac{1}{3} = 0$, on aura $p = 1$, $q = \frac{1}{3}$, $\sin a = \frac{R}{2}\sqrt{3}$. Donc $a = 60^\circ$, etc. Les trois valeurs de x sont

$$x = \frac{2\sin 20^\circ}{R\sqrt{3}} = 0{,}394931;\quad x = \frac{2\sin 40^\circ}{R\sqrt{3}} = 0{,}742227;$$

$$x = -\frac{2\sin 80^\circ}{R\sqrt{3}} = -1{,}137158.$$

Ex. III. Soit encore l'équation $x^3 - 5x + 3 = 0$, qui donne

$$p = 5,\ q = 3,\ \sin a = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{3^5}{5^3}},$$

et FIG.

$L \sin a = LR + \frac{5}{2} L3 - L2 - \frac{3}{2} L5 = 9,843318 = L \sin 44°11'52''$,

donc $a = 44°11'52''$, et les trois valeurs de l'inconnue sont

$$x = \frac{2\sqrt{5} \sin (14°43'57'')}{R\sqrt{3}}, \quad x = \frac{2\sqrt{5} \sin (45°16'3'')}{R\sqrt{3}},$$

$$x = \frac{-2\sqrt{5} \sin (74°43'57'')}{R\sqrt{3}}.$$

En faisant le calcul, on trouvera

$$x = 0,656617 ; \quad x = 1,834246, \quad x = -2,490863.$$

Remarque. Quoiqu'il y ait une infinité d'autres arcs dont les sinus soient les mêmes que celui de l'arc a, ils sont tels cependant que les sinus de leurs tiers peuvent se ramener à l'une de ces trois formes, $\sin \frac{1}{3} a$, $\sin (60° - \frac{1}{3} a)$, $-\sin (60° + \frac{1}{3} a)$. Ainsi l'équation du troisième degré, résolue par cette méthode, n'aura jamais que trois racines, comme cela doit être.

Résolution des Triangles Rectilignes.

574. Tout triangle rectiligne peut être inscrit dans un cercle, et dans ce cas chaque côté de ce triangle sera la corde d'un arc double de celui qui mesure l'angle opposé, c'est-à-dire, le double du sinus de cet angle mesuré dans ce cercle : donc les côtés du triangle seront entre eux comme les sinus des angles opposés, mesurés dans ce même cercle, et parconséquent comme les sinus des mêmes angles mesurés dans le cercle qui a pour rayon celui des tables. On a donc cette proposition dont l'usage est si fréquent dans la pratique de la Trigonométrie.

Dans tout triangle les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés à ces mêmes angles.

575. Donc, 1°. dans tout triangle rectangle BAC, le 101.
sinus de l'angle droit A, ou le rayon, est l'hypoténuse BC :: sin C : AB :: sin B : AC

2°. Puisque dans tous les triangles rectangles le sinus d'un angle aigu C est le cosinus de l'autre angle aigu B, on a donc sin C = cos B, et réciproquement. Donc au lieu de la proposition sin B : sin C :: AC : AB, on pourra

FIG. toujours substituer celle-ci :

$$\sin B : \cos B :: AC : AB.$$

Mais on a d'ailleurs (546) $\sin B : \cos B :: \text{tang } B : R$; donc $AC : AB :: \text{tang } B : R :: \cot C : R$.

Il n'en faut pas davantage pour résoudre le triangle rectangle ABC, quand outre l'angle droit A on connaît deux de ces cinq choses B, C, AB, AC, BC, pourvu cependant que ce ne soient pas les deux angles. Car alors on ne pourrait connaître que le rapport des trois côtés. *Voyez la table suivante.*

Table pour la résolution des Triangles rectangles.

101.

Etant donnés	Trouver	FORMULES.
AB, AC	BC B C	$BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2)}$. $AB : AC :: R : \text{tang } B$. $AC : AB :: R : \text{tang } C$.
AB, BC	AC B C	$AC = \sqrt{(BC^2 - AB^2)}$. $BC : AB :: R : \cos B$. $BC : AB :: R : \sin C$.
AC, BC	AB B C	$AB = \sqrt{(BC^2 - AC^2)}$. $BC : AC :: R : \sin B$. $BC : AC :: R : \cos C$.
AB, B	AC BC	$R : \text{tang } B :: AB : AC$. $\cos B : R :: AB : BC$.
AC, B	AB BC	$R : \cot B :: AC : AB$. $\sin B : R :: AC : BC$.
AB, C	AC BC	$R : \cot C :: AB : AC$. $\sin C : R :: AB : BC$.
AC, C	AB BC	$R : \text{tang } C :: AC : AB$. $\cos C : R :: AC : BC$.
BC, B	AB AC	$R : \cos B :: BC : AB$. $R : \sin B :: BC : AC$.
BC, C	AB AC	$R : \sin C :: BC : AB$. $R : \cos C :: BC : AC$.

Quant

Quant aux triangles obliquangles, ou qui n'ont pas d'angle droit, leur solution se réduit à celle des problêmes suivans.

576. I. Etant donnés deux angles quelconques B, A, et un côté BC, trouver les deux autres côtés AC, BA.

Faites la proportion

$$\sin A : BC :: \sin B : AC = \frac{BC \times \sin B}{\sin A} :: \sin C : AB :: \sin (A+B) : AB = \frac{BC.\sin (A+B)}{\sin A}.$$

Si BA eût été le côté donné, on aurait eu

$$\sin (A+B) : BA :: \sin B : AC :: \sin A : BC.$$

Supposons, par exemple, $A = 88°$, $B = 36°$, et BC de 56 toises, on trouvera

$$\text{Log } AB = L\,56 + L \sin 56° - L \sin 88° = 1,667027;$$

d'où $AB = 46',454$, on trouvera de même $AC = 32',936$.

577. II. Etant donnés deux côtés et un angle, trouver l'autre côté et les deux autres angles, sachant d'ailleurs de quelle espèce ils sont.

Ou l'angle donné est opposé à l'un des côtés connus, ou il est compris entre ces mêmes côtés, ce qui fait deux cas différens.

I. Cas. Soient donnés les côtés AB et AC avec l'angle B, on aura d'abord l'angle C par cette proportion $AC : \sin B :: AB : \sin C$; ce qui fera connaître le troisième angle A. On aura donc ensuite le côté BC par la proportion $\sin B : AC :: \sin A : BC$.

Mais pour trouver immédiatement le côté BC, soit menée la perpendiculaire AD sur le côté BC, et soit nommé AB (a), AC (b), sin B (s), cos B (c), on aura

$$R : AB\ (a) :: \sin B\ (s) : AD = \frac{as}{R} :: \cos B\ (c) : BD = \frac{ac}{R};$$

Donc

$$DC = \sqrt{(AC^2 - AD^2)} = \sqrt{\left(bb - \frac{a^2s^2}{R^2}\right)};$$

et

$$DC + BD = BC = \frac{ac}{R} + \sqrt{\left(bb - \frac{a^2s^2}{R^2}\right)}.$$

578. II. Cas. On donne l'angle A et les deux côtés

FIG. AB, AC qui comprennent cet angle ; il s'agit de trouver les deux autres angles B et C, et le troisième côté BC.

Donc

$$AC + AB : AC - AB :: \sin B + \sin C : \sin B - \sin C.$$

Or (556)

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C} = \frac{\tang \frac{1}{2}(B+C)}{\tang \frac{1}{2}(B-C)}.$$

Donc

$$AC + AB : AC - AB :: \tang \tfrac{1}{2}(B+C) : \tang \tfrac{1}{2}(B-C).$$

Mais puisque $B + C = 180° - A$, on a donc

$$\tang \tfrac{1}{2}(B+C) = \tang(90° - \tfrac{1}{2}A) = \cot \tfrac{1}{2}A;$$
$$AC + AB : AC - AB :: \cot \tfrac{1}{2}A : \tang \tfrac{1}{2}(B-C).$$

Et parconséquent connaissant $B - C$ et $B + C$, il sera facile d'avoir les angles B et C, et on aura

$$\sin B : AC :: \sin A : BC,$$

ce qui fera connaître le troisième côté BC.

102. On peut encore résoudre ce problême de la manière suivante. Soit menée la perpendiculaire BF sur le côté AC, et soit $AB = a$, $AC = b$, $\sin A = s$, $\cos A = c$, on aura $R : a :: s : BF = \frac{as}{R} :: c : AF = \frac{ac}{R}$. Donc $FC = b - \frac{a}{R}$. Or dans le triangle rectangle BFC, on a $FC\left(b - \frac{ac}{R}\right) : BF\left(\frac{as}{R}\right) :: R : \tang C = \frac{aRs}{bR - ac}$. De même $\tang B = \frac{bRs}{aR - bc}$. Si l'angle A est obtus, c devient négatif, et on a $\tang C = \frac{aRs}{bR + ac}$, et $\tang B = \frac{bRs}{aR + bc}$.

Le triangle rectangle BFC donne

$$BC = \sqrt{\left[\frac{a^2s^2}{R^2} + \left(b - \frac{ac}{R}\right)^2\right]} = \sqrt{\left(a^2 + b^2 - \frac{2abc}{R}\right)},$$

ou $\sqrt{\left(a^2 + b^2 + \frac{2abc}{R}\right)}$ si l'angle A est obtus.

579. De la proportion

$$AC + AB : AC - AB :: \tang \tfrac{1}{2}(B+C) : \tang \tfrac{1}{2}(B-C),$$

il suit que dans tout triangle la somme de deux côtés

quelconques est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ses côtés est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles. FIG. 102.

Soit donc $AC = a$, $AB = d$, l'angle $B = b$, l'angle $C = c$; on aura

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(b+c) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(b-c) :: a+d : a-d :: R : \frac{a-d}{a+d}R$$

$$:: R : \frac{\frac{a}{d}R - R}{\frac{a}{d}+1}.$$

Donc si $\frac{aR}{d}$ représente la tangente d'un arc quelconque u, on aura $R : \frac{R\,\text{tang}\,u - RR}{\text{tang}\,u + R}$, ou

$$R : \text{tang}\,(u - 45^\circ) :: \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(b+c) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(b-c).$$

D'où il suit que si on fait cette proportion : le plus petit côté AB est au plus grand AC :: R : la tangente d'un arc quelconque u, et si on ôte 45° de cet angle, le rayon sera à la tangente du reste :: $\text{tang}\,\frac{1}{2}(b+c) : \text{tang}\,\frac{1}{2}(b-c)$.

580. III. Etant donnés les trois côtés d'un triangle, trouver ses trois angles.

Soit $BC = a \ldots AB = b \ldots AC = d \ldots R = 1$, on aura

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab}.$$

Donc

$$1 - \cos B = \frac{d^2 - a^2 + 2ab - b^2}{2ab} = \frac{d^2 - (a-b)^2}{2ab} = 2\sin^2\tfrac{1}{2}B;$$

d'où on peut tirer cette proportion

$$ab : \frac{d-a+b}{2} \times \frac{d+a-b}{2} :: R^2 : \sin^2\tfrac{1}{2}B,$$

laquelle, en appelant q le demi-périmètre, devient

$$ab : (q-a)(q-b) :: R^2 : \sin^2\tfrac{1}{2}B.$$

Et c'est par là que l'on calcule ordinairement la valeur d'un angle par les trois côtés.

On peut la calculer aussi par la formule $\cos B = \frac{R}{2ab}(a^2+b^2-d^2)$ qui donne

$$2ab : a^2 + b^2 - d^2 :: R : \cos B.$$

C'est-à-dire, que pour trouver un angle quelconque dans un triangle dont on connaît les trois côtés, il faut d'abord faire la somme des quarrés des deux côtés qui comprennent l'angle que l'on cherche,

Fig. et retrancher de cette somme le quarré du troisième côté : cela vous donnera un reste. Il faut ensuite faire cette proportion : Le double du rectangle des côtés qui comprennent l'angle cherché est à ce reste, comme le rayon est au cosinus de l'angle cherché.

Si l'angle B est obtus, on aura $\cos B = \frac{R}{2ab}(d^2 - a^2 - b^2)$. Supposons, par exemple, $a = 25$ toises... $b = 36$... $d = 40$, nous aurons $a^2 + b^2 - d^2 = 321$.... $2ab = 50 \times 36$. Donc $50 \times 36 : 321$, ou $6 : 1{,}07 :: R : \cos B$, et $L \cos B = 10.0000000 + L\,1{,}07 - L\,6 = 9{,}251233$. Donc l'angle B est de $79° 43' 38''$.

103. 581. On aurait pu trouver la même formule d'une autre manière. Soit F le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, et FG son rayon, en gardant les mêmes dénominations que ci-dessus, faisant de plus $q =$ la moitié du périmètre $a + b + d$, on aura (492) $BG = q - d$, et le rayon $FG = \sqrt{\left(\frac{q-a.q-b.q-d}{q}\right)}$. Or dans le triangle rectangle BFG, on a $BG : FG :: R : \tang FBG = \tang \frac{1}{2} B$; ou $BG^2 : FG^2 :: R^2 : \tang^2 \frac{1}{2} B :: (q-d)^2 . q : q - a . q - b . q - d$ ou $q.q - d : q - a.q - b :: R^2 : \tang^2 \frac{1}{2} B$; formule qui donnerait l'angle B. Mais comme elle est moins simple que la suivante, nous ne nous y arrêterons pas.

Si l'on substitue à la place de q sa valeur $\frac{a+b+d}{2}$, on aura

$$(a+b)^2 - d^2 : d^2 - (a-b)^2 :: R^2 : \tang^2 \tfrac{1}{2} B.$$

Donc

$$(a+b)^2 - (a-b)^2,$$

ou

$$4ab : a^2 + 2ab + bb - dd :: R^2 + \tang^2 \tfrac{1}{2} B : R^2 :: \sec^2 \tfrac{1}{2} B : R^2$$

$$:: R^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} B :: R^2 : \frac{R \times (R + \cos B)}{2} :: 2R : R + \cos B,$$

ou

$$2ab : a^2 + 2ab + bb - dd :: R : R + \cos B.$$

Donc

$$2ab : a^2 + b^2 - d^2 :: R : \cos B = \frac{R}{2ab}(a^2 + b^2 - d^2,$$

comme ci-dessus.

582. Tels sont les principes de la Trigonométrie. On peut les appliquer à plusieurs autres problêmes sur les triangles ; mais pour ne pas multiplier les exemples, nous n'en ferons qu'une seule application.

Etant donné l'un des angles aigus d'un triangle rectangle avec sa surface, trouver ses trois côtés.

Soit a l'angle donné, x le côté opposé, y l'autre

côté, s la surface du triangle, on aura $xy = 2s$, et 513.
$x : y :: \sin a : \cos a$. Donc 103.

$$xy = \frac{y^2 \sin a}{\cos a} = 2s,$$

et

$$y = \sqrt{\left(\frac{2s \cos a}{\sin a}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2s \cot a}{R}\right)}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{2s \sin a}{\cos a}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2s \tang a}{R}\right)};$$

donc l'hypoténuse

$$= \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{\left(\frac{2s R^2}{\cos a \sin a}\right)} = 2\sqrt{\left(\frac{Rs}{\sin 2a}\right)}.$$

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

583. Imaginez que le demi-cercle PAp fasse une révolution autour 104.
de son diamètre Pp, et engendre, en tournant, la sphère APAp; il est clair que le rayon AC décrira un grand cercle, pendant que les lignes bd, ef en décriront de plus ou moins petits, suivant qu'elles seront plus ou moins éloignées du rayon AC.

584. Tout autre demi-grand cercle égal au premier, le demi-cercle APA, par exemple, eût engendré la même sphère dans sa révolution autour du diamètre AA. Donc puisqu'il y a une infinité de diamètres égaux, autour desquels la révolution peut également se faire, il est clair qu'il y a une infinité de grands cercles dans chaque sphère, et qu'ils sont tous égaux.

Il y en a aussi une infinité de petits; mais leur inégalité est cause que l'on ne s'en sert point dans la Trigonométrie sphérique.

585. On appelle ainsi la science qui apprend à résoudre les triangles formés sur la surface d'une sphère par trois de ses grands cercles.

Prenez une boule quelconque, tracez-y trois arcs de cercles, dont les plans passent par son centre (513); ces arcs, par leur rencontre, formeront un triangle sphérique : ils en seront les côtés.

Chacun de ces arcs appartient donc à un cercle qui a pour centre le centre même de la boule, et à travers duquel on peut supposer que passe perpendiculairement un des diamètres de cette boule.

586. Un diamètre ainsi perpendiculaire au plan d'un grand cercle, s'appelle l'*Axe* de ce cercle. Les deux extrémités de l'axe s'appellent *les Pôles* de ce même cercle : d'où il suit que les points P, p sont les pôles du cercle ACA.

Chaque grand cercle de la sphère a donc ses deux pôles particuliers, puisque deux grands cercles ne sauraient avoir le même axe.

FIG. 104. 587. Et puisque l'axe d'un cercle doit toujours être perpendiculaire à son plan, et passer par son centre, il est évident, 1°. qu'il y forme autant d'angles droits qu'il y a de rayons dans le plan de ce cercle.

2°. Que les arcs qui mesurent ces angles sont tous de 90°, et parconséquent égaux, puisqu'ils appartiennent à des cercles égaux. Leurs cordes sont donc égales.

Or ces cordes mesurent les distances du pôle de ce cercle aux divers points de sa circonférence. Donc le pôle d'un cercle quelconque est également éloigné de tous les points de sa circonférence.

588. Ainsi on peut dire que le pôle d'un cercle est un point de la surface de la sphère, éloigné de 90° de chaque point de la circonférence de ce cercle : ou, ce qui revient au même, l'arc compris entre le pôle d'un cercle et chaque point de sa circonférence est toujours de 90°.

Il est donc bien facile de tracer sur la surface d'une sphère le cercle dont un des deux pôles est connu, et réciproquement de trouver les pôles d'un cercle donné. On a des compas sphériques avec lesquels on résout très-facilement ce double probleme.

589. Puisque tous les grands cercles de la sphère ont un centre commun, la ligne de leur intersection est nécessairement un diamètre de la sphère, lequel est en même temps diamètre de tous ces cercles. Or tout diamètre coupe son cercle en deux parties égales; donc deux ou plusieurs grands cercles se coupent en parties égales.

Et parconséquent, 1°. si deux arcs de grands cercles se sont déjà coupés une fois, ils ne se couperont plus qu'à 180° de distance du premier point de leur intersection.

Il n'est donc pas possible d'enfermer entre deux arcs seulement la moindre portion d'une surface sphérique, à moins qu'ils ne soient chacun de 180°.

Au reste, quel que soit le nombre de leurs degrés, ils formeront sur la surface de la sphère un angle dont il importe de connaître la mesure. Nous allons la chercher.

105. 590. Soient les deux arcs AB et AD que je suppose de 90° chacun, et qui par leur rencontre en A forment l'angle sphérique BAD.

Il est clair, 1°. que les rayons BC et DC sont l'un et l'autre perpendiculaires sur AC.

2° Que ces deux rayons ont entre eux la même inclinaison que les plans circulaires ACB et ACD auxquels ils appartiennent.

3°. Que la mesure de cette inclinaison est l'arc BD, puisque l'angle BCD a son sommet au centre.

591. Donc la mesure d'un angle sphérique quelconque est l'arc de grand cercle compris entre ses côtés, à 90° de distance du sommet de cet angle.

En général, si du sommet d'un angle sphérique, pris pour pôle, on décrit un arc de grand cercle, la portion de cet arc, comprise entre les côtés de l'angle, sera toujours sa mesure.

Ce n'est pas qu'il ne fût également possible de le mesurer par des

arcs de petits cercles; car on voit bien que l'angle *bcd*, par exemple, formé par les sinus des arcs A*b* et A*d* est égal à l'angle BCD, et que parconséquent l'arc *bd* qui lui sert de mesure, est du même nombre de degrés que l'arc BD. Mais pour l'uniformité, on a mieux aimé prendre les valeurs des angles sphériques, sur les grands cercles décrits de leurs sommets comme pôles. FIG. 105.

592. Les angles sphériques sont donc toujours égaux à ceux que forment, à 90° de distance de leur sommet, les sinus des arcs qu'ils ont pour côtés. Or tout angle formé par deux sinus, doit avoir moins de 180°; donc tout angle sphérique a moins de 180°.

593. De ce que les angles sphériques sont égaux à ceux que forment les sinus de leurs côtés, il suit évidemment, 1°. que lorsqu'un arc de grand cercle tombe sur un autre, les deux angles qui en résultent sont égaux à deux angles droits.

2°. Que si on prolonge ces deux arcs au-delà de leur point d'intersection, les angles opposés au sommet sont égaux, comme ceux de leurs sinus prolongés de même.

3°. Que la somme des angles formés autour d'un point d'intersection est de 360°.

594. Supposons maintenant que les trois cercles dont les côtés d'un triangle sphérique font partie, soient décrits en entier, il est clair qu'ils formeront sur l'autre hémisphère, un triangle parfaitement égal au premier. Il est clair aussi qu'en menant les cordes respectives de tous les arcs qui forment ces deux triangles sphériques, il en résultera deux triangles rectilignes parfaitement égaux en tout, l'un au-dessus, l'autre au-dessous du centre de la sphère.

Mais on sait que dans un triangle rectiligne quelconque *abc*, la somme de deux côtés est plus grande que le troisième côté. Donc la somme de deux arcs, dans tout triangle sphérique ABC, est plus grande que le troisième arc. 106.

On sait aussi que la ligne droite est la plus courte de celles que l'on peut mener d'un point à un autre. Donc l'arc de grand cercle qui passe par deux points de la surface de la sphère, est le plus court que l'on puisse mener entre ces deux points. Il en mesure donc la distance sphérique.

595. Nous avons dit (589) qu'il n'était pas possible d'enfermer de tout côté aucune portion de surface sphérique entre deux arcs seulement, à moins qu'ils ne fussent chacun de 180°. Donc tout triangle sphérique CAB résulte de l'intersection de deux arcs coupés par un troisième, avant que ces deux arcs se réunissent. Or ils ne peuvent se réunir qu'à 180° de distance de leur premier point de rencontre; donc chaque côté d'un triangle sphérique quelconque doit avoir moins de 180°. 107.

596. Si on prolonge les deux arcs CA et CB du triangle CAB jusqu'à leur réunion en D, il est évident que AB sera plus petit que la somme des prolongemens AD et DB. Or cette somme ajoutée aux deux arcs prolongés CA et CB, n'est que de 360°. Donc la somme des côtés d'un triangle sphérique est toujours moindre que 360°.

FIG. 107. 597. Quant à la somme de ses angles, il est évident qu'elle ne peut jamais être de six angles droits, puisque chaque angle doit avoir moins de 180°. Elle a donc une limite en plus, qui est 540°; mais n'aurait-elle pas aussi une limite en moins ? c'est ce que nous allons chercher.

598. Des trois angles A, B, C pris successivement pour pôles, soient décrits les arcs EF, DF et DE, qui par leur rencontre forment le triangle extérieur FCE.

Cette construction nous fait voir, 1°. que le point A est éloigné de 90° de tous les points de l'arc EF; 2°. que le point B est pareillement à 90° de tous les points de l'arc DF : donc F est le pôle de l'arc AB.

On prouve de même que les points E et D sont respectivement les pôles des arcs CA et CB.

Cela posé, soient prolongés ces deux arcs CA et CB jusqu'à la rencontre de l'arc DE : on aura EG = 90°, ainsi que DH; donc EG + DH, ou, ce qui revient au même, EG + DG + GH, ou bien encore, ED + GH = 180°. L'arc ED est donc le supplément de l'arc GH, et parconséquent, de l'angle C dont GH est la mesure (591).

On prouverait de la même manière, que les arcs EF et DF sont les supplemens respectifs des angles A et B.

Prolongeons maintenant l'arc GC jusqu'à la rencontre de l'arc EF; nous verrons que GI sera la mesure de l'angle E, et que la partie AC en sera le supplément, puisque GC + AI, ou GI + AC = 180°. L'arc AB sera de même le supplément de l'angle F, et l'arc BC sera le supplément de l'angle D; d'où nous pouvons généralement conclure que si des trois angles d'un triangle sphérique quelconque, pris pour pôles, on décrit trois arcs dont la rencontre forme un nouveau triangle sphérique, les angles et les côtés de ce dernier triangle seront réciproquement les supplémens des côtés et des angles qui leur sont opposés dans le premier.

Ainsi l'angle E du triangle extérieur + l'arc AC qui lui est opposé dans le triangle intérieur, ont 180° pour mesure : et réciproquement l'arc DE du triangle extérieur + l'angle C qui lui est opposé dans le triangle intérieur, ont aussi pour mesure 180°, etc.

599. Ce triangle extérieur DEF s'appelle le triangle supplémentaire du triangle ABC. On en fait un grand usage dans la Trigonométrie sphérique, et nous allons nous-mêmes l'appliquer à la recherche de la limite en moins, pour la valeur des trois angles A, B, C.

Ces trois angles ont pour supplémens respectifs les trois côtés du triangle supplémentaire. Ils forment donc avec eux la valeur de six angles droits. Or la somme de ces trois côtés est toujours moindre que quatre angles droits (596). Donc la somme des trois angles A, B, C est nécessairement plus grande que 180°.

600. Il résulte de là, 1°. que la somme des angles d'un triangle sphérique peut varier depuis 180° jusqu'à 540, exclusivement. Et que parconsequent il n'est pas possible de déduire la valeur du troi-

sième angle, de celle des deux autres, comme cela se pratique pour les triangles rectilignes. FIG. 108.

Il résulte, 2°. que les trois angles d'un triangle sphérique peuvent être droits ou même obtus, et à plus forte raison aigus, pourvu que dans ce dernier cas leur somme surpasse au moins 180°.

601. S'il fallait juger du rapport de deux triangles sphériques dont les trois angles seraient respectivement égaux, on aurait recours à leurs triangles supplémentaires, et on dirait : Les côtés de ces derniers triangles ne peuvent qu'être égaux, chacun à chacun, puisqu'ils sont les supplémens respectifs d'angles égaux. Or cette égalité des trois côtés entraîne celle des trois angles (404). Les deux triangles supplémentaires sont donc parfaitement égaux : leurs angles ont donc des supplémens égaux. Mais ces supplémens sont les côtés mêmes des triangles proposés. Donc deux triangles sphériques sont égaux, toutes les fois que leurs trois angles sont respectivement égaux.

C'est une propriété remarquable des triangles sphériques; elle n'a pas lieu, comme on le sait, dans les triangles rectilignes, dont on ne peut jamais, en pareil cas, conclure autre chose que la similitude.

D'ailleurs l'égalité entre deux triangles sphériques a lieu encore, soit lorsque deux côtés respectivement égaux forment un angle égal dans chaque triangle, soit lorsque deux angles de l'un, égaux à deux angles de l'autre, sont formés sur un côté égal. Il est aisé de le démontrer de la même manière que pour les triangles rectilignes.

602. Soit maintenant le triangle sphérique CAB, dont je suppose que les côtés CA et CB sont égaux. Je voudrais savoir si les angles opposés à ces côtés sont égaux, 109.

Je prends CD = CE, et je mène les arcs BD et AE; ce qui me donne d'abord deux triangles CAE, CBD parfaitement égaux. L'arc AE est donc égal à l'arc BD; d'où je conclus l'égalité de deux autres triangles, savoir ABE et ABD. L'angle A et l'angle B sont donc égaux; et parconséquent, dans tout triangle sphérique, les côtés égaux sont opposés à des angles égaux.

La proposition inverse se démontre par le triangle supplémentaire. 110.

603. Si on voulait prouver que dans un triangle sphérique ABC, un plus grand angle est toujours opposé à un plus grand côté, on pourrait dire : Soit A plus grand que B; je puis mener un arc DA qui fasse l'angle DAB égal à l'angle B : j'aurai donc un triangle isoscèle ABD. L'arc BDC sera donc égal à AD + DC; mais AD + DC est visiblement plus grand que AC; donc l'arc BC opposé à l'angle A, est plus grand que l'arc AC opposé à l'angle B.

Au moyen du triangle supplémentaire, la proposition inverse n'a aucune difficulté.

604. Soit maintenant le triangle sphérique ABC que l'on suppose rectangle en A; il peut arriver que l'angle B soit opposé à un arc qui ait moins de 90°, tel que l'arc AC, ou qui soit de 90°, tel que AD, ou qui ait plus de 90°, comme l'arc AE. On demande de quelle espèce sera l'angle B dans ces trois cas? Sera-t-il aigu, droit, ou obtus? 111.

FIG. 111. Puisque l'arc AD est de 90°, et que de plus il est perpendiculaire sur l'arc AB, on ne peut douter que le point D ne soit le pôle de AB; donc en abaissant de ce point l'arc DB, on aura un angle droit DBA. L'angle CBA sera donc aigu, et l'angle EBA sera obtus. L'angle B est donc de même espèce que le côté qui lui est opposé. Il en est de même de l'angle C.

605. Pour distinguer ces angles de celui que l'on a supposé droit, on les appelle *les angles obliques*. On peut donc dire que dans tout triangle sphérique rectangle, chacun des angles obliques est de même espèce que le côté qui lui est opposé.

Cette dénomination d'angles obliques n'empêche pourtant pas qu'ils ne puissent être droits aussi bien que l'angle A. Ils peuvent même être obtus; mais on est convenu de les désigner ainsi, pour abréger le discours : et on appelle hypoténuse le côté opposé à celui des angles droits que l'on considère comme tel. Ainsi BC est l'hypoténuse du triangle BAC.

606. Comme les deux côtés de l'angle droit peuvent être de même espèce, ou d'espèce différente, il est bon de savoir d'avance de quelle espèce doit être l'hypoténuse dans chacun de ces deux cas.

Supposons donc d'abord que AC et AB aient chacun moins de 90°; l'angle ABC sera donc aigu, et parconséquent son supplément BCD sera obtus. Le coté BD opposé à ce supplément, dans le triangle DBC, sera donc plus grand que le côté BC opposé à l'angle CDB (603), lequel doit être aigu par la même raison que l'angle ACB. Or le côté BD n'est que de 90°; donc l'hypoténuse BC doit alors avoir moins de 90°.

112. Supposons ensuite que AC et AB aient plus de 90° chacun, et menons un arc BD qui coupe l'arc AC de manière que AD soit de 90°. Cet arc BD sera aussi de 90°. Mais l'angle C est obtus; l'angle ADB l'est de même : son supplément BDC est donc aigu; et comme tel, il doit être opposé, dans le triangle BCD, à un côté moindre que celui qui est opposé à l'angle C. L'hypoténuse BC est donc alors moindre que BD; c'est-à-dire qu'elle a, dans ce cas comme dans le premier, moins de 90°.

Reste à savoir ce qu'elle aura dans la supposition que les deux côtés de l'angle droit aient l'un plus de 90°, et l'autre moins.

113. Soit, par exemple, AB plus grand que le quart de cercle AD; soit AC plus petit que AD; on aura l'arc CD de 90°, et l'angle CDA sera aigu : CDB sera donc obtus; et parconséquent l'arc BC qui lui est opposé sera plus grand que CD. Il aura donc plus de 90°.

607. Il suit de là que si les deux côtés de l'angle droit d'un triangle sphérique rectangle sont de même espèce, l'hypoténuse a moins de 90°, et que toutes les fois qu'ils sont de différente espèce, l'hypoténuse a plus de 90°.

Et comme les angles obliques sont toujours de même espèce que les côtés qui leur sont opposés, on voit bien qu'ils peuvent également servir à faire connaître de quelle espèce est l'hypoténuse.

608. Comme aussi l'hypoténuse peut servir à son tour à détermi-

Digitized by Google

ner de quelle espèce sont les côtés de l'angle droit et les angles obliques. Car, par exemple, si l'hypoténuse et un des côtés sont de même espèce, l'autre côté a moins de 90°; et toutes les fois que l'hypoténuse et un des côtés sont de différente espèce, l'autre côté a plus de 90°. FIG. 113.

Observez cependant que dans le cas où un des côtés de l'angle droit serait de 90°, l'hypoténuse aurait aussi 90°; et qu'il peut arriver alors que l'autre côté soit de 90° comme le premier. Dans ce cas-là, les trois angles sont droits, cela est évident. Il peut arriver aussi que cet autre côté ait plus ou moins de 90°. Nous allons expliquer la manière de résoudre les triangles sphériques dans ces différens cas.

609. On sait par la Trigonométrie rectiligne que les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés à ces mêmes angles. Mais comme dans les triangles sphériques, les côtés sont des arcs de cercle, cette proportion ne peut avoir lieu. Il faut donc tâcher d'en substituer une autre qui convienne à ces sortes de triangles.

Principes et proportion pour la résolution des Triangles sphériques.

610. Je suppose que le triangle ABC soit rectangle en A, et que les côtés BA et BC soient prolongés, jusqu'à ce qu'ils aient 90°, l'un en H, l'autre en F. 114.

L'arc FH sera la mesure de l'angle B; FG en sera le sinus; FE, ou HE, ou BE sera le rayon de la sphère; CD le sinus de l'hypoténuse BC, et CI le sinus de l'arc perpendiculaire CA.

Or en menant la ligne DI, on voit que le triangle CDI, rectangle en I, est semblable au triangle FGE, rectangle en G : on a donc

$$FE : CD :: FG : CI ;$$

c'est-à-dire, que le rayon est au sinus de l'hypoténuse, comme le sinus de l'angle B est au sinus de l'arc opposé CA. On prouverait de même que le rayon est au sinus de l'hypoténuse, comme le sinus de l'angle C est au sinus de l'arc opposé AB. On a donc généralement ce premier principe de solution.

611. Dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au sinus de l'hypoténuse, comme le sinus d'un des angles obliques est au sinus du côté qui lui est opposé.

612. Si le triangle ABC est obliquangle, on aura, en abaissant un arc perpendiculaire CD, les deux proportions suivantes : 115 et 116.

$$R : \sin AC :: \sin A : \sin CD.$$

$$R : \sin BC :: \sin B : \sin CD.$$

Donc

$$\sin A : \sin B :: \sin BC : \sin AC ;$$

116. et parconséquent, dans un triangle sphérique quelconque, les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés.

117. 613. Soit maintenant le triangle ABC, rectangle en A, dont les côtés BC et AC soient prolongés jusqu'à 90°, l'un en D, l'autre en E : si on mène l'arc DE, on aura le triangle CDE, rectangle en E, dont les quatre parties CE, CD, DE et D seront les complémens respectifs des quatre BC, AC, B et AB du triangle ABC (la démonstration en est facile). De là vient le nom de triangle complémentaire CDE, on a

$$R : \sin CD :: \sin D : \sin CE ;$$

ou bien..... $R : \cos AC :: \cos AB : \cos BC.$

Donc, dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au cosinus d'un des côtés de l'angle droit, comme le cosinus de l'autre côté est au cosinus de l'hypoténuse.

Et parconséquent, si un triangle sphérique obliquangle est partagé en deux triangles rectangles par un arc perpendiculaire sur la base, on aura toujours les cosinus des segmens de la base, proportionnels aux cosinus des deux côtés adjacens.

115. Ensorte que dans le triangle ABC, par exemple, après avoir décrit l'arc perpendiculaire CD, on aurait

$$\cos AC : \cos BC :: \cos AD : \cos BD ;$$

or cette proportion en donne une autre que voici :

$$\cos AC + \cos BC : \cos BC - \cos AC :: \cos AD + \cos BD : \cos BD - \cos AD.$$

De celle-là on peut en tirer une troisième qui est (556)

$$\cot \frac{AC+BC}{2} : \tang \frac{BC-AC}{2} :: \cot \frac{AD+BD}{2} : \tang \frac{BD-AD}{2}.$$

Mais $AD + BD = AB$, toutes les fois que l'arc perpendiculaire tombe en dedans du triangle ; on a donc alors, par la substitution des tangentes aux cotangentes, une dernière proportion qui est d'un fréquent usage, et que l'on peut énoncer de la manière suivante.

614. Dans tout triangle sphérique obliquangle, sur la base duquel on a abaissé un arc perpendiculaire qui tombe en dedans du triangle, la tangente de la demi-base est à la tangente de la demi-somme des deux autres côtés, comme la tangente de la demi-différence de ces côtés est à la tangente de la demi-différence des segmens de la base.

116. Remarquez que si l'arc tombait en dehors, on aurait $AD - BD = AB$; et qu'il faudrait simplement substituer alors la tangente de la demi-somme des segmens à la tangente de leur demi-différence.

117. 615. Revenons maintenant au triangle complémentaire CDE, qui donne

$$R : \sin CD :: \sin C : \sin DE.$$

Donc.....$R : \cos AC :: \sin C : \cos B ;$

c'est-à-dire, que dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au cosinus d'un des côtés de l'angle droit, comme le sinus de l'angle

oblique opposé à l'autre côté, est au cosinus de l'autre angle oblique. Pic.

616. Et parconséquent, si on abaisse un arc perpendiculaire sur la base d'un triangle obliquangle, les sinus des angles du sommet seront proportionnels aux cosinus des angles de la base. 115 et 116.

Dans le triangle obliquangle, on a donc

$$\sin ACD : \sin BCD :: \cos A : \cos B.$$

617. Soit à présent le triangle ABC rectangle en A, et soient menées les tangentes BP et BQ; celle-ci pour l'hypoténuse BC, la première pour le côté BA. Si nous menons les sécantes EP et EQ, dont les extrémités soient jointes par la ligne PQ, nous aurons les triangles PEQ et BPQ dont les plans seront perpendiculaires à celui de la base BAE. Leur intersection PQ sera donc perpendiculaire au même plan (503), et le triangle BPQ, rectangle en P, sera semblable au triangle GFE. Ainsi nous aurons 118.

$$FE : GE :: BQ : BP;$$

ou..... $R : \cos B :: \tang BC : \tang AB.$

On prouverait de même que

$$R : \cos C :: \tang BC : \tang AC.$$

Donc, dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au cosinus d'un des angles obliques, comme la tangente de l'hypoténuse est à la tangente du côté opposé à l'autre angle.

618. Si le triangle ABC est obliquangle, on pourra abaisser sur sa base l'arc perpendiculaire CD; ce qui donnera 115 et 116.

$$R : \cos ACD :: \tang AC : \tang CD.$$
$$R : \cos BCD :: \tang BC : \tang CD.$$

d'où l'on tirera

$$\cos ACD : \cos BCD :: \tang BC : \tang AC.$$

C'est-à-dire, qu'en abaissant un arc perpendiculaire sur la base d'un triangle sphérique obliquangle, on a toujours les cosinus des angles au sommet réciproquement proportionnels aux tangentes des côtés adjacens.

619. Et comme dans le triangle complémentaire CDE, on a 117.

$$R : \cos D :: \tang CD : \tang DE,$$

il est évident que l'on a aussi

$$R : \sin AB :: \cot AC : \cot B :: \tang B : \tang AC.$$

Donc dans tout triangle rectangle, le rayon est au sinus d'un des côtés de l'angle droit, comme la tangente de l'angle oblique opposé à l'autre côté, est à la tangente de ce dernier côté.

620. Le même triangle CDE donne

$$R : \sin CE :: \tang C : \tang DE;$$

donc..... $R : \cos BC :: \tang C : \cot B.$

118. D'où il suit que dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au cosinus de l'hypoténuse, comme la tangente d'un des angles obliques est à la cotangente de l'autre angle.

Application des Principes et des proportions qui précèdent.

621. Au moyen des propositions que nous venons de démontrer, il n'y a point de triangle sphérique que l'on ne puisse résoudre très-facilement, pourvu que l'on connaisse trois de ses parties. Commençons par les triangles rectangles.

Et d'abord, remarquons que l'angle droit étant toujours donné, il suffit de connaître deux des autres cinq parties qui concourent à former ces triangles.

Remarquons ensuite que toutes les combinaisons différentes d'un nombre m de quantités prises deux à deux, sont généralement exprimées par $\frac{m.m-1}{2}$ (313). Il est donc évident, 1°. qu'à cet égard, la résolution des triangles sphériques rectangles offre dix de ces combinaisons. Mais comme pour chaque combinaison on a trois quantités à déterminer, il est évident, 2°. que toutes les variétés possibles de la résolution des triangles sphériques rectangles, sont au nombre de trente.

119. On les a renfermées toutes dans la table suivante, ou l'on suppose que l'angle droit est en A, et que les deux autres angles sont indifféremment désignés par B et par C.

622. La construction de cette table est uniquement fondée sur deux proportions déjà connues. Nous allons les remettre ici sous les yeux du lecteur.

I. Dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au sinus de l'hypoténuse, comme le sinus d'un des angles obliques, est au sinus du côté qui lui est opposé (611).

II. Dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au sinus d'un des côtés de l'angle droit, comme la tangente de l'angle oblique opposé à l'autre côté, est à la tangente de ce dernier côté (619).

Tantôt on applique immédiatement ces proportions au triangle ABC, tantôt il faut avoir recours à l'un des deux triangles complémentaires CDE, BFG, pour transporter ensuite les résultats au triangle ABC, comme on le verra dans quelques exemples.

Digitized by Google

FIG. 119.

Table pour la résolution de tous les cas possibles dans un triangle sphérique ABC, *rectangle en* A.

Etant donnés	trouver	PROPORTIONS.	Ce que l'on cherche doit avoir moins de 90°.
BC	AC	R : sin BC :: sin B : sin AC.	Si B a moins de 90°.
et	AB	R : cos B :: tang BC : tang AB.	Si BC et B sont de même espèce.
B	C	R : cos BC :: tang B : cot C.	Si BC et B sont de même espèce.
BC	AB	R : sin BC :: sin C : sin AB.	Si C a moins de 90°.
et	AC	R : cos C :: tang BC : tang AC.	Si BC et C sont de même espèce.
C	B	R : cos BC :: tang C : cot B.	Si BC et C sont de même espèce.
AC	AB	R : sin AC :: tang C : tang AB.	Si C a moins de 90°.
et	BC	R : cos C :: cot AC : cot BC.	Si AC et C sont de même espèce.
C	B	R : cos AC :: sin C : cos B.	Si AC a moins de 90°.
AC	AB	tang B : tang AC :: R : sin AB.	Ce cas est douteux.
et	BC	sin B : sin AC :: R : sin BC.	Ce cas est douteux.
B	C	cos AC : cos B :: R : sin C.	Ce cas est douteux.
AC	AB	cos AC : cos BC :: R : cos AB.	Si BC et AC sont de même espèce.
et	B	sin BC : sin AC :: R : sin B.	Si AC a moins de 90°.
BC	C	tang BC : tang AC :: R : cos C.	Si AC et BC sont de même espèce.
AB	AC	tang C : tang AB :: R : sin AC.	Ce cas est douteux.
et	BC	sin C : sin AB :: R : sin BC.	Ce cas est douteux.
C	B	cos AB : cos C :: R : sin B.	Ce cas est douteux.
AB	AC	R : sin AB :: tang B : tang AC.	Si B a moins de 90°.
et	BC	R : cos B :: cot AB : cot BC.	Si AB et B sont de même espèce.
B	C	R : sin B :: cos AB : cos C.	Si AB a moins de 90°.
AB	BC	R : cos AB :: cos AC : cos BC.	Si AB et AC sont de même espèce.
et	B	R : sin AB :: cot AC : cot B.	Si AC a moins de 90°.
AC	C	R : sin AC :: cot AB : cot C.	Si AB a moins de 90°.
AB	AC	cos AB : cos BC :: R : cos AC.	Si BC et AB sont de même espèce.
et	B	R : tang AB :: cot BC : cos B.	Si BC et AB sont de même espèce.
BC	C	sin BC : sin AB :: R : sin C.	Si AB a moins de 90°.
B	AC	sin B : cos C :: R : cos AB.	Si C a moins de 90°.
et	AB	sin C : cos B :: R : cos AC.	Si B a moins de 90°.
C	BC	R : cot B :: cot C : cos BC.	Si B et C sont de même espèce.

FIG. 119. Pour en faciliter l'intelligence, soit l'hypoténuse BC de 81° 13′, et l'angle B de 37° 19′; on demande le côté AC opposé à cet angle B.

Vous voyez que pour résoudre ce cas-là, il faut faire la première proportion de la table, et dire.... puisque R : sin BC :: sin B : sin AC, on a donc

Log sin BC de 81° 13′.....	9,994877.
Log sin B de 37° 19′.....	9,782630.
Somme.....	19,777507.
Log du Rayon.....	10.
Reste...	9,777507.

Donc AC est de 36° 48′, ou de 143° 12′ qui en est le supplément : mais pour se décider sur le choix de la valeur convenable, il faut se rappeler que le côté AC doit être de la même espèce que l'angle B qui lui est opposé (604). Au reste, pour rappeler au calculateur les conditions d'où dépend le résultat qu'il cherche, on les a insérées dans la dernière colonne de la Table.

623. Si en supposant la même hypoténuse BC, et le même angle B, on eût demandé le côté adjacent AB, il eût été facile de chercher d'abord le côté AC comme ci-dessus, et d'appliquer ensuite la proportion

tang B : tang AC :: R : sin AB.

Mais ce procédé eût introduit deux analogies dans un calcul qui peut être terminé par une seule. Car dans le triangle complémentaire CDE, on a

R : sin DE :: tang D : tang CE ;

donc en transposant cette proportion dans le triangle ABC, elle deviendra

R : cos B :: cot AB : cot BC,

ou si l'on aime mieux,

R : cos B :: tang BC : tang AB.

On aura donc la valeur de AB par Logarithmes, en disant

Log cos B....	37° 19′ =	9,900529
Log tang BC...	81 13 =	10,811042
Log tang AB.....	=	10,711571

Ce dernier logarithme répond à 79°, ou à 101° : mais comme BC et B sont de même espèce, il faut s'arrêter à la première valeur. Le côté AB est donc de 79°, ou plutôt en calculant jusqu'aux secondes, il est de 79° 0′ 20″.

Enfin, pour trouver l'angle C, on se fût servi du triangle CDE, dans lequel on a sin CE : R :: tang DE : tang C ; d'où on tire par la substitution,

cos BC : R :: cot B : tang C.

ou... R : cos BC :: tang B : cot C.

On

On a donc la valeur de l'angle C par logarithmes, en faisant

Log cos BC.... 81° 13′ = 9,183834
Log tang B..... 37 19 = 9,882101

Log cot C..... = 9,065935

Ce qui donne 83° 22′, et non 96° 38′, puisque BC et B sont de même espèce.

624. Si au lieu de connaître l'hypoténuse, on eût connu le côté adjacent AB, avec le même angle B, et que l'on eût cherché le côté opposé AC, il eût fallu alors employer la proportion suivante :

R : sin AB :: tang B : tang AC,

qui donne

Log sin AB..... 79° = 9.991947
Log tang B..... 37.19′ = 9.882101

Log tang AC..... = 9.874048.

D'où on eût conclu que la valeur de AC est de 36° 48′, comme nous l'avons déjà trouvée.

625. Cherchons maintenant l'hypoténuse BC, en supposant connues les deux mêmes quantités AB et B.

Ni la première, ni la seconde des proportions énoncées ci-dessus (622), ne peut être appliquée immédiatement au triangle ABC : mais dans le triangle complémentaire CDE, on connaît D et DE ; on a donc

R : sin DE :: tang D : tang CE ;

et en substituant, on trouve

R : cos B :: cot AB : cot BC.

Log cos B..... 37° 19′ = 9.900529
Log cot AB..... 79 = 9.288652

Log cot BC..... = 9.189181.

Donc BC est de 81° 13′, puisque B et AB sont de même espèce.

Pour avoir la valeur de l'angle C, dans la même supposition, on aura recours à l'autre triangle complémentaire BFG, dans lequel

R : sin BF :: sin B : sin FG,

ce qui donne, en substituant,

R : cos AB :: sin B : cos C.

Log cos AB..... 79° = 9.280599
Log sin B..... 37.19′ = 9.782630

Log cos C..... = 9.063229.

L'angle C est donc de 83° 22′, ou si on veut pousser l'exactitude

jusqu'aux secondes, de 83° 21′ 33″. Cette petite différence vient de ce que le côté AB est supposé ici de 79°, au lieu que nous avons déjà trouvé 79° 0′ 20″ pour sa valeur.

626. Après avoir déterminé dans deux cas différens, les trois parties inconnues du triangle rectangle ABC, il nous reste à examiner le cas où cette détermination est impossible.

Et d'abord, si on suppose connus le côté AB et l'angle opposé C, il est clair que l'on ne peut connaître de quelle espèce est l'hypoténuse : car alors la première proportion donne

$$\sin C : \sin AB :: R : \sin BC.$$

Mais ce dernier sinus appartenant indifféremment à une hypoténuse moindre que 90°, ou à son supplément, il faudrait savoir de quelle espèce sont les deux angles obliques, pour se déterminer dans le choix. Faute de cette connaissance, le cas est douteux : aussi est-il marqué comme tel dans la quatrième colonne de la Table.

On éprouve le même embarras quand il s'agit de trouver la valeur du côté AC, les mêmes choses étant données. En effet, par la seconde proportion (622), on a

$$\text{tang } C : \text{tang } AB :: R : \sin AC;$$

mais rien n'indique dans ce cas-là de quelle espèce est le côté AC.

Même difficulté pour l'angle B, dont la valeur se déduit de la première proportion (622), appliquée d'abord au triangle BFG, et transportée ensuite au triangle ABC.

Car on a, dans le triangle BFG,

$$\sin BF : R :: \sin FG : \sin B;$$

ce qui donne, dans le triangle ABC,

$$\cos AB : R :: \cos C : \sin B,$$

sans que l'on puisse savoir de quelle espèce est l'angle B.

Voilà donc un premier cas dont les variétés offrent trois solutions ambiguës. Un autre cas parfaitement semblable, celui où l'on suppose connus le côté AC et l'angle opposé B, en offre trois autres. En général, toutes les fois que dans un triangle sphérique rectangle on ne connaîtra qu'un des angles obliques, et le côté qui lui est opposé, la valeur des trois autres parties ne pourra être déterminée.

627. Il y a donc six solutions imparfaites parmi les trente problêmes qu'offre à résoudre tout triangle sphérique rectangle. Au reste, on pourrait réduire à seize ces trente questions, en supprimant celles qui sont absolument semblables : mais on est bien aise de trouver dans une table la proportion dont on a besoin, sans qu'il y ait aucun changement à faire. Passons maintenant à la résolution des triangles obliquangles.

Digitized by Google

FIG.

Résolution des Triangles sphériques obliquangles.

628. Elle est susceptible d'autant de variétés qu'il y a de combinaisons différentes entre les six parties d'un triangle, prises trois à trois. Or il y a 20 de ces combinaisons (313), et chacune a trois cas différens. Il y a donc 60 problèmes à résoudre pour les triangles obliquangles. Mais comme la résolution des uns entraîne souvent celle des autres, on les a réduits aux douze suivans.

629. PROBLÊME I. Dans un triangle sphérique obliquangle ABC, étant donnés deux angles, B et A, et le côté opposé à l'angle A, trouver le côté opposé à l'autre angle. 120.

$$\text{Soit}\left\{\begin{array}{l} A = 61^\circ 25'. \\ B = 82\ 36. \\ BC = 59\ 40.\ \text{Faites la proport.} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{co. Log sin A} = 0.056445. \\ \text{Log sin B} = 9.996368. \\ \text{Log sin BC} = 9.936062. \\ \hline \text{Log sin AC} = 9.988875. \end{array}$$

$$\sin A : \sin B :: \sin BC : \sin AC.$$

Le calcul donnera 77° 5′, ou 102° 55′, sans que l'on puisse se décider entre ces deux résultats, à moins que l'on ne sache d'ailleurs de quelle espèce doit être le côté cherché.

630. II. Etant donnés deux angles A et B, avec le côté BC opposé à l'angle A, trouver le troisième angle.

Abaissez un arc perpendiculaire CD, et vous aurez dans le triangle BCD (620) 115 et 116

$$R : \cos BC :: \text{tang } B : \cot BCD.$$

$$\text{Puis (616) } \cos B : \cos A :: \sin BCD : \sin ACD.$$

Ajoutant donc ces deux angles, ou soustrayant l'un de l'autre, suivant que les angles donnés A et B sont de même ou de différente espèce, vous aurez l'angle cherché C. Soit A = 61° 25′... B = 82° 36′... BC = 59° 40′, et vous aurez,

I°.	II°.
Log cos BC = 9.703317.	co. Log cos B = 0.890099.
Log tang B = 10.886467.	Log cos A = 9.679824.
Log cot BCD = 10.589784.	Log sin BCD = 9.396150.
L'angle BCD est donc de 14° 25′ (608).	Log sin ACD = 9.966073.

L'angle ACD est donc de 67° 39′, ou de 112° 21′; ce qui donne 82° 4′, ou 126° 46′ pour l'angle cherché ACB, sans qu'il y ait moyen de déterminer par les quantités connues, la valeur qui doit être préférée.

631. III. Etant donnés deux angles A et B avec le côté opposé BC, comme dans le problème précédent, trouver le côté AB compris entre ces deux angles.

F16. L'arc perpendiculaire CD forme deux triangles rectangles ACD et DCB, dont le dernier donne (617)

R : cos B :: tang BC : tang BD.

D'ailleurs on a (619)

tang A : tang B :: sin BD : sin AD.

On aura donc AB = AD ± DB, selon que les angles donnés seront de même ou de différente espèce.

	I°.		II.
115 et 116.	Log cos B = 9.109901.	co. Log tang A	= — 1.736269.
	Log tang BC = 10.232745.	Log tang B	= 10.886467.
	Log tang BD = 9.342646.	Log sin BD	= 9.332478.
	BD est donc de 12° 25′.	Log sin AD	= 9.955214.

Le côté AD est donc de 64° 25′, ou de 115° 35′; et comme, dans cet exemple, les angles A et B sont de même espèce, il faut ajouter les deux segmens BD et AD; parconséquent le côté AB doit être de 76° 50′, ou de 128°.

632. IV. Etant donnés deux angles A et C, avec le côté sur lequel ces angles sont formés, trouver le troisième angle B.

On a d'abord (620)

R : cos AC :: tang A : cot ACD.

On a ensuite (616)

sin ACD : sin BCD :: cos A : cos B.

L'angle BCD se trouve en soustrayant ACD de ACB, lorsque l'arc perpendiculaire tombe en dedans du triangle; mais toutes les fois que cet arc tombe en dehors, il faut soustraire l'angle ACB de l'angle ACD pour avoir BCD.

633. V. Etant donnés, comme ci-dessus, les deux angles A et C, avec le côté compris AC, trouver l'un des deux autres côtés, BC par exemple.

R : cos AC :: tang A : cot ACD.

(618) cos BCD : cos ACD :: tang AC : tang BC.

120. 634. VI. On suppose connus deux côtés quelconques, AC et BC par exemple, avec un des angles opposés à ces côtés, tel que l'angle A, trouver l'angle B opposé à l'autre côté.

Ce problême se résout par la proportion si connue

sin BC : sin AC :: sin A : sin B.

Et si on donne aux côtés connus et à l'angle A, les mêmes valeurs que ci-dessus, on trouvera celle de l'angle B par le calcul suivant :

FIG.

co Log sin BC..... 59° 40′ = 0.063938.
Log sin AC..... 77 5 = 9.988869.
Log sin A..... 61 25 = 9.943555.

Log sin B..... = 9.996362.

L'angle B est donc de 82° 36′ comme nous l'avons supposé, ou de 97° 24′ comme nous aurions pu le supposer aussi.

Ce problême rentre évidemment dans le premier, ils ne diffèrent entre eux que par une inversion de termes, dans la proportion qui les résout l'un et l'autre.

635. VII. Les mêmes choses étant données, on demande le troisième côté AB. 115 et 116.

R : cos A :: tang AC : tang AD.
cos AC : cos BC :: cos AD : cos BD.

Par la première de ces deux proportions, on connaît AD ; par la seconde, on connaît BD : ainsi on aura AB = AD ± BD, suivant la position de l'arc perpendiculaire.

Si on eût rapporté au triangle supplémentaire les quantités connues dans le triangle ABC, on eût eu simplement à résoudre ce problème (630) : Connaître le troisième angle, quand on connaît les deux autres et un des côtés qui leur sont opposés. Car ce problême une fois résolu, on eût trouvé la valeur cherchée AB, en prenant le supplément de ce troisième angle. 108.

636. VIII. Dans la même hypothèse, trouver l'angle C, compris entre les deux côtés connus AC et BC. 115 et 116.

R : cos AC :: tang A : cot ACD.
tang BC : tang AC :: cos ACD : cos BCD ;

d'où l'on tire ACB = ACD ± BCD, suivant que les côtés AC et BC sont de même ou de différente espèce.

Le triangle supplémentaire est également propre à résoudre ce problême, en le rappelant au troisième.

637. IX. Etant donnés deux côtés AC et AB, avec l'angle A compris entre ces côtés, trouver l'autre côté BC.

R : cos A :: tang AC : tang AD.
cos AD : cos BD :: cos AC : cos BC.

638. X. Les mêmes choses étant connues, trouver l'un des deux autres angles, l'angle B, par exemple.

R : cos A :: tang AC : tang AD.
sin BD : sin AD :: tang A : tang B.

639. Si les trois côtés sont connus, comment trouver un des trois angles, A, par exemple ?

119. On sait (613) que

$$\text{tang}\,\frac{AB}{2} : \text{tang}\,\frac{AC+BC}{2} :: \text{tang}\,\frac{AC-BC}{2} : \text{tang}\,\frac{AD-DB}{2}.$$

Cette première proportion fera connaître le segment AD, et la proportion qui suit, donnera l'angle A.

$$\text{tang AC} : \text{tang AD} :: \text{R} : \cos \text{A}.$$

Reprenant donc les mêmes valeurs que ci-devant, on aura, 1°.

co Log tang $\frac{1}{2}$ AB	38° 25′	=	0.100692.
Log tang $\frac{1}{2}$ (AC+BC)	68 22 $\frac{1}{2}$	=	10.401838.
Log tang $\frac{1}{2}$ (AC—BC)	8 24 $\frac{1}{2}$	=	9.185174.
Log tang $\frac{1}{2}$ (AD—DB)		=	9.687704.

La demi-différence des deux segmens est donc de 25° 59′ qui étant ajoutés à la demi-base 38° 25′, donnent 64° 24′ pour le plus grand segment AD. Cela posé, on aura, 2°.

co Log tang AG	77° 5′	=	— 1.360474.
Log tang AD	64 42	=	10.319556.
Log R		=	10.
Log cos A		=	9.680030.

Ce logarithme répond à 61° 24′. L'angle A est donc de 61° 24′. Nous avons pourtant supposé ailleurs (629) qu'il était de 61° 25′. D'où peut donc provenir cette petite différence ?

Elle provient des quantités négligées dans l'évaluation des logarithmes ; car si on eût calculé jusqu'aux secondes, on eût trouvé pour la demi-différence des segmens, 25° 58′ 30″, qui étant ajoutés à 38° 25′, eussent donné pour la valeur de AD, 64° 23′ 30″. Or le logarithme de tang 64° 23′ 30″ est 10.319394, lequel substitué à 10.319556, donne pour résultat 9.679868, qui répond à 61° 25′.

640. Ce dernier problême peut se résoudre par une seule proportion, que l'on trouve démontrée dans plusieurs Traités de Trigonométrie, et dont il est facile de calculer les termes par logarithmes. Nous ne ferons que l'énoncer.

Le produit des sinus des côtés AB et AC qui comprennent l'angle cherché A, est au produit des sinus de ce qui reste de la demi-somme des trois côtés, quand on en a soustrait séparément ces mêmes côtés AB et AC, comme le quarré du rayon est au quarré du sinus de la moitié de l'angle cherché.

121. 641. XII. Etant donnés les trois angles, trouver un côté, AC, par exemple.

Ce problême résolu par le triangle supplémentaire, ne différerait pas du problême précédent ; mais on peut aussi le résoudre par les

deux proportions suivantes, en supposant que l'arc CE coupe en deux parties égales l'angle ACB. FIG. 121.

$$\cot \tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang}\, \tfrac{1}{2}(B-A) :: \text{tang}\, \tfrac{1}{2} C : \text{tang}\, DCE.$$
$$\text{tang}\, A : \cot ACD :: R : \cos AC.$$

La première donne la valeur de l'angle DCE, qui étant ajouté à l'angle ACE, fera connaître l'angle ACD : or celui-ci une fois connu, on trouve bien vîte le côté cherché AC par la seconde proportion.

Soit donc $A = 61° 25' \ldots\ldots B = 82° 36' \ldots\ldots C = 82° 4'$, nous aurons

co Log cot $\frac{1}{2}(A+B)$....	72° 0′ 30″	=	0.488439.
Log tang $\frac{1}{2}(B-A)$....	10 35 30	=	9.271829.
Log tang $\frac{1}{2}$ C.....	41 2	=	9.939673.
Log tang DCE.....		=	9.699941.

Ainsi l'angle formé par l'arc perpendiculaire et par celui qui coupe l'angle C en deux parties égales, doit être dans ce cas, de 26° 36′ 59″. Ajoutant donc cette valeur à la moitié de l'angle C, on aura 67° 38′ 59″ pour la valeur de l'angle ACD ; et la seconde proportion donnera

co Log tang A.....	61° 25′	=	— 1.736269.
Log cot ACD....	67° 38′ 59″	=	9.614006.
Log R.....		=	10.
Log cos AC.....		=	9.350275.

Le côté AC sera donc de 77° 3′ 18″.

Nous l'avions déjà trouvé de 77° 5′ dans la résolution du premier problême ; mais cette différence ne provient que des quantités négligées dans l'évaluation des logarithmes.

642. A cette double solution on pourrait en ajouter une troisième, déduite de la proportion suivante.

Le produit des sinus des angles A et C est au produit des cosinus des deux restes que l'on trouve après avoir soustrait séparément chacun de ces deux angles de la demi-somme des trois angles, comme le quarré du rayon est au quarré du cosinus du demi-coté AC.

643. Et cette proportion peut également s'appliquer aux triangles rectilignes, parcequ'en supposant les triangles sphériques bien petits, leurs côtés sont des arcs insensibles que l'on peut regarder comme des sinus et des tangentes des angles opposés. Telle est donc l'analogie de la Trigonométrie sphérique avec la Trigonométrie rectiligne, que la plupart des formules de la première peuvent être appliquées à la seconde, par une simple substitution des côtés, aux sinus ou aux tangentes de ces mêmes côtés.

FIG. Vous observerez cependant que les formules où il entre des cosinus et des cotangentes, ne sont pas susceptibles de cette application ; et vous savez bien pourquoi.

644. La théorie que nous venons d'exposer, embrasse généralement tous les cas des triangles sphériques. Mais le nombre des proportions à retenir, et celui des précautions qu'il faut prendre suivant les divers cas, n'étant pas réduits au degré de simplicité que l'on pourrait desirer, plusieurs Géomètres ont travaillé successivement à cette reduction.

Nepper, que l'invention des logarithmes a rendu si célèbre, n'a pas été le moins heureux dans cette recherche. Deux seules proportions lui suffisaient pour résoudre presque tous les problèmes de trigonométrie sphérique. On peut voir l'énoncé de ces proportions dans son ouvrage. Il y a cependant une multiplicité de parties adjacentes et de parties séparées, qui, jointes à ce qu'il appelle *la partie moyenne*, entraînent quelque confusion.

D'autres Géomètres ont réduit toute cette théorie à des formules purement analytiques ; mais quand meme on donnerait la préférence à ces méthodes, on aurait bien de la peine à se passer entièrement de celle des anciens Géomètres, à cause de la clarté qu'y répandent les figures dont on se sert.

Quelques applications de la Trigonométrie sphérique.

645. Etant donnée la déclinaison d'un astre, trouver son amplitude et son arc diurne pour un lieu dont la latitude est connue.

La solution de ce problème suppose quelques notions d'astronomie : ainsi tout lecteur qui n'aura pas déjà ces notions, peut passer au chapitre suivant.

122. Soit HZO la moitié du méridien du lieu proposé, HAO la moitié de son horizon, EAQ la moitié de l'équateur, Z le zénith, P le pôle boréal, A le vrai point d'est, MN ou EC la déclinaison de l'astre dont il s'agit, CM*c* une partie du parallèle que cet astre doit parcourir, PMN un quart du cercle horaire.

Cela posé, on aura l'arc AM pour l'amplitude ortive, l'arc MC ou NE pour l'arc semi-diurne, et on connaîtra dans le triangle rectangle AMN, le côté MN, l'angle N et l'angle oblique MAN, qui est le complément de la latitude donnée.

Ainsi pour connaître AM, on fera la proportion suivante :

$$\sin MAN : \sin MN :: R : \sin AM ;$$

et pour avoir AN, on fera cette autre proportion :

$$\text{tang } MAN : \text{tang } MN :: R : \sin AN.$$

Appelant donc la latitude L, et la déclinaison D, on aura

$$\sin AM = \frac{\sin D}{\cos L} \ldots \sin AN = \frac{\text{tang } D}{\text{tang } (90^\circ - L)} = \text{tang } D \text{ tang } L.$$

Ce qui donnera pour l'amplitude cherchée deux solutions, dont la plus petite sera la seule convenable. On aura aussi la valeur de AN, qui étant convertie en temps, à raison de 15° par heure, fera connaître ce qu'il faut ajouter au quart AE de l'équateur, c'est-à-dire, à six heures, pour avoir la moitié du temps que cet astre doit passer sur l'horizon. FIG. 122.

Si par hasard on demandait l'arc semi-diurne d'un astre dont la déclinaison fût australe, il faudrait alors soustraire AN de AE, après les avoir réduits en temps.

EXEMPLE I. La latitude de Paris est de 48° 50′, et on demande quel doit être, par rapport à cette ville, l'arc semi-diurne d'une étoile placée à 25° de déclinaison australe?

Log tang D.....	25°	=	9.668673.
Log tang L.....	48° 50	=	10.058287.
Log sin AN.....		=	9.726960.

Ce qui donne 32° 13′ 40″ pour l'arc AN. Cet arc réduit en temps vaut 2^h 8′ 55″, qu'il faut sonstraire de 6 heures, pour avoir l'arc semi-diurne de 3^h 51′ 5″; d'où on conclut qu'une étoile placée à 25° de déclinaison australe, reste sur l'horizon de Paris pendant 7^h 42′ 10″. On trouverait que son amplitude est de 39° 56′ 36″, vers le pôle antarctique.

EXEMPLE II. Quel est le plus long jour de l'année pour l'horizon de Paris, et combien ce jour dure-t-il? Le plus long jour est évidemment celui où le soleil parcourt le tropique du cancer, et comme alors sa déclinaison est de 23° 28′ 20″, on a

Log tang D.....	23° 28′ 20″	=	9.637726.
Log tang L.....	48° 50′	=	10.058287.
Log sin AN.....		=	9.696013.

Ce dernier logarithme répond dans les tables à 29° 46′ 33″; ce qui fait 1^h 59′ 6″. Donc l'arc semi-diurne du solstice d'été est 7^h 59′ 6″; et parconséquent le plus long jour de l'année pour l'horizon de Paris serait de 15^h 58′ 12″, si la réfraction n'influait pas sur sa durée. De quelle quantité y influe-t-elle? c'est ce que nous allons examiner dans l'exemple suivant.

EXEMPLE III. On sait que la réfraction fait paraître à l'horizon tous les astres qui sont réellement 32′ 20″ au-dessous, en comptant ces 32′ 20″ sur un vertical. Le soleil paraît donc se lever avant qu'il ait atteint l'horizon; et le soir on le voit encore, quoique déjà au-dessous de ce cercle. Il en résulte parconséquent une augmentation quelconque dans la durée du jour. De combien est-elle?

Soit D*md* un demi-cercle tracé parallélement à l'horizon, à 32′ 20″ d'intervalle: il est clair qu'aussitôt que le soleil est parvenu à ce parallèle en *m*, la réfraction l'élevera de 32′ 20″ = *mr*, et le fera

FIG. 122. paraître sur l'horizon au point r. Alors son amplitude apparente sera Ar, c'est-à-dire, que son amplitude vraie sera augmentée de la quantité Mr, en vertu de la réfraction.

D'ailleurs, puisque le soleil paraît être à l'horizon, dès qu'il est en m, l'arc semi-diurne est représenté par En; ainsi le prolongement du jour est exprimé par Nn, qu'il s'agit de calculer.

Comme le triangle Mrm est très-petit, on peut le résoudre par la trigonométrie rectiligne, qui donne

$$Mm = \frac{mr}{\cos PMO}.$$

Or

$$\cos PMO = \cos PO \,.\, \sin MPO = \cos L \,.\, \sin \text{ang. hor};$$

donc

$$Mm = \frac{mr}{\cos L \,.\, \sin \text{ang. hor.}}.$$

On a d'ailleurs la proportion suivante :

$$Mm : Nn :: \sin PM : 1 :: \cos D : 1.$$

Donc

$$Nn = \frac{Mm}{\cos D} = \frac{mr}{\cos D \,.\, \cos L \,.\, \sin \text{ang. hor.}};$$

formule qui fait connaître immédiatement l'effet de la réfraction sur l'heure du lever et du coucher d'un astre quelconque, vu d'une latitude quelconque.

Si nous prenons, par exemple, le soleil dans le tropique du cancer à 23° 28′ 20″ de déclinaison, vu à la latitude de Paris, et si nous faisons $mr = 32' 20'' = 1940''$, nous aurons $Nn = 3702''$.

REMARQUE. Si on imagine le petit arc vertical mr prolongé jusqu'au zénith Z, et si on mène le quart Pmn d'un cercle horaire, on aura un triangle sphérique ZPm, dans lequel on connaîtra le côté ZP, complément de la latitude, le côté Pm, complément de la déclinaison, et le côté Zm qui est de 90° 32′ 20″.

D'où il suit qu'en résolvant ce triangle par le problème XI, on pourra connaître immédiatement l'angle ZPm, dont la mesure est l'arc semi-diurne En. On pourra connaître aussi l'angle PZm dont la mesure est l'arc rO, complément de l'amplitude apparente Ar, ce qui mènera à une solution plus directe du problême proposé.

EXEMPLE. IV. Etant données la longitude et la latitude de deux villes, trouver leur plus grande distance.

Pour la connaître, il faut mesurer l'arc de grand cercle qui passe par les deux lieux proposés; car on sait que sur la surface d'une sphère, le plus court chemin d'un point à un autre est l'arc de grand cercle qui passe par ces deux points.

123. Cela posé, soit P le pôle, EQ une portion de l'équateur, PCQ et PBE deux quarts de cercle qui passent l'un par le point C et

l'autre par le point B, que je suppose être les points donnés. Soit enfin BC l'arc de grand cercle qui mesure leur distance. On connaîtra dans le triangle sphérique PBC, les deux côtés PB et PC, complémens respectifs des latitudes données; et l'angle P dont la mesure est l'arc EQ, différence des longitudes. Ainsi on connaîtra BC par le problême IX. FIG.

Soit, par exemple, la latitude CQ de 48° 50′ 10″, comme elle l'est pour Paris, et soit BE = 43° 7′ 24″, comme elle l'est pour Toulon. Ces deux villes diffèrent en longitude de 3° 36′ 35″ : ainsi l'angle CPB, ou, ce qui est la même chose, l'angle EPQ est de 3° 36′ 35″.

Si on fait le calcul, on trouvera BC = 6° 14′ 15″, ce qui donne pour la distance de Paris à Toulon, sans avoir égard à la sinuosité des chemins, 178 lieues de 2000 toises chacune, en supposant que le degré moyen du méridien en France est de 57060 toises.

Exemple. V. Etant données l'ascension droite et la déclinaison d'un astre, déterminer sa latitude et sa longitude.

Soit P le pôle de l'équateur ABC; soit N le pôle de l'écliptique EBD; soit PMQ le cercle de déclinaison, et NMR le cercle de latitude qui passent l'un et l'autre par l'astre que je suppose en M. 124.

Le problême se réduit à trouver BR et MR, étant donnés BQ et QM : or dans le triangle PMN, on connaît PM complément de MQ, l'angle MPN complément BQ, et le côté PN qui est égal à l'obliquité de l'écliptique. Il est donc bien facile de connaître le troisième côté MN qui a pour complément la latitude de l'astre, et l'angle PNM qui après avoir soustrait 90°, donne la longitude cherchée.

Exemple. VI. Connaissant la latitude d'un lieu donné et la déclinaison d'un astre, avec une hauteur de cet astre, observée à un instant quelconque, trouver son azimuth, sa distance au méridien, et l'heure qu'il était au moment de l'observation.

Soit K le lieu de l'astre, quand on observe dans son parallèle CMc; soit ZKF un vertical, PK un cercle horaire. On aura KF pour la hauteur observée, et ZK pour complément. PK sera le complément de la déclinaison, ZP sera le complément de la hauteur du pôle. Ainsi on connaîtra les trois côtés du triangle ZPK; et parconséquent on pourra déterminer l'angle KZP, dont le supplément HF sera l'azimuth de l'astre, et l'angle ZPK qui mesure la distance de l'astre au méridien, ou le temps qu'il emploîra à y parvenir, s'il n'y est pas déjà passé. On aura donc par ce calcul et par celui de l'ascension droite du soleil, le temps du passage de l'astre par le méridien, et parconséquent l'heure vraie de l'observation. 122.

TRAITÉ ANALYTIQUE DES SECTIONS CONIQUES.

646. On appelle en général *Sections coniques* les sections faites dans un cône par un plan.

Le cercle, par exemple, est une section conique, parcequ'en coupant un cône droit par un plan parallèle à sa base, la section est un cercle.

Le triangle est aussi une section conique, puisqu'en coupant un cône par le sommet, la section est triangulaire.

Mais on a donné spécialement le nom de sections coniques à trois autres sections du cône, dont nous allons faire connaître l'origine et les propriétés, après avoir indiqué la manière de les traiter analytiquement.

Notions préliminaires sur l'usage de l'Algèbre dans la description des Courbes.

Descartes ayant imaginé d'appliquer l'Algèbre à la Géométrie, on ne tarda pas à sentir l'utilité dont ces sortes d'applications pouvaient être. Les Géomètres qui sont venus après lui, ont tellement profité de cette découverte, qu'elle est devenue à jamais célèbre par sa grande fécondité. Ses principaux usages consistent dans des recherches sur la théorie des courbes, dont l'étude est indispensable quand on veut approfondir les sciences Physico-Mathématiques.

647. L'objet de cette théorie est d'exprimer par des équations les lois suivant lesquelles on suppose que des courbes données ont été décrites ; et réciproquement, de diriger l'Analyste, soit dans la description des courbes dont il a les équations, soit dans la recherche des propriétés de ces mêmes courbes.

Pour cela, on rapporte chaque point de la courbe que l'on veut tracer, à deux droites, dont l'une s'appelle *la Ligne* ou *l'Axe des*

Digitized by Google

Abscisses, l'autre *la Ligne* ou *l'Axe des Ordonnées*. On cherche FIG. ensuite le rapport qui se trouve entre les abscisses et les ordonnées, et l'expression analytique de ce rapport donne l'équation de la courbe.

C'est ainsi, par exemple, que $yy = 2ax - xx$ exprimant le rapport constant d'égalité entre le quarré de chaque ordonnée du cercle et le rectangle de ses abscisses, on a dit (444) que cette équation appartenait au cercle.

648. Afin d'abréger, on est convenu d'appeler *Fonction d'une quantité* toute expression algébrique où cette quantité entre. Ainsi on dit, par exemple, que l'équation au cercle exprime l'égalité constante d'une fonction de chaque ordonnée (c'est son quarré) avec une fonction de chaque abscisse correspondante (c'est son produit par le reste du diamètre).

On appelle en général *Coordonnée* ses abscisses, et les ordonnées correspondantes d'une courbe; et comme la longueur de ces lignes varie à chaque instant, on les nomme *variables* ou *indéterminées*, par opposition aux quantités *constantes* ou *déterminées*.

Le point d'où l'on commence à compter les abscisses, s'appelle *l'origine des abscisses*. On est le maître de la supposer où l'on veut, avant de chercher l'équation des coordonnées; mais sa position une fois déterminée, il faut la supposer toujours la même dans les détails du même calcul. Ordinairement on met l'origine des abscisses au sommet ou au centre de la courbe.

Et comme en partant de leur origine, on peut les prendre de deux côtés opposés, on est convenu de désigner les unes par le signe $+$, et les autres par le signe $-$; de manière qu'une abscisse est censée *positive*, lorsqu'elle est sur la partie de l'axe que l'on regarde comme positive. Le choix de cette partie est absolument arbitraire; mais quand il est une fois fait, on doit s'y tenir.

649. Les ordonnées peuvent être perpendiculaires ou obliques sur la ligne des abscisses, pourvu qu'elles soient parallèles entre elles. Communément on les suppose perpendiculaires, et on en distingue de positives et de négatives, suivant qu'elles sont d'un côté ou de l'autre de l'axe des abscisses. Quelquefois cependant elles partent d'un point fixe: on en verra des exemples dans la suite.

Cela posé, décrivons la courbe qui a pour équation $y^2 = 2ax - xx$. On sait déjà que c'est la circonférence d'un cercle dont le diamètre est $2a$; mais quand même on ne le saurait pas, la construction de cette équation le ferait bientôt connaître.

Soit donc désignée par a une quantité constante que je suppose 125.
$= 5$, et soit menée une droite indéfinie BD, sur laquelle je prends $AD = 10 = 2a$, que je divise en dix parties égales AP, PP, etc. Soit A l'origine des abscisses, BD leur axe, AD la direction des positives; AB sera donc celle des négatives, si la courbe cherchée en a. Soit menée ensuite au point A la perpendiculaire indéfinie EF, que je prends pour l'axe des ordonnées, et dont je suppose que la partie positive est AE. Soit enfin $AP = x$, et $PM = y$.

Il est clair, par l'équation même $y = \pm \sqrt{(2ax - xx)}$, que

FIG. 125. lorsque $x=0$, on a $y=0$; donc la courbe a le point A de commun avec la ligne des abscisses. Si on fait $x=1$, y devient ± 3; si $x=2$, y devient ± 4; ensorte que les valeurs correspondantes de x et de y sont

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10.$$
$$y=0, \pm 3, \pm 4, \pm\sqrt{21}, \pm\sqrt{24}, \pm 5, \pm\sqrt{24}, \pm\sqrt{21}, \pm 4, \pm 3,\ 0.$$

Or ces valeurs de y déterminent la longueur d'autant d'ordonnées, dont les extrémités M sont des points de la courbe que l'on cherche; et parceque ces valeurs sont tout-à-la-fois positives et négatives, il est clair qu'en menant du point A deux branches égales, dont l'une passe par les points M qui sont au-dessus de l'axe des abscisses, et l'autre par les points correspondans qui sont au-dessous, on aura la courbe demandée.

Quant à sa description, elle sera d'autant plus exacte, que l'on multipliera davantage les divisions de la ligne AD. C'est ainsi que l'on peut décrire une courbe en rapportant chacun de ses points M à deux lignes BD, EF données de position; car si l'on achève le parallélogramme APMN, dont on connaît les deux côtés AP ou NM, et PM, l'intersection de ces deux dernières lignes donnera le point M de la courbe. On appelle ce parallélogramme, *le parallélogramme des coordonnées*.

Les valeurs de y croissant ici de plus en plus jusqu'à un certain terme qui est 5, et décroissant ensuite dans le même rapport jusqu'à zéro, on doit conclure, 1°. qu'il y a une ordonnée PM plus grande que toutes les autres; c'est ce que l'on appelle le *Maximum de l'Ordonnée*. (La recherche des *maximum* et des *minimum* est une des plus curieuses de l'analyse : nous en donnerons quelques exemples dans la suite).

On doit conclure, 2°. que la courbe qui a pour équation $yy=2ax-xx$, est une courbe rentrante et fermée. Elle ne s'étend pas au-delà du point A; car alors ses abscisses étant négatives, les valeurs de y seraient *imaginaires*, ce qui indique qu'il ne peut y avoir aucune de ses branches au-delà de l'origine des abscisses. Cherchons maintenant quelques-unes de ses propriétés.

650. Du milieu C de la ligne AD, je mène les droites CM, et j'ai autant de triangles rectangles CPM, dans lesquels..... $CM^2=PM^2+CP^2=y^2+a^2-2ax+x^2$; donc puisque $y^2=2ax-x^2$, on aura toujours $CM=a$; c'est-à-dire que tous les points M sont à égale distance du centre C, propriété distinctive de la circonférence du cercle.

D'ailleurs l'équation $y^2=2ax-xx$, donne $x:y::y:2a-x$, ou $::$ AP : PM : PD; donc chaque perpendiculaire PM est moyenne proportionnelle entre les deux segmens du diamètre AD, autre propriété du cercle.

Menant ensuite une corde AM, on aura $AM^2=2ax$; donc x : AM :: AM : $2a$; ce qui fait voir que dans la courbe demandée toutes les cordes menées du point A à un des points M sont moyennes

proportionnelles entre le diamètre AD et le segment correspondant AP, ce qui convient encore au cercle. 110.

Si l'on mène la corde MD, on aura $AM^2 + MD^2 = 4a^2 = AD^2$, propriété du triangle rectangle. Donc tous les angles AMD sont droits, comme ils doivent l'être dans le cercle.

Inscrivant le quadrilatère AMDM', on trouvera de même que

$$AM \times M'D + AM' \times MD = AD \times MM' \quad (450);$$

et ainsi des autres propriétés.

651. Soit proposé maintenant de décrire la courbe dont l'équation aux coordonnées est $y^2 = ax$.

On voit d'abord que cette courbe doit couper la ligne des abscisses à leur origine, puisqu'en supposant $x = 0$, on a aussi $y = 0$; on voit ensuite qu'elle doit avoir deux branches égales, l'une positive, l'autre négative. Ces branches s'étendront à l'infini en s'écartant de leur axe, à mesure qu'on supposera des valeurs plus grandes pour x. Mais ces valeurs doivent être toutes positives, autrement les ordonnées deviendront imaginaires. La courbe aura donc la forme 126.
MAM'.

652. Soit aussi $yy = xx - aa$. Il est clair que si la courbe à laquelle appartient cette équation, coupe la ligne des abscisses, ou ne fait même que la toucher en quelques points, on les déterminera en supposant $y = 0$. Or dans cette supposition on a $x = \pm a$. Ainsi en prenant sur une droite indéfinie BD un point A pour l'origine des 127.
abscisses, et deux parties AS, As égales à la quantité donnée a, la courbe doit passer par les points S, s que l'on appelle ses *sommets*.

Pour connaître la direction de ses branches, soit AD le côté des abscisses positives; on aura

$$y = \pm \sqrt{(x^2 - a^2)} = \pm \sqrt{(x+a)(x-a)},$$

ce qui donne deux branches, l'une SM, l'autre SM', dont le cours s'étendra à l'infini, tant que x sera plus grande que a. Si elle était plus petite, y serait imaginaire; la courbe ne passe donc pas au-delà du point S, tant que l'on ne prend que des abscisses positives.

Supposons qu'on les prenne négatives, l'équation deviendra

$$y = \pm \sqrt{(-x+a)(-x-a)}.$$

Or tant que les x seront plus petites que a, les valeurs de y seront imaginaires. Il n'y aura donc aucune partie de la courbe entre les points A et s.

Si $x = a$, on trouve comme ci-dessus, $y = 0$: si $x > a$, alors y a deux valeurs réelles, l'une positive, l'autre négative; et ces valeurs croissant de plus en plus, la courbe aura deux nouvelles branches opposées, mais égales aux deux premières. L'axe des abscisses est BD, celui des ordonnées est EF; supposant donc des valeurs à x, on déterminera les y ou les PM, et les parallélogrammes des coordonnées donneront les points M, m, etc. par lesquels doit passer la courbe demandée. Nous aurons bientôt occasion d'examiner ses propriétés.

FIG. 653. Cherchons la figure de la courbe dont l'équation est $y^2 = \frac{bx^2 + x^3}{a - x}$.

128. Je prends BD pour la ligne des abscisses, AD $= a$ pour la direction des positives, AB $= b$ pour la direction des négatives, le point A pour leur origine, EF pour l'axe des ordonnées, et j'ai..... $y = \pm x \sqrt{\left(\frac{b+x}{a-x}\right)}$, ce qui donne 1°. $y = 0$, lorsque $x = 0$; la courbe doit donc passer au point A. 2°. Pour chaque valeur de x, je trouve deux valeurs de y. Il y a donc des ordonnées positives et des ordonnées négatives. Reste à déterminer les points où elles cesseront d'etre réelles.

3°. Je prends donc x positive, mais moindre que a ou AD, et j'ai pour y deux valeurs PM, PM′ qui croissent de plus en plus, jusqu'à ce qu'ayant pris $x = a$, elles deviennent infinies; car alors j'ai $y = \pm x \sqrt{\left(\frac{b+x}{0}\right)}$; supposant donc à l'ordinaire, que zéro exprime une quantité infiniment petite, ou que $0 = \frac{1}{\infty}$, y est infinie. C'est-à-dire qu'il faudrait prolonger à l'infini la ligne GH pour qu'elle rencontrât les deux branches de la courbe.

654. On appelle *asymptotes* ces lignes qui s'approchant de plus en plus des branches d'une courbe, ne peuvent cependant les rencontrer jamais.

4°. Si $x > a$, y devient imaginaire. La courbe ne peut donc pas passer au-delà de GH.

5°. Si x est négative, y a deux valeurs, pourvu que x soit moindre que b. La courbe a donc aussi deux branches dans le sens négatif.

6°. Si $x = b$, on a $y = 0$; la courbe doit donc passer au point B. Mais elle ne peut descendre plus bas, puisque $x > b$ rend les y imaginaires.

7°. Faisant $y = 0$, dans la supposition de x négative et $= b$, on a $y^2 = xx\left(\frac{b-x}{a+x}\right) = 0$; d'où l'on tire $x^2\,(b - x) = 0$, qui donne $x = 0$, $x = 0$, $x = b$. La courbe passera donc une fois au point B, et deux fois au point A où elle formera un nœud.

655. Lorsque plusieurs branches de la même courbe passent par le même point, ce point s'appelle en général *point multiple*, et en particulier, *point double*, *triple*, etc. lorsque deux ou trois branches viennent s'y réunir. L'Algèbre apprend aussi à discerner ces points, et à connaître leur multiplicité.

8°. Si $b = 0$, le nœud s'évanouit, et l'équation $y^2 = x^2\left(\frac{b+x}{a-x}\right)$, devient $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, qui appartient à une courbe ancienne, nommée *Cissoïde*, dont nous parlerons bientôt.

656.

656. Outre les points multiples, il y a encore des *points d'inflexion* et des *points de rebroussement*. Les premiers sont ceux où la courbe, après avoir tourné sa convexité dans un sens, commence à la tourner dans le sens opposé. Par exemple, la courbe MAM′, dont l'équation est $y^3 = a^2x$, a un point d'inflexion en A. FIG. 129.

Les points de rebroussement sont ceux où deux branches de la même courbe se touchent, sans passer au-delà du point de contact. Voyez la courbe mAm'; son équation est $y^3 = ax^2$. 130.

657. Si l'équation des coordonnées est du premier degré, elle appartient toujours à une ligne droite; et c'est pour cela qu'on désigne les droites par le nom de lignes du *premier genre* ou *du premier ordre*.

Si dans l'équation des coordonnées, il n'entre que des yy ou des xx, ou des xy, les lignes qu'elle représente, s'appellent lignes du *second genre*.

Lorsque cette équation est du troisième degré, les lignes qui en résultent sont du *troisième genre*, etc. Et comme les lignes du second sont les courbes les plus simples, on les appelle aussi *courbes du premier genre;* ensorte que des lignes du troisième sont des courbes du second; et ainsi de suite. Il n'y a que la ligne droite qui soit du premier genre. Il y en a quatre du second; soixante-douze du troisième, comme on peut le voir dans les Opuscules de Newton, (*Enumeratio linearum tertii ordinis*), et dans les ouvrages des géomètres plus récens, Euler, Cramer, etc. Il y en a un bien plus grand nombre du quatrième genre, etc.

658. Mais il faut remarquer que dans cette division des lignes en différens ordres, on ne comprend que les courbes *géométriques*. On nomme ainsi celles qui ont pour abscisses et pour ordonnées des lignes droites dont le rapport peut être déterminé géométriquement. Ainsi une courbe qui aurait pour abscisses des arcs de cercle, ou des lignes droites égales à des sinus, ne serait pas une courbe géométrique. Ce serait une des courbes appelées *mécaniques* ou *transcendantes*. Les premières se nomment aussi des *courbes algébriques*.

Or ce qui fait le principal objet de l'analyse dans l'examen d'une courbe, c'est, 1°. d'en trouver l'équation, lorsque la courbe est donnée, ou de décrire la courbe, si on a déjà son équation; 2°. d'en déterminer la tangente; 3°. d'en connaître la *courbure* dans un point donné; 4°. de chercher ses plus grandes ou ses plus petites ordonnées; 5°. de trouver sa quadrature exacte, si elle en est susceptible, ou au moins sa quadrature approchée; 6°. de trouver sa *rectification*, c'est-à-dire, de déterminer la longueur d'une ligne droite égale à l'un quelconque de ses arcs, etc.

Le calcul algébrique ordinaire peut absolument suffire pour toutes ces recherches; mais le *calcul différentiel et le calcul intégral* sont bien plus expéditifs.

FIG.

ORIGINE DES SECTIONS CONIQUES, ET LEUR ÉQUATION GÉNÉRALE.

659. SOIT coupé un cône droit BCD par un plan quelconque AMP; on demande l'équation de la courbe MAm qui résulte de cette section.

Si par le sommet B on fait passer un plan BCD perpendiculaire sur la base du cône et sur le plan coupant AMP, l'intersection de ces deux plans sera une droite Aa; et si on coupe le cône parallèlement à la base par un plan FMG, on aura un cercle dont le plan sera perpendiculaire au triangle BCD, et dont l'intersection avec le plan AMP sera une droite PM perpendiculaire aux droites Aa, FG (502). La ligne PM sera donc une ordonnée commune au cercle et à la section MAm.

Cela posé, soit $AP = x$, $PM = y$, $AB = c$, l'angle $ABa = B$, l'angle $BAa = A$; la propriété du cercle donne

$$yy = FP \times PG.$$

Pour trouver l'expression analytique des lignes FP et PG, je mène AE parallèle à CD, et PK parallèle à BD, l'une et l'autre dans le plan BCD, ce qui donne

$$AB : \sin AEB :: AE : \sin B.$$

Or

$$AEB = \frac{180° - B}{2} = 90° - \tfrac{1}{2}B;$$

donc

$$\sin AEB = \sin(90° - \tfrac{1}{2}B) = \cos\tfrac{1}{2}B;$$

et parconséquent

$$AE = \frac{c \times \sin B}{\cos\frac{1}{2}B}.$$

D'ailleurs le triangle APK donne

$$\sin AKP : \sin APK, \text{ ou } \sin AEB : \sin AaE;$$

ou encore

$$\cos\tfrac{1}{2}B : \sin(A+B) :: x : AK = \frac{x \sin(A+B)}{\cos\frac{1}{2}B};$$

donc KE, ou

$$PG = \frac{c \sin B - x \sin(A+B)}{\cos\frac{1}{2}B}.$$

Quant à l'expression de la partie FP, on a dans le triangle APF, $\sin AFP$, ou $\sin BFG$, ou $\sin BGF$, ou $\cos\frac{1}{2}B : x :: \sin A : FP = \frac{x \sin A}{\cos\frac{1}{2}B}$;

donc $yy = \frac{\sin A}{\cos^2 \frac{1}{2} B} [cx \sin B - xx \sin (A + B)]$, équation de- FIG.
mandée.

660. Maintenant il ne peut arriver que trois cas. I°. Que $A + B = 180°$, c'est-à-dire, que le plan coupant AMP soit parallèle au côté BD; alors la section conique se nomme *Parabole*, 132.
et son équation est

$$yy = \frac{\sin A \times \sin B}{\cos^2 \frac{1}{2} B} cx = \frac{\sin^2 B}{\cos^2 \frac{1}{2} B} cx = 4cx \sin^2 \tfrac{1}{2} B \ (549),$$

ou

$$y = \pm 2 \sin \tfrac{1}{2} B \sqrt{cx}.$$

La parabole est donc une courbe formée par deux branches égales et semblables qui s'étendent à l'infini, en s'écartant de plus en plus l'une de l'autre.

661. II°. Si $A + B$ est moindre que 180°, il est aisé de voir que le plan AMP prolongé doit rencontrer l'autre côté BD; ainsi la section conique qui en résulte, et qui s'appelle *Ellipse*, est une courbe rentrante formée par deux branches égales, semblables et finies AM*a*, A*ma*. Son équation est

$$yy = \frac{\sin A}{\cos^2 \frac{1}{2} B} [cx \sin B - xx \sin (A + B)].$$

662. III°. Si $A + B$ surpasse 180°, la section s'appelle *Hyperbole*, et son équation est

$$yy = \frac{\sin A}{\cos^2 \frac{1}{2} B} (cx \sin B + xx \sin \overline{A + B - 180°}).$$

Or si on imagine un cône B*cd* égal et opposé par le sommet au 133.
cône droit BCD, il est clair que le plan coupant AMP prolongé le rencontrera, et que de leur intersection résultera une courbe M′*am*′ égale, semblable et opposée à la courbe inférieure MA*m*; ou plutôt ces deux courbes que l'on appelle *Hyperboles opposées*, ne feront qu'une seule et même courbe généralement représentée par la même équation.

663. Au lieu de supposer les mêmes sections faites dans un cône 131.
droit, on eût pu les supposer faites dans un cône oblique, tel que serait, par exemple, le cône BCD, si l'angle C n'était pas égal à l'angle D. On eût alors trouvé que leur équation générale

$$yy = \frac{\sin A}{\sin C \sin D} [cx \sin B - xx \sin (A + B)].$$

Or cette équation a cela de commun avec la précédente, qu'elle appartient à une ellipse, ou à une parabole, ou à une hyperbole, selon que la somme des angles A et B est moindre ou égale, ou plus grande que 180°.

Dans le premier cas, elle exprime un cercle, toutes les fois que

FIG. l'angle A est égal à l'angle C ou à l'angle D, car alors on a une des deux équations suivantes :

$$y^2 = \frac{cx \sin B}{\sin C} - x^2 \ldots\ldots y^2 = \frac{cx \sin B}{\sin D} - x^2,$$

qui sont évidemment deux équations au cercle, et qui font voir que dans un cône oblique, on peut faire des sections circulaires de deux manières : l'une en coupant le cône parallélement à sa base, l'autre en le coupant par un plan qui fasse avec un des côtés du triangle par l'axe, un angle égal à celui que l'autre côté du même triangle fait avec sa base.

Dans le troisième cas, où l'équation exprime une hyperbole, on peut supposer $c = 0$, et alors on a

$$y^2 = \frac{\sin A \sin (A + B - 180^\circ)}{\sin C \sin D} x^2.$$

Faisant, pour abréger, le coefficient de x^2 égal à une quantité constante $\frac{a^2}{b^2}$, on trouve $y = \frac{ax}{b}$, qui est l'équation à la ligne droite ; d'où on peut conclure, ce qui d'ailleurs est évident, que l'hyperbole dégénère en triangle, lorsque $c = 0$, c'est-à-dire, lorsque le plan coupant passe par le sommet du cône.

Pour ramener l'équation des sections du cône oblique à celle des sections du cône droit, il suffit de remarquer que dans celle-ci on a

$$\sin C \times \sin D = \cos^2 \tfrac{1}{2} B.$$

On a vu l'origine des trois sections coniques, voici maintenant leurs principales propriétés ; pour en simplifier la recherche, nous supposerons ces courbes décrites sur un plan.

De la Parabole.

664. L'équation à cette courbe est $yy = 4cx \sin^2 \frac{1}{2} B$; donc si l'on fait la quantité constante $4c \sin^2 \frac{1}{2} B = p$, on aura $yy = px$. D'où il suit que les quarrés des ordonnées à la parabole sont entr'eux comme leurs abscisses.

En prenant donc une abscisse double d'une autre, les quarrés construits sur les deux ordonnées correspondantes, seront dans le rapport de 2 à 1.

124. La ligne indéfinie AL se nomme l'axe de la parabole, le point A en est le sommet, AQ est une abscisse, MQ est l'ordonnée correspondante à cette abscisse, et la quantité constante p se nomme le paramètre de l'axe.

On peut toujours déterminer cette quantité p par l'équation $yy = px$, qui donne $x : y :: y : p$. Il suffit, pour cela, de prendre une abscisse et une ordonnée quelconque ; la troisième proportion-

nelle à ces deux lignes sera le paramètre d'une parabole qui passera par leurs extrémités. FIG.

665. Si on prend l'abscisse $AF = \frac{1}{4}p$, le point F sera ce qu'on appelle *le foyer*, et l'ordonnée DF passant par ce point aura pour expression $\sqrt{\frac{1}{4}p^2} = \frac{1}{2}p$. Donc la double ordonnée D*d* passant par le foyer est égale au paramètre.

Si sur LA prolongée, on prend $AG = AF = \frac{1}{4}p$, et si par le point G on mène la ligne indéfinie EG*e* parallèle à l'ordonnée MQ, cette ligne EG*e* se nomme *directrice*.

666. Or $FM = \sqrt{[yy + (x - \frac{1}{4}p)^2]} = \sqrt{[px + (x - \frac{1}{4}p)^2]} = x + \frac{1}{4}p = AQ + AG = MH$; donc $FM = MH$; donc la distance d'un point quelconque M de la parabole à la directrice, est égale à la distance de ce même point au foyer F, propriété qui donne une manière facile de décrire la parabole par un mouvement continu.

667. Soit en effet l'équerre EHO dont le côté EH puisse se mouvoir librement le long de la directrice EG, et soit un fil OMF égal en longueur à l'autre côté HO; si ayant fixé l'une des extrémités de ce fil au point O, et l'autre au foyer F, on approche l'équerre de l'axe, pour l'en éloigner ensuite en tenant toujours le fil tendu par le moyen d'un style M qui descende le long de HO; je dis que la courbe décrite dans ce mouvement par le style M sera une parabole, et que la distance MH à la directrice sera partout égale à la distance MF au foyer. Rien n'est plus clair, puisque la partie MO étant commune, et les tous étant égaux, les restes MF et MH sont nécessairement égaux.

668. Proposons-nous maintenant de mener par le point donné M sur la parabole AM la tangente MT. 135.

Ayant imaginé l'arc M*m* infiniment petit, son prolongement M*m*T sera la tangente demandée. Or si on mène les perpendiculaires MQ, *mq* sur la directrice, et les droites MF, *m*F au foyer F; enfin *mg* parallèle à Q*q*, et si on suppose décrit du point F comme centre, et du rayon F*m* l'arc infiniment petit *mr* que l'on peut regarder comme un sinus, on aura $MQ = MF$, $mq = mF$; donc $MQ - mq$, ou $Mg = MF - mF$, ou M*r*. Les triangles rectangles M*mg*, M*mr* sont donc égaux et semblables, et parconséquent l'angle *m*M*r*, ou $TMF = gMm = QMT = MTF$. Donc le triangle MTF est isoscèle, et parconséquent si on prend $FT = FM$, la ligne MT menée par les points T et M sera la tangente demandée.

L'angle $MTF = LMO = FMT$. Donc tous les rayons lumineux ou sonores OM parallèles à l'axe AP, doivent à la rencontre de la parabole AM, se réfléchir à son foyer F; car on sait que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

669. Puisque $FM = x + \frac{1}{4}p$, on a $FT - \frac{1}{4}p = AT = x$. Donc la soutangente $PT = 2x$. Donc la soutangente dans la parabole est toujours double de l'abscisse.

La tangente $MT = \sqrt{(px + 4xx)} = \sqrt{(4MF \times x)}$. Si on mène

116. la ligne MN perpendiculaire à la parabole, ou, ce qui revient au même, à sa tangente MT au point M, on aura

$$PN = \frac{PM^2}{PT} = \frac{px}{2x} = \tfrac{1}{2}p.$$

Donc dans la parabole la sounormale est toujours égale à la moitié du paramètre. Quant à la normale MN, son expression est

$$\sqrt{(px + \tfrac{1}{4}p^2)} = \sqrt{(MF \times p)}.$$

Elle est donc moyenne proportionnelle entre la distance du point M au foyer et le paramètre.

134. 670. Une ligne quelconque MO parallèle à l'axe d'une parabole, se nomme en général un *diamètre*. Le point M en est l'origine; le quadruple de la distance de ce point au foyer F en est le paramètre q; ses ordonnées sont des droites NP parallèles à la tangente en M, et les abscisses de ces ordonnées sont les lignes MP.

Pour trouver l'équation aux coordonnées du diamètre MO, nommons MP (x), PN (y), $AQ = AT = a$, on aura $MQ = \sqrt{ap}$, $q = p + 4a$, $MT = \sqrt{aq}$; et si on mène NL perpendiculaire à l'axe, les triangles semblables NRL, MTQ donneront

$$\sqrt{aq} : y + \sqrt{aq} :: \sqrt{ap} : NL = \frac{y\sqrt{ap}}{\sqrt{aq}} + \sqrt{ap} :: 2a : RL = \frac{2ay}{\sqrt{aq}} + 2a.$$

Or

$$AR = RT - AT = x - a;$$

donc

$$AL = x + a + \frac{2ay}{\sqrt{aq}},$$

et par la propriété de la parabole,

$$NL^2 = p \times AL, \text{ ou } \left(\sqrt{ap} + \frac{y\sqrt{ap}}{\sqrt{aq}}\right)^2 = ap + px + \frac{2apy}{\sqrt{aq}};$$

d'où l'on tire, en réduisant,

$$yy = qx,$$

équation semblable à celle que nous avons trouvée pour les axes: d'où il faut conclure qu'un diamètre quelconque MO divise en deux également toutes les ordonnées Nn. Par le moyen de ces principes, il est facile de résoudre les problêmes suivans.

671. I. L'axe AL d'une parabole étant donné avec son paramètre p, trouver un diamètre MO qui fasse avec ses ordonnées un angle donné MP$n = a$.

Le problême se réduit à trouver le point Q où la perpendiculaire MQ rencontre l'axe. Soit donc $AQ = x$, le triangle MTQ donnera

$$2x : \sqrt{px} :: 1 : \text{tang } a.$$

D'où 716.

$$x = \frac{p}{4} \cot^2 a,$$

et le paramètre du diamètre MO, ou

$$q = p + 4x = \frac{p}{\sin^2 a}.$$

Il est aisé de voir que ce problême a deux solutions.

II. Le paramètre q du diamètre MO étant donné avec l'origine M de ce diamètre et l'angle a qu'il fait avec ses ordonnées, trouver l'axe AL, son origine A et son paramètre p.

Le problême se réduit à trouver la distance MQ de l'axe au diamètre, ensuite la distance AQ, afin d'avoir le sommet A et le paramètre p. Or en gardant les mêmes dénominations que dans le problême précédent, on a

$$\mathrm{MQ} = \sqrt{px},\ q = p + 4x = \frac{p}{\sin^2 a}.$$

d'où l'on tire

$$p = q \sin^2,\ x = \tfrac{1}{4} q \cos^2 a,\ \mathrm{MQ} = \pm \tfrac{1}{2} q \sin a \cos a = \pm \tfrac{1}{4} q \sin 2a.$$

Les propriétés de la parabole trouvent souvent leur application dans les arts et dans les sciences.

De l'Ellipse.

L'équation à l'ellipse est 136.

$$yy = \frac{\sin \mathrm{A}}{\cos^2 \frac{1}{2} \mathrm{B}} [cx \sin \mathrm{B} - xx \sin (\mathrm{A} + \mathrm{B})];$$

d'où il suit qu'à chaque abscisse AP répondent deux ordonnées PM, PM′ égales et opposées. Si l'on fait $y = 0$, on aura les deux points où la courbe rencontre la ligne des abscisses, c'est-à-dire, le grand axe Aa. Le premier de ces points est en A, où $x = 0$; le second est en a, où $x = \frac{c \sin \mathrm{B}}{\sin (\mathrm{A} + \mathrm{B})}$, expression constante que je suppose égale au grand axe Aa. Soit donc le grand axe $= 2a$, et on aura

$$yy = \frac{\sin \mathrm{A} \sin (\mathrm{A} + \mathrm{B})}{\cos^2 \frac{1}{2} \mathrm{B}} (2ax - xx).$$

672. La double ordonnée BCb passant par le milieu C de l'axe Aa, ou par le centre de l'ellipse, se nomme *le petit Axe*. Pour faire entrer son expression dans l'équation à l'ellipse, nommons-le $2b$, et nous aurons

$$bb = \frac{\sin \mathrm{A} \sin (\mathrm{A} + \mathrm{B})}{\cos^2 \frac{1}{2} \mathrm{B}} aa.$$

D'où l'on tire

$$yy = \frac{bb}{aa} (2ax - xx).$$

FIG. 136. Ce qui donne cette proportion

$$yy : 2ax - xx :: bb : aa, \text{ ou } PM^2 : AP \times Pa :: CB^2 : CA^2;$$

c'est-à-dire que dans l'ellipse les quarrés des ordonnées au grand axe sont aux produits de leurs abscisses, comme le quarré du petit axe est au quarré du grand.

Si on décrit un cercle dont le centre soit C et le rayon CA, on aura $PN^2 = AP \times Pa$. Donc $PN : PM :: a : b :: CB' : CB$.

Les ordonnées de l'ellipse sont donc proportionnelles aux ordonnées d'un cercle décrit sur le grand axe; ce qui donne une méthode facile de décrire une ellipse. Il suffit pour cela de faire passer une courbe par une suite de points pris sur les ordonnées d'un cercle, coupées en parties semblables.

673. Si on eût compté les abscisses du centre C, en faisant $CP = x$, on aurait eu

$$yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx) = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2};$$

équation dont nous nous servirons souvent.

Si b était égal à a, on aurait $yy = aa - xx$ équation au cercle; on peut donc regarder un cercle comme une ellipse dont les deux axes sont égaux.

L'équation $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$ donne $xx : bb - yy :: aa : bb$, ou $MQ^2 : BQ \times Qb :: CA^2 : CB^2$. Donc les quarrés des ordonnées au petit axe de l'ellipse sont aux rectangles de leurs abscisses, comme le quarré du grand axe est au quarré du petit.

674. Si de l'une des extrémités B du petit axe et d'un rayon BF égal au demi-grand axe CA, on décrit un arc de cercle, il coupera le grand axe en deux points F, f que l'on appelle *Foyers*. La distance CF est donc égale à $\sqrt{(aa - bb)}$, d'où il suit que

$$AF \times Fa = (a - \sqrt{aa - bb})(a + \sqrt{aa - bb}) = bb = CB^2.$$

Donc le petit demi-axe est moyen proportionnel entre les distances de l'un des foyers aux deux sommets de l'ellipse.

675. L'ordonnée DF passant par le foyer, a pour expression $\frac{b^2}{a}$, et Dd que l'on appelle *le paramètre* p *du grand axe* $= \frac{2bb}{a} = \frac{4bb}{2a}$. Donc $2a : 2b :: 2b : p$; le paramètre est donc une troisième proportionnelle au grand et au petit axe. Par analogie à cette propriété, on appelle *paramètre du petit axe de l'ellipse* une ligne $q = \frac{2aa}{b}$, troisième proportionnelle au petit et au grand axe.

Puisque $\frac{2bb}{a} = p$, on a $bb = \frac{1}{2}ap$; mettant donc cette valeur dans

les équations à l'ellipse trouvées ci-dessus, on a $yy = px - \frac{pxx}{2a}$, FIG.
et $yy = \frac{p}{2a}(aa - xx)$, selon que l'origine des abscisses est à l'un des sommets, ou au centre.

676. Les lignes FM, fM menées des foyers à un point quelconque de l'ellipse, se nomment *rayons vecteurs;* et supposant FC$=c$, on a

$$\text{FM} = \sqrt{(yy + c^2 - 2cx + xx)} = \sqrt{\left(b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} + a^2 - b^2 - 2cx + xx\right)}$$

$$= \sqrt{\left(a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}\right)} = a - \frac{cx}{a}, \text{ et } f\text{M} = a + \frac{cx}{a}.$$

Donc fM + FM $= 2a =$ Aa; la somme des rayons vecteurs dans l'ellipse est donc toujours égale au grand axe, propriété remarquable d'où l'on peut déduire une autre manière de décrire l'ellipse.

Ayant attaché à deux points fixes F, f un fil FMf plus grand que Ff, on tendra ce fil par le moyen d'un style M, avec lequel on décrira autour des foyers F, f une courbe qui sera une ellipse, puisque la somme des rayons vecteurs sera partout la même.

Or de cette description il suit évidemment que sur le même grand axe on peut décrire un nombre infini d'ellipses, dont les unes s'approcheront de plus en plus de la figure du cercle circonscrit; et ce seront celles qui auront leurs deux foyers plus proches, pendant que les autres s'aplatiront de plus en plus dans le sens du petit axe, à mesure que leurs foyers seront plus éloignés : ensorte que le cercle et la ligne droite sont les deux limites de toutes ces ellipses.

677. Soit proposé maintenant de mener par le point donné M la tangente MT.

Ayant imaginé l'arc Mm infiniment petit, on mènera des foyers 137.
F, f les rayons vecteurs fm, fM, Fm, FM, et on décrira des centres F et f et des rayons FM, fm les petits arcs Mg, mr, et on aura

$$fm + m\text{F} = \text{FM} + \text{M}f, \text{ ou } f\text{M} - fm = \text{M}r = \text{F}m - \text{FM} = mg;$$

donc les triangles rectangles mMg, mMr, sont égaux et semblables, et parconséquent l'angle gmM ou FmT, ou FMT $= m$M$r =$ LMT. Donc si on prolonge le rayon vecteur fM, la ligne MT qui divisera l'angle LMF en deux également, sera la tangente demandée.

L'angle LMT $=$ OMf $=$ FMT. Donc tous les rayons partis d'un foyer lumineux F, doivent à la rencontre de l'ellipse AM se réfléchir à l'autre foyer f.

678. Si on mène la normale MN, l'angle fMN sera égal à l'angle NMF. On aura donc

$$f\text{M} : \text{FM} :: f\text{N} : \text{FN},$$

ou

$$f\text{M} + \text{FM}(2a) : \text{FM}\left(a - \frac{cx}{a}\right) :: f\text{N} + \text{FN}(2c) : \text{FN}$$

$$= c - \frac{c^2x}{aa} = c - x + \frac{b^2x}{a^2}.$$

116. Donc

$$FN + x - c = PN = \frac{bbx}{aa} = \frac{px}{2a}.$$

C'est l'expression de la sounormale dans l'ellipse, lorsque l'origine des abscisses est au centre. Si elle était au sommet, en nommant AP (z), on aurait $PN = \frac{bb}{a} - \frac{bbz}{a^2} = \frac{1}{2}p - \frac{pz}{2a}$.

La normale

$$NM = \sqrt{\left(yy + \frac{b^4x^2}{a^4}\right)} = \sqrt{\left[b^2 - \frac{b^2x^2}{a^4}(a^2 - b^2)\right]} = b\sqrt{\left(1 - \frac{c^2x^2}{a^4}\right)}.$$

La soutangente

$$PT = \frac{PM^2}{PN} = \frac{\frac{bb}{aa}(aa - xx)}{\frac{bb}{aa}x} = \frac{aa - xx}{x} = \frac{2az - zz}{a - z}.$$

Donc $CT = \frac{aa}{x}$, ce qui donne cette proportion

$$CP : CA :: CA : CT,$$

au moyen de laquelle il est facile de déterminer le point T par où passe la tangente MT.

L'expression de la tangente MT se trouve par le moyen du triangle rectangle PMT.

138. 679. Une droite quelconque nCN qui, passant par le centre de l'ellipse, aboutit aux deux points opposés de cette courbe, se nomme diamètre; et si l'on mène DCd parallèle à la tangente en N, les diamètres DCd, nCN sont nommés *conjugués;* les lignes comme MP parallèles à la tangente en N sont les ordonnées du diamètre CN, et les parties CP en sont les abscisses. Enfin le paramètre d'un diamètre quelconque est une ligne troisième proportionnelle à ce diamètre et à son conjugué.

680. Soient menées des extrémités D et N les deux ordonnées NQ, DI au grand axe Aa, et soit $CQ = x$, $DI = u$; à cause des triangles semblables DIC, NQT, on aura

$$NQ^2 : QT^2 :: DI^2 : IC^2,$$

ou

$$\frac{bb}{aa}(aa - xx) : \frac{(aa - xx)^2}{xx} :: u^2 : aa - \frac{a^2u^2}{b^2}.$$

D'où l'on tire $u = \frac{bx}{a}$, ce qui donne $CQ : DI :: a : b$; on trouverait de même $CI : NQ :: a : b$. Donc $CQ : DI :: CI : NQ$; d'où il suit que les triangles DIC, CNQ sont égaux en surface.

Donc 1°. $DI^2 = \frac{b^2 CQ^2}{a^2} = bb - NQ^2$, ou $DI^2 + NQ^2 = bb$. FIG. 138.

2°. $CI^2 = \frac{a^2}{b^2} NQ^2 = aa - CQ^2$, ou $CI^2 + CQ^2 = a^2$.

3°. $a^2 + b^2 = CI^2 + CQ^2 + NQ^2 + DI^2 = CD^2 + CN^2$;

c'est-à-dire, que dans l'ellipse, la somme des quarrés de deux diamètres conjugués quelconques est toujours égale à la somme des quarrés des deux axes.

4°. Si l'on mène ND, la surface du triangle NCD aura pour expression

$$\tfrac{1}{2}(DI + NQ)\,(CI + CQ) - \tfrac{1}{2} CI \times ID - \tfrac{1}{2} CQ \times NQ$$
$$= \tfrac{1}{2} CI \times NQ + \tfrac{1}{2} CQ \times DI = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b} NQ^2 + \frac{b}{a} CQ^2\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b} \times \frac{b^2}{a^2}(a^2 - CQ^2) + \frac{b}{a} CQ^2\right) = \tfrac{1}{2} ab.$$

Donc la surface du parallélogramme CDEN sera ab, et celle du parallélogramme entier FEHG sera $4ab = 2a \times 2b$. D'où il suit que tous les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse sont égaux entre eux et au rectangle des deux axes.

681. Soit maintenant le demi-diamètre $CN = m$, $CD = n$, l'angle $CPM = DCn = p$; on aura, 1°. $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$; 2°. $ab = mn \sin p$, qui est l'expression de la surface du parallélogramme CDNE. Or ces deux équations donnent immédiatement les diamètres conjugués et égaux de l'ellipse : car alors on a

$$2m^2 = a^2 + b^2, \text{ ou } m = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)}, \text{ et } \sin p = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

Donc puisque ces quantités sont toujours réelles, chaque ellipse doit avoir deux diamètres conjugués égaux.

Quant à leur position, elle dépend de la valeur de CQ; or $CQ^2 + NQ^2$, ou $b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} CQ^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$; donc $CQ = \frac{a}{\sqrt{2}}$ valeur indépendante de b, et qui fait voir que l'ordonnée NQ prolongée, déterminera les diamètres conjugués égaux dans toutes les ellipses qui auront l'axe Aa commun.

682. Cherchons à présent l'équation aux coordonnées CP, PM, et faisons $CP = x$, $PM = y$, $NT = q$, $NQ = r$, $QT = s$, $CQ = t$. Si l'on mène PK, MO perpendiculaires à l'axe, et LP perpendiculaire à MO, on aura par les triangles semblables NQT, MLP, $ML = \frac{ry}{q}$, $PL = \frac{sy}{q}$; et les deux autres triangles CPK, CNQ donneront $PK = \frac{rx}{m}$, $CK = \frac{tx}{m}$; d'où $CO = \frac{tx}{m} - \frac{sy}{q}$, et $MO = \frac{ry}{q} + \frac{rx}{m}$. Or par la pro-

FIG. 138. priété de l'ellipse, on a $\frac{a^2}{b^2}MO^2 = a^2 - CO^2$. Substituant donc et ordonnant, on aura

$$\left(\frac{a^2r^2}{b^2q^2} + \frac{s^2}{q^2}\right)y^2 + \left(\frac{a^2r^2}{b^2} - ts\right)\frac{2xy}{mq} + \left(\frac{a^2r^2}{b^2m^2} + \frac{t^2}{m^2}\right)x^2 = a^2;$$

et puisque $\frac{a^2r^2}{b^2} = a^2 - CQ^2 = ts$, on aura

$$\left(\frac{a^2r^2}{b^2q^2} + \frac{s^2}{q^2}\right)y^2 + \left(\frac{a^2r^2}{b^2m^2} + \frac{t^2}{m^2}\right)x^2 = a^2.$$

Observons maintenant que lorsque $x = 0$, $y = n$, ainsi le coefficient de y^2 est $\frac{a^2}{n^2}$; lorsqu'au contraire $y = 0$, alors $x = m$, d'où le coefficient de x^2 est $\frac{a^2}{m^2}$. L'équation devient donc $\frac{a^2}{n^2}y^2 + \frac{a^2}{m^2}x^2 = a^2$, qui donne $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$, résultat parfaitement conforme à celui de l'équation aux axes.

Il suit de-là, 1°. que tout diamètre NCn divise en deux parties égales les ordonnées MPm, et parconséquent l'ellipse entière. 2°. Qu'un diamètre quelconque Nn est divisé en deux également au centre C; car aux points N et n on a $x^2 = m^2$; d'où $x = \pm m$.

683. PROBLÊME I. Etant donnés les deux demi-axes a et b, trouver deux diamètres qui fassent entre eux un angle donné $p = DCn$.

On a

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2, \quad mn = \frac{ab}{\sin p};$$

donc

$$m^2 + n^2 + 2mn = aa + bb + \frac{2ab}{\sin p}, \text{ et } m^2 + n^2 - 2mn = a^2 + b^2 - \frac{2ab}{\sin p};$$

donc

$$m + n = \sqrt{\left(a^2 + b^2 + \frac{2ab}{\sin p}\right)}, \text{ et } m - n = \sqrt{\left(a^2 + b^2 - \frac{2ab}{\sin p}\right)};$$

donc

$$m = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(a^2 + b^2 + \frac{2ab}{\sin p}\right)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(a^2 + b^2 - \frac{2ab}{\sin p}\right)}, \text{ et } n = \tfrac{1}{2}\sqrt{\text{etc.}}$$

Il ne reste maintenant qu'à déterminer la direction de l'un des diamètres, ou l'angle ACN que j'appelle c. Or le triangle CNT donne

$$\sin(p - c) : m :: \sin p : CT = \frac{aa}{CQ} = \frac{m \sin p}{\sin(p - c)};$$

d'où l'on tire

$$CQ = \frac{a^2 \sin(p - c)}{m \sin p};$$

on a donc dans le triangle rectangle CNQ, FIG.

$$1 : m :: \cos c : \frac{a^2 \sin(p-c)}{m \sin p},$$

qui donne

$$m^2 \cos c \sin p = a^2 \sin(p-c) = a^2 \sin p \cos c - a^2 \sin c \cos p,$$

ou

$$\frac{a^2 - m^2}{a^2} \sin p \cos c = \sin c \cos p;$$

donc

$$\tang c = \frac{a^2 - m^2}{a^2} \tang p.$$

684. PROBLÊME II. Les deux diamètres m et n, et l'angle p qu'ils font entre eux étant donnés, trouver les deux axes et leur direction.

Des équations $mn \sin p = ab$, et $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$, on déduit en faisant un calcul semblable à celui du problême précédent,

$$a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(m^2 + n^2 + 2mn \sin p)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(m^2 + n^2 - 2mn \sin p)},$$
$$\text{et } b = \tfrac{1}{2}\sqrt{(m^2 + n^2 + 2mn \sin p)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(m^2 + n^2 - 2mn \sin p)}.$$

L'angle C qui donne la direction des axes se trouve comme dans le problême précédent.

De l'Hyperbole.

685. L'équation

$$yy = \frac{\sin A}{\cos^2 \frac{1}{2} B} [cx \sin B + xx \sin(A + B - 180°)]$$

fait voir que l'hyperbole rencontre son axe AP en deux points, dont l'un est en A, où $x = 0$; l'autre est en a, où $x = -\frac{c \sin B}{\sin(A + B - 180°)}$; ainsi en supposant que Aa soit égal à $\frac{c \sin B}{\sin(A + B - 180°)}$, le point a 139.
sera à l'hyperbole opposée M'am'. Or les points A, a se nomment les sommets de l'hyperbole, la ligne Aa ($2a$) en est l'axe, son milieu C en est le centre; enfin une droite Bb = 2CB = $2b$, telle que ..... $\frac{bb}{aa} = \frac{\sin A \sin(A + B - 180°)}{\cos^2 \frac{1}{2} B}$, menée perpendiculairement à l'axe, et passant par le centre C, se nomme le second axe.

686. Les valeurs de b et de a étant substituées dans l'équation de l'hyperbole, donnent $yy = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$. Or cette équation fait voir que la courbe a deux branches AM et Am égales et infinies, dans le sens positif. Mais si x est négative, il n'y aura point de courbe, tant que x sera $< 2a$; si x est $> 2a$, les ordonnées seront réelles, et la courbe aura deux autres branches qui s'étendront à l'infini.

Digitized by Google

FIG. 139. Or il est aisé de prouver que ces deux branches sont égales à celles de l'hyperbole positive MAm. Car puisqu'en appelant AP′ $(-x)$, P′m' = P′M′ (y), on a $\frac{a^2}{b^2}yy = -2ax + xx$; si l'on fait aP′ $= x'$, on aura $x = 2a + x'$, et parconséquent $\frac{a^2y^2}{b^2} = 2ax' + x'x'$; équation absolument semblable à celle de l'hyperbole MAm.]

687. Puisque $yy = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$, on a

$$PM^2 : AP \times Pa :: CB^2 : CA^2.$$

Donc dans l'hyperbole les quarrés des ordonnées au premier axe sont aux rectangles de leurs abscisses, (c'est-à-dire, des distances aux deux sommets), comme le quarré du second axe est au quarré du premier.

Si on met l'origine des x au centre C, on aura CP $= x$, ce qui donnera $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, équation un peu plus simple que la précédente. Elle donne $xx = \frac{aa}{bb}(bb + yy)$; donc si on mène MQ perpendiculaire sur le petit axe CB, prolongé s'il est nécessaire, et si on nomme les coordonnées CQ, MQ, x et y, on aura $MQ^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + CQ^2)$, ou $yy = \frac{aa}{bb}(b^2 + x^2)$, pour l'équation aux coordonnées du second axe.

688. Si $a = b$, alors l'hyperbole se nomme équilatère, et on a pour ses équations, $yy = 2ax + xx$, $yy = xx - aa$, selon que l'origine des abscisses est au sommet ou au centre, et l'équation au second axe devient alors $yy = aa + xx$.

689. Si, ayant mené BA, on prend de part et d'autre du centre C, CF $=$ Cf $=$ BA, les points F, f seront les foyers de l'hyperbole. La double ordonnée Dd passant par l'un des foyers, se nomme *le paramètre*, et les lignes FM, fM menées de ces points à ceux de la courbe, se nomment *rayons vecteurs*.

Cela posé, la distance CF $= \sqrt{(aa + bb)}$. Donc

$$FA \times Fa = (\sqrt{(aa + bb)} - a)\ (\sqrt{(aa + bb)} + a) = bb.$$

Le second demi-axe de l'hyperbole est donc moyen proportionnel entre les deux distances de l'un des foyers aux deux sommets.

L'ordonnée DF $= \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 + b^2 - a^2)} = \frac{bb}{a}$; donc le paramètre $p = Dd = \frac{2bb}{a} = \frac{4bb}{2a}$. Il est donc troisième proportionnel au premier et au second axe. On appelle paramètre du second axe une ligne q troisième proportionnelle au second et au premier axe.

690. Si l'on fait entrer l'expression du paramètre dans les équations à l'hyperbole,

$$yy = \frac{bb}{aa}(2ax + xx) \ldots . yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa),$$ FIG.

on aura

$$yy = \frac{p}{2a}(2ax + xx) \ldots . yy = \frac{p}{2a}(xx - aa).$$

De même l'équation $yy = \frac{aa}{bb}(bb + xx)$ qui convient au second axe, se change en celle-ci

$$yy = \frac{4b^2}{p^2}(bb + xx) = \frac{2a}{p}(\tfrac{1}{2}ap + xx).$$

691. Soit $CF = Cf = c$, on aura

$$FM = \sqrt{(yy + xx - 2cx + cc)} = \frac{cx}{a} - a, \text{ et } fM = \frac{cx}{a} + a.$$

Donc $fM - FM = 2a$. Ainsi dans l'hyperbole la différence des rayons vecteurs est partout égale au premier axe.

On tire de là une manière facile de décrire une hyperbole dont les axes soient $2a$ et $2b$. Il faudra prendre un intervalle $Ff = 2\sqrt{(aa+bb)}$, et se servir d'une règle fMO d'autant plus longue que l'on voudra avoir une plus grande portion d'hyperbole ; on en fixera une extrémité à l'un des foyers, au point f, par exemple, de manière qu'elle puisse tourner librement autour de ce point. On prendra ensuite un fil FMO égal en longueur à $fMO - 2a$. On fixera l'une des extrémités de ce fil au point O de la règle, et l'autre au foyer F. Cela fait, on écartera la règle de l'axe autant que le fil FMO pourra le permettre, et on l'en approchera ensuite, ayant soin de tenir toujours ce fil tendu par le moyen d'un style M qui coule le long de la règle fMO. La courbe décrite dans ce mouvement par le style M, sera une branche hyperbolique AM, puisque la différence des rayons vecteurs sera partout égale au premier axe.

692. Cette même propriété peut servir à mener la tangente MT en un point quelconque M de l'hyperbole. En effet, si l'on imagine l'arc Mm infiniment petit, en menant les rayons vecteurs fM, fm, FM, Fm, on prouvera, à peu près comme dans l'ellipse, que les angles fMm, mMF sont égaux, et que parconséquent si l'on divise l'angle fMF en deux également par la ligne MT, cette ligne sera la tangente demandée. 140.

Cela posé, dans le triangle fMF, on a

$$fM : MF :: fT : FT,$$

ou

$$fM + FM\left(\frac{2cx}{a}\right) : fM\left(\frac{aa + cx}{a}\right) :: fT + FT(2c) : fT$$

$$= \frac{aa + cx}{x} = \frac{aa}{x} + c.$$

FIG. 140. Donc $f\mathrm{T} - c$, ou $\mathrm{CT} = \frac{aa}{x}$, ce qui donne cette proportion

$$\mathrm{CP} : \mathrm{CA} :: \mathrm{CA} : \mathrm{CT},$$

avec laquelle il est facile de trouver le point T, et parconséquent de mener la tangente MT.

693. On peut remarquer que CT étant égal à $\frac{aa}{x}$, il est toujours positif tant que x l'est. Ainsi toutes les tangentes à l'hyperbole coupent l'axe en des points T situés entre A et C. Mais plus l'abscisse est grande, plus la ligne CT diminue, ensorte qu'elle est infiniment petite ou nulle lorsque l'abscisse est infiniment grande. D'où l'on voit qu'on peut mener par le centre C deux droites CX, Cx, qui seront les limites des tangentes de l'hyperbole. Ces droites, dont nous allons bientôt déterminer la position, s'appellent les *Asymptotes* de l'hyperbole.

694. La soutangente $\mathrm{PT} = x - \frac{aa}{x} = \frac{xx - aa}{x}$, et la tangente $\mathrm{MT} = \sqrt{\left[\frac{bb}{aa}(xx - aa) + xx - 2a^2 + \frac{a^4}{x^2}\right]}$ $= \sqrt{\left[\frac{aa + bb}{aa}x^2 - bb - 2a^2 + \frac{a^4}{x^2}\right]}$. Si l'on mène la normale MN, on aura la sounormale

$$\mathrm{PN} = \frac{\frac{bb}{aa}(xx - aa)}{\frac{xx - aa}{x}} = \frac{bbx}{aa},$$

et la normale

$$\mathrm{MN} = \sqrt{\left[\frac{b^4x^2}{a^4} + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)\right]}.$$

695. La ligne $\mathrm{AT} = a - \mathrm{CT} = a - \frac{aa}{x}$; et si l'on mène AS parallèle à MP, on aura

$$\frac{xx - aa}{x} : y :: a - \frac{aa}{x} : \mathrm{AS} = \frac{ay}{x + a} = b\sqrt{\left(\frac{x - a}{x + a}\right)}.$$

Or si on suppose x infinie, la quantité $\frac{x - a}{x + a}$ ne différera pas de l'unité. On aura donc alors $\mathrm{AS} = b$. D'où il suit que si on mène AD et Ad perpendiculaires à CA et égales chacune au demi-petit axe b, les lignes CD, Cd qui passeront par les points D, d et par le centre C, seront les asymptotes de l'hyperbole MAM', et en les prolongeant en sens contraire, elles seront celles de l'hyperbole opposée.

Si l'hyperbole est équilatère, l'angle DCd fait par les asymptotes est droit. Car alors $\mathrm{DA} = \mathrm{A}d = \mathrm{CA}$.

L'hyperbole

L'hyperbole rapportée à ses asymptotes a beaucoup de propriétés; voici les principales. FIG.

696. Si par un point quelconque N de l'asymptote, on mène la droite Nn parallèle à la ligne Dd, on aura 141.

$$CA(a) : DA(b) :: CP(x) : NP = \frac{bx}{a}.$$

Donc

$$NM = \frac{bx}{a} - y, \text{ et } Mn = \frac{bx}{a} + y.$$

Parconséquent

$$NM \times Mn = \frac{b^2x^2}{a^2} - y^2 = bb = DA^2.$$

Puisque $NP^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$, et que $MP^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - bb$, on a donc toujours NP > MP. La branche hyperbolique ne peut donc jamais se confondre avec son asymptote.

Elle s'en approche cependant de plus en plus : car à mesure que l'abscisse croît, la différence de $\frac{b^2x^2}{a^2}$ à $\frac{b^2x^2}{a^2} - bb$ devient moins sensible : ensorte qu'elle s'évanouit, si on suppose x infinie.

697. Menons MQ et AL parallèles à l'asymptote Cd. Il est facile de voir que les triangles DLA, LCA sont isoscèles. Soit donc $AL = DL = m \ldots\ldots CQ = x \ldots\ldots QM = y$. Si on mène MK, parallèle et égale à CQ, on aura, par les triangles semblables DLA, NQM, MKn, les proportions MN:DA::QM:LA, Mn:DA::MK:DL. Donc $Mn \times MN : DA^2 :: QM \times MK : AL^2$. Or $Mn \times MN = DA^2$. Donc $xy = mm$, équation à l'hyperbole entre ses asymptotes, dans laquelle $mm = \frac{1}{4}(aa + bb)$ est ce qu'on appelle la puissance de l'hyperbole.

698. Si deux parallèles Ff, Gg terminées aux asymptotes coupent une hyperbole aux points m, h, p, K, on aura $Gp \times pg = Fm \times mf$. Car si l'on mène M$mN, Pp$Q perpendiculaires à l'axe, on aura 142.

$$Fm : Mm :: Gp : Pp, \quad mf : mN :: pg : pQ.$$

Donc

$$Fm \times mf : Mm \times mN :: Gp \times pg : Pp \times pQ.$$

Or (696)

$$Pp \times pQ = bb = Mm \times mN.$$

Donc

$$Fm \times mf = Gp \times pg.$$

On a donc aussi

$$Kg \times KG = fh \times hF.$$

699. Si l'on suppose que les points p, K coïncident en un seul point D, la ligne TDt sera tangente au point D, et on aura

$$Fm \times mf = Dt \times DT, \text{ et } fh \times hF = Dt \times DT = Fm \times mf;$$

donc $fh(hm + mF) = Fm(mh + hf)$; donc $fh = Fm$, et par-

FIG. conséquent TD = Dt. Or si l'on mène DE parallèle à Ct, ou ordonnée à l'asymptote CT, les triangles semblables TDE, TtC, donneront TE = EC. Donc pour mener sur l'hyperbole une tangente en un point D, correspondant à l'ordonnée DE, il faut prendre ET = EC, et mener par les points T et D, la tangente TDt.

700. Puisqu'on a toujours fh = Fm, de quelque manière que l'on mène la droite Ff, les deux parties Fm, fh interceptées entre la courbe et les asymptotes, seront toujours égales.

On tire de là une manière facile de décrire une hyperbole entre deux asymptotes données CT, Ct, et qui passe par un point donné m.

On mènera par ce point les droites Ff, MN, etc.; on prendra fh = Fm, nN = Mm, etc.; et les points n, h, etc. seront à l'hyperbole.

143. 701. Selon ce que nous avons vu (699), une tangente TMt terminée aux asymptotes, est divisée en deux également au point de contact M. Or si l'on mène MCM′, cette ligne se nomme un diamètre; la tangente TMt en est le diamètre conjugué. Ses ordonnées sont des droites mQm' parallèles au diamètre conjugué TMt ou DCd, et le paramètre d'un diamètre quelconque est une ligne troisième proportionnelle à ce diamètre et à son conjugué. On nomme encore *premier diamètre* la ligne MCM′ = 2CM, et second diamètre la ligne TMt = 2TM = DCd = 2DC.

702. Cela posé, il est facile de voir qu'un diamètre divise toutes ses ordonnées en deux parties égales. Car NQ : Qn :: TM : Mt, et Nm = $m'n$. Soit donc CM = m..... CD = MT = n..... CQ = x, Qm = y, on aura $m : n :: x :$ NQ $= \frac{nx}{m}$. Or N$m \times mn$ = TM^2. Donc $n^2 = \frac{n^2x^2}{m^2} - yy$, et $yy = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2)$, équation semblable à celle des coordonnées au premier axe.

Cette équation donne $x^2 = \frac{m^2}{n^2}(y^2 + n^2)$. Donc si on fait C$p$ = x, pm = y, on aura $yy = \frac{m^2}{n^2}(x^2 + n^2)$, pour l'équation aux coordonnées du second diamètre CD; et on voit bien l'analogie que cette équation a avec celle des coordonnées au second axe.

703. Soit maintenant aCA le premier axe de l'hyperbole, et supposons que BA représente la moitié du second; si on mène DE, TG, MPK perpendiculaires au premier axe, et ML, tK qui lui soient parallèles; les triangles MTL, MtK, CDE seront égaux et semblables. Or si l'on nomme CP (u).... PM (z).... CE = tK = ML = r.... MK = DE = TL = s, et comme auparavant CM (m)... TM (n)... CA (a)..... AB (b), on aura

$$TG = z + s,\ CG = u + r,\ \text{et}\ z + s : u + r :: b : a,$$

et parconséquent

$$az + as = bu + br;$$

d'ailleurs

$TL(s) : ML(r) :: MP(z) : PS = \frac{rz}{s}$; et $PS = \frac{u^2 - a^2}{u} = \frac{aazz}{b^2u} = \frac{rz}{s}$. Fig. 143.

Donc

$$r = \frac{aasz}{b^2u};$$

substituant cette valeur dans l'équation $az + as = bu + br$, on a

$$(bu - as)(bu - az) = 0.$$

Or $bu - az$ ne peut se réduire à zéro ; il faut donc que $bu - as = 0$. Donc $bu = as$, et parconséquent $az = br$. On a donc

$$CP : DE :: a : b :: CE : MP.$$

704. Donc 1°. les triangles CED, CMP sont égaux en surface;

2°. Si l'on mène DM, on aura DMC, ou $\frac{1}{2}$ CDTM = le trapèze

$$DEMP = (s + z)\left(\frac{u - r}{2}\right) = \frac{su + uz - sr - rz}{2} = \frac{su - rz}{2}$$

$$= \frac{b}{2a}uu - \frac{a}{2b}zz = \frac{bbuu - aazz}{2ab} = \frac{a^2b^2}{2ab} = \frac{1}{2}ab;$$

donc le parallélogramme TT′ construit sur les diamètres conjugués est égal au rectangle des axes.

3°. $DE = \frac{b}{a}CP$. Donc $DE^2 = \frac{b^2}{a^2}CP^2 = b^2 + PM^2$, et $DE^2 - PM^2 = b^2$.

4°. $CE = \frac{a}{b}MP$, et $CE^2 = \frac{a^2}{b^2}MP^2 = CP^2 - a^2$. Donc $CP^2 - CE^2 = a^2$.

5°. $a^2 - b^2 = CP^2 + PM^2 - DE^2 - CE^2 = CM^2 - CD^2$. La différence des quarrés de deux diamètres conjugués est donc égale à la différence des quarrés des deux axes. D'où il suit que dans l'hyperbole équilatère un diamètre quelconque est égal au diamètre conjugué.

705. Soit p l'angle DCM compris par les deux diamètres conjugués : on aura les deux équations $mn \sin p = ab$, $m^2 - n^2 = a^2 - b^2$, par le moyen desquelles on peut résoudre les deux problêmes suivans.

PROBLÊME I. Etant donnés les deux axes a et b d'une hyperbole, trouver deux diamètres conjugués qui fassent entre eux un angle donné p.

Les équations précédentes donnent

$$m = \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}(a^2 - b^2) + \sqrt{\left(\frac{(b^2 - a^2)^2}{4} + \frac{a^2b^2}{\sin^2 p}\right)}\right]}$$

$$n = \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}(b^2 - a^2) + \sqrt{\left(\frac{(a^2 - b^2)^2}{4} + \frac{a^2b^2}{\sin^2 p}\right)}\right]}.$$

Il ne reste donc plus qu'à trouver la direction de l'un de ces diamètres, ou l'angle MCP que j'appellerai c. Or dans le triangle CMP, on a $1 : m :: \sin c : PM = m \sin c$. Donc $CE = \frac{am \sin c}{b}$, et dans le

FIG. 143. triangle DCE, on a $1 : n :: \cos(p+c) : \frac{am \sin c}{b}$. D'où l'on tire $\frac{am}{bn} \sin c = \cos p \cos c - \sin p \sin c$, et

$$\tang c = \frac{bn \cos p}{am + bn \sin p} = \frac{b^2}{b^2 + m^2} \cot p, \text{ parceque } a = \frac{mn \sin p}{b}.$$

PROBLÊME II. Etant donnés les diamètres conjugués m et n d'une hyperbole, et l'angle p qu'ils font entre eux, trouver les deux axes et leur direction.

On a d'abord,

$$a \begin{cases} = \sqrt{[\frac{1}{2}(m^2 - n^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(m^4 + 2m^2n^2 + n^4 - 4m^2n^2 \cos^2 p)}]} \\ = \sqrt{[\frac{1}{2}(m^2 - n^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 + n^2)^2 - 4m^2n^2 \cos^2 p)}]}. \end{cases}$$

On a ensuite,

$$b \begin{cases} = \sqrt{[\frac{1}{2}(n^2 - m^2) + \frac{1}{2}\sqrt{((m^2 + n^2)^2 - 4m^2n^2 \cos^2 p)}]} \\ = \sqrt{[\frac{1}{2}(n^2 - m^2) + \frac{1}{2}\sqrt{((m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2 \sin^2 p)}]}. \end{cases}$$

On a enfin la direction des axes, ou l'angle c comme dans le problème précédent.

Mais il est plus simple de se servir des asymptotes. Par l'extrémité M du premier diamètre CM, on mènera TMt qui fasse avec MQ l'angle TMQ$=p$, et ayant pris TM$=$M$t=n$, on mènera CT, Ct. Alors si on divise l'angle TCt en deux également par la ligne CA, on aura la direction du premier axe.

De la quadrature des sections coniques.

706. La quadrature exacte de la plupart des espaces curvilignes étant fort difficile à trouver (si même elle n'est pas quelquefois impossible, comme quelques auteurs l'ont pensé), on a cherché leur quadrature approchée. Les séries ont été d'un grand usage dans cette recherche; et c'est pour pouvoir nous en servir, que nous ajouterons quelque chose à ce qui en a été dit dans les Elémens d'Algèbre.

707. On appelle *terme général* d'une série, l'expression algébrique qui donne chaque terme de cette série, par la simple substitution de la lettre n, par laquelle on représente tel nombre de termes que l'on veut. Par exemple, le terme général de la série 1.6.21.52.105.etc. est $n^3 - n^2 + n$; parcequ'en faisant $n=1$, ou $=2$, ou $=3$, etc., on a immédiatement les termes 1, 6, 21, etc.

708. On appelle *somme générale*, ou *terme sommatoire* d'une série, l'expression qui donne généralement la somme d'un nombre quelconque de ses termes. Par exemple, $\frac{aq^n - a}{q-1}$ est le terme somma-

toire de toute progression géométrique dont on connaît le premier terme a, le quotient q, et le nombre n des termes (252). FIG. 143

709. Or la somme générale S d'une série étant donnée, il est aisé d'en trouver le terme général T. Car si dans cette somme on substitue $n-1$ à n, on aura celle de tous les termes de la série jusqu'à celui dont le rang est $n-1$, inclusivement. Donc si on soustrait cette somme que j'appelle s de la somme générale S, on aura le terme général $T=S-s$. Par exemple, si $S=\frac{n^2+n}{2}$, on aura $T=n$; et si on suppose $S=\frac{aq^n-a}{q-1}$, on trouvera $T=aq^{n-1}$.

710. Mais il n'est pas à beaucoup près aussi facile de trouver la somme générale, quand on connaît le terme général. Voici comment on peut résoudre ce problème dans un cas assez étendu dont nous aurons besoin.

Soit T une fonction quelconque rationnelle du nombre n des termes ou $T=an^m+bn^{m-1}+\text{etc}\ldots\ldots+\alpha$; il s'agit de trouver la somme S de cette série.

Pour cela je suppose que

$$S=An^{m+1}+Bn^m+Cn^{m-1}+Dn^{m-2}\ldots\ldots+R;$$

et substituant $n-1$ au lieu de n, je trouve que

$$s=\left\{\begin{array}{llll} An^{m+1} & -A.m+1.n^m & +\frac{1}{2}A.m.m+1.n^{m-1} & -\frac{A.m+1.m.m-1}{2.3}.n^{m-2}+\text{etc.} \\ +Bn^m & -Bm.n^{m-1} & +\frac{1}{2}B.m.m-1.n^{m-2} & -\text{etc.} \\ & +C.n^{m-1} & -C.m-1.n^{m-2} & +\text{etc.} \\ & & +D.n^{m-2} & -\text{etc.} \end{array}\right.$$

Donc $S-s$, ou $an^m+bn^{m-1}+cn^{m-2}+\text{etc}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$=\left\{\begin{array}{lll} A.m+1.n^m & -\frac{1}{2}A.m.m+1.n^{m-1} & +\frac{1}{2}A.\frac{m+1.m.m-1}{3}.n^{m-2}-\text{etc.} \\ +Bm & -\frac{1}{2}B.m.m-1. & +\text{etc.} \\ & +C.m-1. & -\text{etc.} \end{array}\right.$$

Et comparant les termes correspondans, on aura $A=\frac{a}{m+1}\ldots$ $B=\frac{1}{2}a+\frac{b}{m}\ldots C=\frac{c}{m-1}+\frac{1}{2}b+\frac{1}{12}am$, etc.; ce qui donne

$$S=\frac{a}{m+1}n^{m+1}+\left(\frac{b}{m}+\frac{1}{2}a\right)n^m+\left(\frac{c}{m-1}+\frac{1}{2}b+\frac{1}{12}am\right)n^{m-1}+\text{etc.}$$

Ex. I. On demande la somme de la série $1.2.3.4\ldots\ldots n$, dont le terme général est n.

Cette application de la formule donne $a=1\ldots\ldots m=1\ldots\ldots$ $b=0\ldots\ldots c=0$. Donc $S=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n(n+1)$ (n° 227).

Ex. II. On demande la somme de la série $1.4.9.16.25$, dont le terme général n^2 donne $m=2$.

710. Puisque $a=1$, $b=0$, $c=0$, etc. on a $S=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$.

711. En général, soit la série $1^m.2^m.3^m.4^m.5^m$. etc. dont le terme général est n^m, on aura la somme

$$S=\frac{1}{m+1}n^{m+1}+\frac{1}{2}n^m+\frac{1}{12}mn^{m-1}+\text{etc.}$$

Or si on suppose n infini, alors n^m, n^{m-1}, etc. seront infiniment petits par rapport à n^{m-1}, et parconséquent si on néglige tous ces termes, on aura

$$1^m+2^m+3^m+4^m+5^m+\ldots, n^m=\frac{n^{m+1}}{m+1}.$$

Mais pour que cette formule ait lieu, il faut observer, 1°. que n doit être supposé infini; 2°. que m doit être positif. Car s'il était négatif, la somme serait finie, excepté le cas où $m=-1$.

144. 712. Il n'est pas difficile maintenant de trouver par approximation la quadrature de l'espace circulaire CBMP compris entre le rayon CB, l'ordonnée MP parallèle à ce rayon, l'arc BM, et l'abscisse $CP=x$. Si on le décompose en rectangles Ch, qf, etc. qui aient des bases égales et infiniment petites Cq, qg, etc., et si on fait le rayon $=a$... Cq, ou qg, ou etc. $=e$, on aura $e\sqrt{(aa-ee)}$ pour l'expression du petit rectangle Ch; $e\sqrt{(aa-4ee)}$ sera celle du suivant, $e\sqrt{(aa-4ee)}$ celle du troisième, et ainsi de suite. Donc la somme de tous ces rectangles, ou l'espace $CBMP=e\sqrt{(aa-ee)}+e\sqrt{(aa-4ee)}+e\sqrt{(aa-9ee)}+e\sqrt{(aa-16ee)}+\text{etc.}$

Et si on développe toutes ces expressions, on aura

$$\begin{aligned}
CBMP = {} & ae(1+1+1+1+1+\text{etc.}) \\
& -\frac{e^3}{2a}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\text{etc.}) \\
& -\frac{e^5}{8a^3}(1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\text{etc.}) \\
& -\frac{e^7}{16a^5}(1^6+2^6+3^6+4^6+5^6+\text{etc.}) \\
& -\frac{5e^9}{128a^7}(1^8+2^8+3^8+4^8+5^8+\text{etc.})-\text{etc.}
\end{aligned}$$

Or le nombre des rectangles qui composent l'espace cherché, ou le nombre n des termes de ces suites de nombres, est la quantité infiniment grande $\frac{x}{e}$. Donc, puisque n étant infini, on a généralement $\frac{n^{m+1}}{m+1}$ pour la somme de la série $1^m+2^m+3^m+4^m\ldots+n^m$, on aura d'abord

$$1+1+1+1+\text{etc.}\ldots+\left(\frac{x}{e}\right)^0=\frac{x}{e}.$$

On aura ensuite 712.

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2\ldots+\left(\frac{x}{e}\right)^2=\tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{e}\right)^3=\frac{x^3}{3e^3}\ldots$$

$$1^4+2^4+3^4+\text{etc.}\ldots+\left(\frac{x}{e}\right)^4=\frac{x^5}{5e^5},\ \text{etc.}$$

Donc l'espace cherché

$$\text{CBMP}=ax-\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}-\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}-\text{etc.}$$

série convergente, et qui ne renferme que des quantités finies.

713. Si on fait dans cette suite $x=a$, on aura le quart de cercle AMBC : mais si de l'espace CBMP on retranche le triangle $\text{CMP}=\frac{x}{2}\sqrt{(a^2-x^2)}$, on aura le secteur BMC; enfin si on divise l'expression de ce secteur par $\frac{1}{2}a$, le quotient sera l'arc BM, exprimé par la série $x+\frac{x^3}{2.3a^2}+\frac{3x^5}{2.4.5a^4}+$ etc. qu'il est aisé de rapporter à celle que nous avions déjà trouvée (567).

714. Soit maintenant l'espace elliptique CBMP compris entre le 145.
petit demi-axe $\text{CB}=b$, l'ordonnée $\text{MP}=y$, l'abscisse $\text{CP}=x$, et l'arc elliptique MB; puisqu'on a $y=\frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$, en raisonnant comme pour le cercle, on trouvera que cet espace $=\frac{b}{a}\left(ax-\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}-\text{etc.}\right)$. Or si on décrit une demi-circonférence ANB'a dont le rayon soit a, on aura l'espace

$$\text{CB'NP}=ax-\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}-\text{etc.}$$

Donc

$$\text{CBMP}:\text{CB'NP}::b:a::\text{AMP}:\text{ANP};$$

d'où il suit que la surface de l'ellipse est à celle du cercle construit sur son grand axe $::b:a$. Or la surface de ce cercle $=a^2\pi$, en supposant le rapport du diamètre à la circonférence $::1:\pi$. Donc la surface de l'ellipse entière $=ab\pi$, c'est-à-dire, est égale à la surface d'un cercle dont le diamètre serait moyen proportionnel entre les axes de l'ellipse.

On voit aussi qu'un secteur quelconque SAM est au secteur circulaire correspondant SAN $::b:a$, puisque les triangles SPM, SNP sont entre eux $::\text{PM}:\text{PN}::b:a$.

715. Proposons-nous maintenant de quarrer l'espace parabolique 146.
AMP.

Si on nomme AP (x), PM (y), le paramètre (p), e une portion infiniment petite de l'abscisse AP, on trouvera par le même

716. raisonnement que ci-dessus, l'espace

$$\text{APM} = e\sqrt{pe} + e\sqrt{2pe} + e\sqrt{3pe} + e\sqrt{4pe} \ldots\ldots$$

$$+ e\sqrt{px} = e\sqrt{pe}\left[1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + 4^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}} + \ldots + \left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \times e\sqrt{pe} = \tfrac{2}{3} e^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3} x\sqrt{px} = \tfrac{2}{3} xy.$$

Donc l'espace parabolique AMP est les deux tiers du rectangle circonscrit APMN, et parconséquent l'espace AMN en est le tiers.

716. Il nous reste à trouver la quadrature de l'hyperbole. Or si
147. on rapporte les coordonnées CP, PM (x, y) au second axe CB, on aura $y = \frac{a}{b}\sqrt{(bb + xx)}$, et en faisant le même calcul que dans le cercle, on trouvera que l'espace

$$\text{ACPM} = \frac{a}{b}\left(bx + \frac{x^3}{6b} - \frac{x^5}{40b^3} + \frac{x^7}{112b^5} - \text{etc.}\right).$$

Il est donc facile d'avoir l'espace AMQ.

717. Si l'hyperbole est équilatère, alors $b = a$, et la série que l'on vient de calculer se réduit à $bx + \frac{x^3}{6b} - \frac{x^5}{40b^3} + \text{etc.}$ Il y a donc la même analogie entre l'hyperbole équilatère et une hyperbole quelconque, qu'entre le cercle et l'ellipse. Ensorte que si on avait la quadrature d'une seule hyperbole, on aurait aussitôt celle de toutes les autres.

148. 718. Soit à présent CQ l'asymptote de l'hyperbole AM, $\text{CD}^2 = \text{AD}^2 = m^2$ sa puissance, MP une ordonnée y à l'asymptote CQ, ou une parallèle à l'autre asymptote CO; il s'agit de trouver la quadrature de l'espace asymptotique ADMP, en supposant d'abord que l'angle fait par les asymptotes est droit.

Je fais $\text{DP} = x$, et j'imagine l'espace ADMP décomposé en une infinité de petits rectangles dont les bases soient des portions infiniment petites et égales de l'abscisse x. En nommant e l'une de ces petites portions, l'ordonnée correspondante à la première au point D sera $\frac{m^2}{m+e}$, et le premier rectangle aura pour expression $\frac{em^2}{m+e}$, le second $\frac{em^2}{m+2e}$, etc. Donc l'espace

$$\text{ADMP} = em^2\left[\frac{1}{m+e} + \frac{1}{m+2e} + \frac{1}{m+3e} + \text{etc.}\right].$$

Et si on réduit en séries toutes ces fractions, on aura FIG. 148.

$$\text{ADMP} = em(1+1+1+1+1+\text{etc.}) - e^2\left(1+2+3+4+\text{etc.}\ldots+\frac{x}{e}\right)$$

$$+\frac{e^3}{m}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+\ldots\frac{x^2}{e^2}\right)-\text{etc.}$$

$$= em\times\frac{x}{e} - e^2\times\frac{x^2}{2e^2}+\frac{e^3}{m}\times\frac{x^3}{3e^3}-\frac{e^4}{m^2}\times\frac{x^4}{4e^4}+\text{etc.}$$

$$= mx - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3m}-\frac{x^4}{4m^2}+\frac{x^5}{5m^3}-\text{etc.}$$

$$= m^2\left(\frac{x}{m}-\frac{x^2}{2m^2}+\frac{x^3}{3m^3}-\frac{x^4}{4m^4}+\text{etc.}\right)$$

$$= m^2\log.\left(1+\frac{x}{m}\right) = m^2\log.\frac{m+x}{m}.$$

Donc si on fait $CP = z$, l'espace ADMP sera égal à $m^2 \log.\frac{z}{m}$; et si l'angle fait par les asymptotes, au lieu d'être droit, était en général a, on aurait $\text{ADMP} = m^2 \sin a \log.\frac{z}{m}$.

719. Si l'hyperbole est équilatère, et si la puissance $= 1$, alors l'espace ADPM $=$ log. z; c'est-à-dire, qu'il est le logarithme naturel de l'abscisse CP, et voilà pourquoi on appelle logarithmes hyperboliques ceux dont le module est 1.

Ce même espace serait le logarithme tabulaire de l'abscisse CP, si l'angle des asymptotes était de 25° 44′ 25″; car appelant A le module 0,43429448, etc., il faut que l'on ait $m^2 \sin a \log.\frac{z}{m} = \text{A} \log. z$; or cette équation ne peut avoir lieu que lorsque $m = 1$; et alors on a $\sin a = \text{A} = 0{,}43429448$, etc., qui dans les Tables des sinus naturels répond à 25° 44′ 25″. Les logarithmes ordinaires représentent donc les aires asymptotiques d'une hyperbole dont la puissance est 1, et dont l'angle des asymptotes est de 25° 44′ 25″.

720. Si on prend sur l'asymptote d'une hyperbole quelconque une suite d'abscisses en progression géométrique $\div\div z : qz :: q^2z : q^3z$, etc., les aires correspondantes formeront la progression arithmétique

$$\div m^2 \sin a \log\frac{z}{m} \,.\, m^2 \sin a \log\frac{z}{m} + m^2 \sin a \log q . m^2 \sin a \log\frac{z}{m}$$

$$+ 2m^2 \sin a \log q . m^2 \sin a \log\frac{z}{m} + 3m^2 \sin a \log q, \text{ etc.}$$

Ainsi quand les abscisses sont en progression géométrique, les différences des aires asymptotiques sont égales; et puisque la progression des abscisses peut être continuée à l'infini, il suit que l'espace compris entre l'hyperbole et son asymptote est infiniment grand.

S'il fallait déterminer un trapèze hyperbolique ADNQ qui fût au

FIG. trapèze ADPM dans le rapport de q à p, on nommerait CP (z), CQ (x); et on aurait

$$m^a \sin a \log \frac{z}{m} : m^a \sin a \log \frac{x}{m} :: p : q :: \log \frac{z}{m} : \log \frac{x}{m};$$

donc

$$q \log \frac{z}{m} = p \log \frac{x}{m}, \text{ ou } \log \left(\frac{z}{m}\right)^q = \log \left(\frac{x}{m}\right)^p;$$

équation qui donne

$$x = \frac{z^{\frac{q}{p}}}{m^{\frac{q}{p}-1}} = z^{\frac{q}{p}} m^{\frac{p-q}{p}} = \sqrt[p]{(z^q m^{p-q})}.$$

DE QUELQUES AUTRES COURBES.

PARMI les courbes qui sont le plus en usage dans la Géométrie, les sections coniques tiennent sans doute le premier rang : mais il y en a plusieurs autres dont il est à propos de faire mention.

149. 721. I°. LA CONCHOÏDE DE NICOMÈDE. Si par un point B pris à volonté hors d'une droite GH on mène les lignes BQM, BAD, etc., telles que leurs parties QM, AD, etc. soient égales, la courbe MDM′ qui passe par les points M, D, etc. se nomme *Conchoïde*.

Le point B en est le pôle, la ligne GH en est la directrice; et si on prend au-dessous de GH des parties égales Qm, Ad, etc., la courbe qui passera par les points m, d, etc. ainsi déterminés, sera la conchoïde inférieure mdm', ou plutôt la partie inférieure de la même conchoïde.

722. Il suit de sa construction, 1°. que GH en est l'asymptote; 2°. que dD en mesure la plus grande largeur, lorsque BA est perpendiculaire sur GH. Mais comme BA peut être plus grande, ou plus petite, ou égale à dA, voyons quelle sera la figure de la courbe dans ces trois cas.

149. Dans le premier, elle sera telle que la représente la figure 149;
150 dans le second, elle aura un nœud Bndn' comme dans la figure
et 150, et alors on l'appelle *conchoïde nouée*. Dans le troisième, le
151. nœud s'évanouit, et il ne reste qu'un point de rebroussement en B, *fig.* 151.

723. Pour savoir si la conchoïde est du nombre des courbes algébriques, soit mené PM perpendiculairement sur AP, et soit AD ou QM $= a$, AB $= b$, PM $= y$, AP $= x$; on aura

$$PQ : PM :: AQ : AB, \text{ ou } \sqrt{(aa - yy)} : y :: x - \sqrt{(aa - yy)} : b.$$

Donc FIG.

$$xy = (b - y)\sqrt{(aa - yy)};$$

et c'est là l'équation aux coordonnées de la conchoïde supérieure. Le même calcul donne

$$xy = (b - y)\sqrt{(aa - yy)}$$

pour l'inférieure. L'équation est encore la même pour la conchoïde à nœud. Cette courbe est donc algébrique, et en débarrassant son équation du radical, on trouvera que c'est une ligne du quatrième ordre, ou une courbe du troisième, laquelle a pour équation

$$y^4 \pm 2by^3 + (b^2 - a^2 + x^2)y^2 \mp 2a^2by = a^2b^2.$$

On peut la décrire par l'intersection continuelle d'une règle BCM 152.
mobile autour du point B, et d'un cercle décrit du rayon $CM = a$; que l'on fera mouvoir le long de GH, de manière que le centre C soit toujours sur cette ligne. Il suffit pour cela que la règle passe constamment par le centre du cercle.

724. On peut même former ainsi une infinité de conchoïdes diffé- 153.
rentes. Car si au lieu du cercle on fait mouvoir une courbe quelconque CM le long de GH, son intersection avec une règle BM mobile autour du point B, et assujétie à passer par un point fixe Q de l'axe de la courbe CM, décrira une conchoïde dont il est aisé de trouver l'équation. En effet, si on mène MP et AB perpendiculaires sur la directrice, et si on suppose $AP = x$, $PM = y$, $CP = z$, $CQ = a$, $AB = b$, on aura

$$PQ\,(z - a) : PM\,(y) :: AQ\,(x + a - z) : AB\,(b);$$

d'où

$$z = a + \frac{xy}{b + y}.$$

Substituant donc cette valeur dans l'équation à la courbe CM, on aura celle de la conchoïde MD.

Par exemple, si la courbe CM est un cercle dont Q soit le centre, on a

$$yy = 2az - zz,$$

qui donne

$$xy = (b + y)\sqrt{(aa - yy)}$$

pour l'équation de la conchoïde ordinaire.

725. Mais si la courbe mobile est une parabole dont l'équation soit $y^2 = pz$, alors $y^3 + by^2 - apy - apb = pxy$ devient l'équation de la conchoïde parabolique dont Descartes s'est servi pour résoudre une équation générale du sixième degré. Voyez sa Géométrie, et les sections coniques de l'Hôpital.

726. II°. La Cissoïde de Dioclès. Soit le cercle ANBn dont 154.
le diamètre est AB, et dont QBq est tangente au point B. Si après avoir mené du point A des droites AQ à différens points de la tangente, on prend $QM = AN$, la courbe MAm qui passe par les points M, m ainsi déterminés, se nomme *Cissoïde*.

FIG. Elle est composée, comme l'on voit, de deux parties semblables et égales AM, Am qui forment en A un point de rebroussement, et qui après avoir coupé la circonférence aux points C, c également éloignés de A et de B, s'écartent toutes les deux à l'infini, sans pouvoir jamais atteindre la tangente QBq, qui est parconséquent leur asymptote.

727. Pour trouver l'équation de la cissoïde, je mène OM parallèle à AP, MP, NG perpendiculaires. Je fais AP $= x$, PM $= y$, et AB, où le diamètre du cercle générateur $= a$. Puisque AN $=$ MQ, j'ai AG $=$ PB,

et AG$(a-x)$: GN, ou $\sqrt{(ax-xx)}$ :: AP (x) : PM $(y) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$;

d'où

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x},$$

équation cherchée.

728. Or cette équation fait voir, 1°. que la cissoïde est une courbe algébrique du second ordre; qu'à chaque abscisse AP, répondent deux ordonnées égales PM, Pm, l'une positive, l'autre négative, et qu'ainsi la courbe a deux branches parfaitement égales et semblables; 3°. que lorsque $x = 0$, y est aussi $= 0$, la courbe passe donc à l'origine des abscisses; 4°. que si $x = \frac{1}{2}a$, alors $y = \pm\frac{1}{2}a$; c'est-à-dire, que les deux branches de la cissoïde coupent la circonférence en deux points C, également éloignés de A et de B; 5°. que si $x = a$, y est infinie, et que parconséquent la tangente AQ est l'asymptote de cette courbe, comme nous l'avions déjà conclu de sa description.

La conchoïde et la cissoïde furent employées par leurs inventeurs, Nicomède et Dioclès, à trouver la duplication du cube; problême célèbre parmi les anciens Géomètres, mais qui n'a plus de célébrité parmi les nouveaux.

155. 729. III°. La Logarithmique. Si après avoir pris un point A sur la droite indéfinie GH, on élève des ordonnées PM qui aient pour logarithmes leurs abscisses AP, la courbe BMm qui passe par les extrémités de ces ordonnées, s'appelle *logarithmique*.

Soit donc AP $= x$, PM $= y$, $m =$ le module, $e =$ le nombre 2.7182818, dont le logarithme hyperbolique est 1, on aura

$$x = mly = xle, \text{ ou } y^m = e^x, \text{ qui donne } y = e^{\frac{x}{m}},$$

équation de la logarithmique.

Elle fait voir, 1°. que cette courbe est du nombre des transcendantes; 2°. que lorsque $x = 0$, y ou AB $= 1$; 3°. que si $x =$ AE $=$ AB $= 1$, y ou EF $= e^{\frac{1}{m}}$, et qu'ainsi en faisant EF $= a$,

on aura toujours $y = a^x$; d'où il suit que si les abscisses forment la progression arithmétique $\div 1.2.3.4.$ etc., les ordonnées formeront la progression géométrique $\div\div a^1 : a^2 : a^3 : a^4$, etc. La logarithmique s'étend donc à l'infini au-dessus de AP. FIG. 155.

Mais si on prend sur AQ des abscisses négatives, $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$, etc., les ordonnées deviendront successivement $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, etc., c'est-à-dire que la courbe a une branche infinie BO qui s'approche de plus en plus de la directrice ou de l'axe GH, sans pouvoir jamais l'atteindre.

730. La propriété la plus remarquable de la logarithmique est que sa soutangente est toujours de la même grandeur. On le prouve avec la plus grande facilité par le calcul différentiel : voici, en attendant, une démonstration à-peu-près semblable.

Soit menée l'ordonnée *mp* infiniment proche de MP, et soit prolongé le petit côté M*m* pour avoir la tangente MT. Cela posé, si on mène M*r* parallèle à l'axe, et si on nomme P*p* (e), *mr* (i), on aura

$$x + e = A.l(y+i) = A.ly\left(1+\frac{i}{y}\right) = Aly + A\left(\frac{i}{y} - \frac{i^2}{2y^2} + \frac{i^3}{3y^3} - \text{etc.}\right);$$

donc, puisque $x = Aly$, il faut que $e = \frac{Ai}{y}\left(1 - \frac{i}{2y} + \frac{i^2}{3y^2} - \text{etc.}\right)$. Mais la quantité i étant infiniment petite, ses puissances i^2, i^3, etc. doivent être rejetées; on a donc $\frac{ey}{i}$, ou PT $= A$. La soutangente est donc toujours égale au module; et puisqu'en général $x = Aly$, il est clair que dans deux logarithmiques différentes, les abscisses des mêmes ordonnées sont comme les soutangentes, ou, ce qui revient au même, les logarithmes des mêmes nombres dans différens systèmes sont entre eux comme les modules. On peut voir dans un petit traité de Keil sur la logarithmique, comment il en a déduit les règles du calcul des logarithmes.

731. IV°. LA CYCLOÏDE. Si un cercle AG roule sur une droite A*a*, jusqu'à ce que le point qui touchait d'abord cette droite en A, la touche encore en *a*, ce point décrira une courbe appelée *Cycloïde*, ou *Roulette*, ou *Trochoïde*. Les travaux de Paschal, d'Huyghens, des Bernoulli, etc. ont rendu cette courbe fort célèbre.

Ce sera une cycloïde ordinaire, lorsque le cercle générateur n'aura d'autre mouvement que celui de sa révolution. Mais s'il a de plus un mouvement de translation dans le même sens, le point 157.
A décrira une cycloïde accourcie. Si ce mouvement est en sens 158.
contraire, la cycloïde sera alongée.

Or il est clair que dans la cycloïde ordinaire la *base* A*a* est égale à la circonférence du cercle générateur; qu'elle est plus courte dans la cycloïde accourcie, et qu'elle est plus grande dans la cycloïde alongée.

Le diamètre BC du cercle générateur se nomme l'*axe* de la cy-

FIG. cloïde, lorsqu'il est perpendiculaire au milieu de sa base. Le point B en est le *sommet* : ainsi BC est sa plus grande hauteur.

156. 732. Cela posé, menons MP perpendiculaire sur BC, et tirons les cordes égales MF et OC, nous aurons FC = MO ; donc puisque FC = AC — AF = BOC — FKM = BOC — OLC = BIO, il est clair que la partie MO de l'ordonnée MP est toujours égale à l'arc correspondant BIO du cercle générateur. D'ailleurs l'autre partie OP est le sinus du même arc ; donc appelant MP (y), BIO (u), on aura pour l'équation à la cycloïde ordinaire, $y = u + \sin u$.

Et pour la rendre plus générale, on fera $MO = \frac{b}{a}$ BIO, ce qui convient à la cycloïde ordinaire, ou accourcie, ou alongée, suivant que b est égal, ou plus petit, ou plus grand que a; ensorte que l'on aura

$$y = \frac{b}{a} u + \sin u.$$

La cycloïde est donc une courbe transcendante.

159. 733. Pour mener au point M la tangente MT, on imaginera l'arc infiniment petit Mm, l'ordonnée mp, et la petite ligne Mr parallèle à la tangente OT au point O de la circonférence du cercle générateur. On aura donc

$$MO = \frac{b}{a} BIO, \text{ et } mo = \frac{b}{a} BIo,$$

ce qui donne

$$mr = \frac{b}{a} Oo.$$

D'ailleurs par les triangles semblables on a

$$mr : Mr :: MO : OT = \frac{MO \times Mr}{\frac{b}{a} Oo} = \frac{a}{b} MO = BIO.$$

Il faut donc prendre sur la tangente au cercle générateur la partie OT = BIO, et mener par les points M et T la ligne MT qui sera la tangente de la cycloïde, soit ordinaire, soit accourcie, soit alongée. Dans la première, cependant, la construction peut être simplifiée, car puisque MO = BIO = OT, on a l'angle TOP, ou 2BOP = 2TMO ; c'est-à-dire, qu'une droite MT parallèle à la corde OB est nécessairement tangente au point M de la cycloïde ordinaire.

734. Maintenant soient menées la ligne indéfinie BQQ′ perpendiculaire à l'axe BC, et Qq, Q′m parallèle au même axe ; on aura par les triangles semblables, mq : Mq, ou Q′Q : Pp :: OP : BP ; donc Q′Q × BP = Pp × OP, ou MmQ′Q = PpoO ; et parconséquent l'espace circulaire BIOP = BQM, et le demi-cercle BOCB = BDAB. Or le rectangle AB dans la cycloïde ordinaire est quadruple de ce demi-cercle ; donc l'espace cycloïdal est triple du cercle générateur.

735. Si au lieu de prendre un point de la circonférence du cercle

pour décrire la cycloïde, on l'eût pris au-dedans ou au-dehors du cercle, alors la courbe décrite eût été une autre espèce de cycloïde; et si au lieu de faire rouler un cercle sur une droite, on l'eût fait rouler sur la circonférence d'un autre cercle, alors la courbe décrite par un de ses points eût été du genre de celles que l'on appelle *épicycloïdes*. Nous ne pouvons qu'indiquer ces objets. FIG.

736. V°. LA QUADRATRICE DE DINOSTRATE. Supposons qu'une droite AG tangente en A se meuve uniformément, parallèlement à elle-même le long du diamètre Aa, et qu'au même instant qu'elle part du point A, le rayon AC tourne uniformément autour du centre C vers le point E, de manière qu'il se confonde avec CE au moment où la droite AG s'y confondra aussi, nous aurons par l'intersection continuelle de ces deux lignes une courbe AMD, appelée *quadratrice*. 160.

Il suit de cette description qu'un espace quelconque AP parcouru par la droite AG est à l'arc circulaire AB décrit dans le même temps par l'extrémité du rayon, comme un autre espace AC parcouru par cette droite est à l'arc correspondant ABE décrit par le rayon. Faisant donc AP $= x$, PM $= y$, AB $= u$, AC $= a$, ABE $= 90° = c$, on aura, 1°. $x : a :: u : c ::$ l'angle ACB : l'angle ACE; donc $u = \frac{cx}{a}$.

On aura, 2°. CP : PM :: CA : AG, ou $a - x : y :: a :$ tang u; donc $y = \frac{a-x}{a}$ tang $\frac{cx}{a}$; et ce sera l'équation aux coordonnées de la quadratrice, lorsque le point A sera l'origine des abscisses.

737. Mais si on met leur origine au centre C en faisant CP $= x$, on aura

$$y = \frac{x}{a} \text{ tang}\left(c - \frac{cx}{a}\right) = \frac{x}{a} \cot\frac{cx}{a} = (562)$$

$$\frac{x\left(a - \frac{c^2x^2}{2a^3} + \frac{c^4x^4}{2.3.4.a^7} - \text{etc.}\right)}{\frac{cx}{a} - \frac{c^3x^3}{2.3.a^5} + \frac{c^5x^5}{2.3.4.5.a^9} - \text{etc.}} = \frac{a - \frac{c^2x^2}{2a^3} + \frac{c^4x^4}{2.3.4.a^7} - \text{etc.}}{\frac{c}{a} - \frac{c^3x^2}{2.3.a^5} + \frac{c^5x^4}{2.3.4.5.a^9} \text{ etc.}}$$

Donc lorsque x sera zéro, y deviendra la base CD, aura pour expression $\frac{a^2}{c}$; d'où il suit que si la base de la quadratrice était une fois connue, on aurait aussitôt la quadrature du cercle. C'est ce qui a fait donner à cette courbe le nom de *quadratrice*.

738. Si on décrit du centre C et du rayon CD le quart de cercle DLK, sa longueur sera égale au rayon CA; car $\frac{aa}{c}$: LK :: $a : c$; donc DLK $= a$. On aura aussi PC $=$ l'arc LD; car $\frac{aa}{c}$: KL :: $a : u$; d'où KL $= x =$ AP, et PC $=$ LD.

FIG. 739. Prenons maintenant des abscisses négatives AP′, et substituons leur valeur dans la première équation. Elle deviendra

$$y = -\frac{(a+x)}{a} \operatorname{tang} \frac{cx}{a},$$

ce qui donne des ordonnées négatives P′M′. Ainsi la courbe a une branche AM′, dont on trouvera que la droite QN menée à la distance $AQ = a$ est l'asymptote, en supposant y infinie; car alors on trouvera que $\operatorname{tang} \frac{cx}{a} = \infty$, et que parconséquent $x = a$.

Si après s'être confondus avec CE, la droite AG et le rayon CA continuent de se mouvoir, l'une en descendant vers a, l'autre en tournant dans le même sens, il est visible que leur intersection décrira la partie Da de la quadratrice.

Il est visible aussi que si on pouvait décrire géométriquement cette courbe, on aurait immédiatement tous les angles d'un nombre donné de degrés, par exemple, de $\frac{1}{m}$ 90°. Il n'y aurait pour cela qu'à diviser AC au point P, desorte que AP fût à AC :: 1 : m; car alors menant l'ordonnée PM et le rayon CB, l'angle ACB serait $= \frac{1}{m}$ 90°, puisque $x : a :: u : c :: 1 : m$.

161. 740. VI°. LA SPIRALE D'ARCHIMÈDE. On appelle ainsi la courbe CKMA décrite par un point C qui se meut uniformément le long du rayon CA, pendant la révolution uniforme de ce rayon autour du centre C, de manière que lorsque le rayon a parcouru la circonférence entière, ce point se trouve confondu avec le point A.

Si après avoir prolongé le rayon CA, on lui fait faire une seconde révolution, le point C continuant de s'éloigner de l'origine de son mouvement, décrira une seconde spirale, puis une troisième, et ainsi de suite, ou plutôt toutes ces spirales ne feront qu'une seule et même courbe, dont les révolutions peuvent se multiplier à l'infini.

741. Cela posé, l'ordonnée CM (y) est au rayon CA (a) :: l'arc ABN qui est l'abscisse correspondante, et que j'appelle x, est à la circonférence entière ABNA, que j'appelle π. On a donc $y = \frac{ax}{\pi}$ pour l'équation à la spirale d'Archimède. D'où il suit, 1°. que c'est une courbe transcendante; 2°. qu'elle passe par le centre du cercle générateur; qu'elle passe aussi par le point A; 4°. que si on fait $x = \pi + x'$, l'équation deviendra

$$y = a + \frac{ax'}{\pi};$$

et qu'ainsi en donnant à x' les valeurs qui sont entre 0 et π, la spirale fera une seconde révolution qu'elle terminera à l'extrémité d'un rayon double du premier. Elle en fera une troisième, une quatrième, etc. si on fait $x = 2\pi + x''$, $x = 3\pi + x'''$, etc.

742.

742. Pour mener à son point M la tangente MT, on imaginera le rayon C*mn* infiniment proche du rayon CMN, et après avoir décrit un cercle du rayon CM, on mènera CT perpendiculaire à CM; puis on aura par les triangles semblables M*mr*, MTC, FIG.

$$mr : \mathrm{M}r :: \mathrm{CM} : \mathrm{CT} = \frac{\mathrm{CM}\,.\,\mathrm{M}r}{mr}.$$

Or

$$\mathrm{CM} = \frac{a}{\pi}\,\mathrm{ABN}\,,\ \text{et}\ \mathrm{C}m = \frac{a}{\pi}\,\mathrm{AB}n\,;$$

donc

$$\mathrm{C}m - \mathrm{CM}\,,\ \text{ou}\ mr = \frac{a}{\pi}\,\mathrm{N}n\,;$$

et puisque $a : y :: \mathrm{N}n : \mathrm{M}r$, on aura

$$\frac{\mathrm{M}r}{mr} = \frac{y\,.\,\mathrm{N}n}{a\,.\,\frac{a}{\pi}\,\mathrm{N}n} = \frac{\pi y}{aa} = \frac{x}{a}\,;$$

et la soutangente

$$\mathrm{CT} = \frac{\pi y^2}{a^2} = \frac{xy}{a}\,;$$

mais $a : y :: x :$ l'arc $\mathrm{OQM} = \frac{xy}{a}$; donc la soutangente CT doit être prise égale à l'arc circulaire OQM.

743. VII°. La Spirale parabolique. Si on prend sur un rayon quelconque CN une partie NM moyenne proportionnelle entre l'arc AN et une ligne donnée p, la courbe qui passera par tous les points M ainsi déterminés, sera la spirale parabolique. 162.

Soit donc $\mathrm{AN} = x$, $\mathrm{CM} = y$, $\mathrm{AC} = a$, et on aura

$$y = a - \sqrt{px}\,;$$

équation qui en substituant $\pi + x$, $2\pi + x$, etc. au lieu de x fait voir que cette courbe peut faire une infinité de révolutions autour du centre C, et que parconséquent elle est du nombre des spirales.

744. VIII°. La Spirale hyperbolique. Je suppose que du point C pris pour centre sur l'indéfinie CP, on décrive des arcs AG, QM, PO, etc. égaux en longueur, et que par leurs extrémités G, M, O, etc. on fasse passer une courbe CKGMO. Ce sera une spirale hyperbolique. 163.

Il est aisé de voir que si on élève une droite BR parallèle à l'axe CP, et qui en soit éloignée d'une quantité CB = AG = QM = PO, etc. cette droite sera l'asymp ote de la spirale hyperbolique, parcequ'elle ne peut la rencontrer que lorsque le rayon CM est infini.

745. Soit le rayon $\mathrm{CA} = a$, $\mathrm{AN} = x$, $\mathrm{CM} = y$, $\mathrm{AG} = \mathrm{QM}$, etc. $= b$; on aura

$$x : b :: a : y\,,\ \text{qui donne}\ xy = ab\,,$$

FIG. équation semblable à celle de l'hyperbole entre les asymptotes. Or si on appelle π la circonférence dont le rayon $= a$, et si on substitue à x les valeurs $\pi + x$, $2\pi + x$, ... $m\pi + x$, on aura successivement

$$y = \frac{ab}{\pi + x}, y = \frac{ab}{2\pi + x}, y = \frac{ab}{m\pi + x}.$$

D'où on voit que plus l'abscisse est grande, plus l'ordonnée est petite, et que celle-ci ne devient nulle, que lorsque m est infini. La spirale hyperbolique fait donc une infinité de révolutions autour de son centre, avant que d'y arriver.

746. Cherchons maintenant la valeur de la soutangente CT, et pour cela imaginons la ligne Crm infiniment proche de CM, et l'arc mq; menons ensuite CT perpendiculaire à CM, qui rencontre en T la tangente TM, et nommons $Qq = rm = i$, nous aurons

$$y + i : b :: y : Qr = \frac{by}{y + i}.$$

Donc

$$rM = b - \frac{by}{y + i} = \frac{bi}{y + i};$$

or

$$rm : rM :: Cm : CT;$$

donc

$$i : \frac{bi}{y + i} :: y + i : CT = b.$$

Ainsi dans la spirale hyperbolique la soutangente est constante, comme dans la logarithmique (730).

747. IX°. La Spirale logarithmique. On nomme spirale logarithmique la courbe qui coupe sous un même angle tous les rayons CM
164. tirés de son centre C; ensorte que la tangente MT fait toujours un angle égal avec le rayon CM, de quelque côte qu'on le suppose. Cette courbe a plusieurs belles propriétés que l'on ne peut bien détailler que par les méthodes du calcul différentiel et intégral dont nous allons bientôt faire connaître les principes.

DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

En construisant l'équation $y^2 = 2ax - xx$, nous avons trouvé (649) qu'il en resultait un cercle dont le diamètre était $2a$: ce cercle est ce qu'on appelle *le lieu géométrique* de l'équation

$$y^2 = 2ax - xx.$$

748. En général, le lieu d'une équation est la ligne décrite d'après le rapport des x et des y que cette équation renferme.

Ce rapport entre les coordonnées sert de base aux constructions géométriques, et la théorie qui enseigne à résoudre ce genre de problemes est également ingénieuse et utile. FIG.

On a vu (N° 457 et suivans) la manière de construire les équations déterminées : nous allons nous occuper maintenant de la construction des équations indéterminées. On appelle ainsi toutes les équations à deux variables, et on en distingue les degrés par ceux des plus hautes puissances auxquelles ces mêmes variables sont élevées. Commençons par les équations indéterminées du premier degré.

749. Toute équation de ce genre peut être représentée par celle-ci

$$ay = bx + c\,;\ \text{d'où on tire}\ y = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}.$$

Il s'agit donc de trouver le lieu géométrique de cette dernière équation.

Soit AP la ligne des abscisses x, dont je suppose l'origine au point A; soit PM une ordonnée y qui fasse avec AP un angle donné quelconque APM. 165.

Cela posé, si je prends sur AP une partie déterminée AB que j'appellerai a, et si je mène parallélement à PM une ligne BD que j'appellerai b, il est évident qu'une droite indéfinie ADN menée par les points A et D, formera deux triangles semblables ABD et APN, qui donneront

$$a : b :: x : \text{PN} = \frac{bx}{a}.$$

Donc la ligne AN serait le lieu cherché, si l'équation proposée était simplement $y = \frac{bx}{a}$.

Mais à cause de $\frac{c}{a}$ qu'il faut ajouter au second membre, les y doivent être augmentées de cette quantité : il faut donc trouver une ligne qui ait pour expression $\frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$. Or en élevant au-dessus de AP une droite AE parallèle à PM et qui soit égale à $\frac{c}{a}$, et en tirant par le point E une ligne indéfinie MM′ parallèle à la ligne AN, il est clair que l'on aura PM ou $y = \text{PN} + \text{NM} = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$: auquel cas la droite MM′ est le lieu géométrique de l'équation donnée.

Si la quantité $\frac{c}{a}$ est négative, il faut alors diminuer les PN de cette quantité; ce qui est aisé à faire, en menant AE′ au-dessous de AP; et en tirant par le point E′ une parallèle à la ligne AN. Cette parallèle MM′ sera le lieu de l'équation

$$y = \frac{bx}{a} - \frac{c}{a}.$$

FIG. Sa partie OM répondra à la valeur positive de y, et son prolongement OM″ répondra à $-y$. On peut donc conclure généralement que la ligne droite est le lieu géométrique de toutes les équations indéterminées du premier degré.

Voyons maintenant quel est le lieu des équations indéterminées du second degré.

750. Toutes ces équations peuvent être ramenées à la formule générale

$$y^2 + axy + bx^2 + cx + dy + f = 0.$$

D'où il suit que la construction de cette formule fera connaître généralement la nature des courbes exprimées par des équations du second degré, quel que soit d'ailleurs l'angle des coordonnées.

Or pour construire plus facilement cette formule, commençons par la simplifier, en faisant $y + \frac{ax}{2} + \frac{d}{2} = u$. Nous aurons

$$u^2 = y^2 + axy + dy + \tfrac{1}{2}adx + \tfrac{1}{4}a^2x^2 + \tfrac{1}{4}d^2;$$

ce qui donnera

$$u^2 + (b - \tfrac{1}{4}a^2)x^2 + (c - \tfrac{1}{2}ad)x + f - \tfrac{1}{4}d^2 = 0.$$

166. Construisons maintenant l'équation $y + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}d = u$; et pour cela, menons AB $= \frac{1}{2}d$ parallèle à PM, et au-dessous de AP, lorsque d est positif : menons ensuite BO parallèle à AP ; nous aurons déjà MO $= y + \frac{1}{2}d$: il faut donc augmenter MO de la quantité $\frac{1}{2}ax$ pour avoir une ligne que nous puissions appeler u.

Or si on prend sur BO une ligne BE de telle grandeur que l'on voudra, en faisant BE $= m$, et en menant EF $= \frac{1}{2}am$ parallèle à PM, de manière que par le point B et par le point F on tire une droite indéfinie BFN, on aura deux triangles semblables, BEF et BON, qui donneront ON $= \frac{ax}{2}$; donc la ligne MN $= u$,

Soit à présent BN $= z$, et la ligne connue BF $= n$, on aura

$$m : n :: x : z; \text{ donc } x = \frac{m}{n}z,$$

d'où on déduira

$$u^2 + (b - \tfrac{1}{4}a^2)\frac{m^2}{n^2}z^2 + (c - \tfrac{1}{2}ad)\frac{m}{n}z + f - \tfrac{1}{4}d^2 = 0.$$

Cela posé, il peut arriver, 1°. que $b = \frac{1}{4}a^2$, auquel cas $y^2 + axy + bx^2$ est un quarré parfait; 2°. que b soit plus grand que $\frac{1}{4}a^2$; 3°. que b soit plus petit que $\frac{1}{4}a^2$. Ainsi la dernière équation est susceptible des trois formes suivantes

$$u^2 - Az + B = 0 \ldots u^2 + Az^2 - Bz - C = 0 \ldots u^2 - Az^2 - Bz - C = 0.$$

Reste donc à la construire sous ces trois formes.

La première fait voir que la courbe cherchée rencontre la ligne BN

à un point C, tel que BC est égal à $\frac{B}{A}$; car alors $u = 0$, et parconséquent z devient $\frac{B}{A}$. 166.

Soit donc $CN = t$; on aura $BN = BC + CN$, ou $z = \frac{B}{A} + t$; et substituant cette valeur de z, on trouvera $u^2 = At$, équation au diamètre CN d'une parabole MCm, qu'il sera aisé de décrire, puisque l'on connaît le paramètre A de son diamètre, l'origine C de ce diamètre, et l'angle MNC qu'il fait avec ses ordonnées.

751. Concluons donc généralement que toutes les fois que les trois premiers termes $y^2 + axy + bx^2$ de l'équation générale du second degré forment un quarré parfait, cette équation appartient à la parabole.

La seconde forme sous laquelle nous devons considérer l'équation préparée; est $u^2 + Az^2 - Bz - C = 0$; et si nous faisons $z - \frac{B}{2A} = t$, nous aurons l'équation

$$u^2 = A\left(\frac{BB + 4AC}{4AA} - t^2\right),$$

qui appartient évidemment à l'ellipse, et qui étant comparée à l'équation (682)

$$y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2),$$

donne pour les valeurs des demi-diamètres conjugués

$$m = \frac{1}{2A}\sqrt{(BB + 4AC)} \ldots n = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(4C + \frac{BB}{A}\right)}.$$

D'où il suit qu'en prenant $BC = \frac{B}{2A}$, et en décrivant une ellipse 167.
dont le centre soit C, et dont les demi-diamètres conjugués soient $CD = m$, et $CG = n$, cette ellipse sera le lieu cherché.

752. En général, toutes les fois que b est plus grand que $\frac{1}{4}a^2$, l'équation générale du second degré appartient à l'ellipse.

Sous la troisième forme, cette même équation appartient à l'hyperbole; car si on fait $z + \frac{B}{2A} = t$, on aura, en substituant cette valeur dans $u^2 - Az^2 - Bz - C = 0$, l'équation

$$u^2 = A\left(t^2 + \frac{4AC - BB}{4AA}\right),$$

qui exprime le rapport des coordonnées d'une hyperbole dont le centre C est éloigné du point B de la quantité $CB = \frac{B}{2A}$. 168.

Mais suivant que $4AC$ est plus grand ou plus petit que BB, il

116. faut comparer cette équation avec l'une des deux équations suivantes :

$$y^2 = \frac{m^2}{n^2}(x^2 + n^2) \ldots y^2 = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2),$$

dont la première exprime le rapport des coordonnées au second diamètre (702). Celle-là donne

$$n = \frac{1}{2A}\sqrt{(4AC - BB)} \ldots m = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(4C - \frac{BB}{A}\right)}.$$

Ainsi en décrivant une hyperbole MGm dont le premier diamètre $CG = m$, et le second $CD = n$, on aura le lieu cherché pour l'équation proposée, dans le cas de $4AC > BB$.

Si BB, au contraire, est plus grand que 4AC, on comparera l'équation ci-dessus avec la seconde $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2)$, et on aura

$$m = \frac{1}{2A}\sqrt{(BB - 4AC)} \ldots n = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{BB}{A} - 4C\right)};$$

ce qui donne toute espèce de facilité pour décrire l'hyperbole MDm,
169. qui dans le cas de $4AC < BB$, est le lieu géométrique de l'équation générale.

753. Il suit de là que toutes les fois que b est plus petit que $\frac{1}{4}a^2$, la formule des équations du second degré appartient à l'hyperbole.

754. Mais si par hasard le terme y^2 manquait dans une équation du second degré, comment venir à bout de la construire ?

On supposerait d'abord le reste de l'équation divisé par b, coefficient de x^2, et on aurait un résultat de cette forme

$$x^2 + mxy + nx + py + q = 0.$$

Puis on supposerait $x + \frac{my}{2} + \frac{n}{2} = u$, et on aurait, en substituant,

$$u^2 - \tfrac{1}{4}m^2y^2 + \left(p - \frac{mn}{2}\right)y + q - \tfrac{1}{4}n^2 = 0;$$

équation à l'hyperbole qui se construirait comme la formule

$$u^2 - Az^2 - Bz - C = 0.$$

Et si on supposait $b = 0$, alors les deux quarrés des coordonnées manquant dans l'équation à construire, on n'aurait plus qu'une quantité de cette forme

$$xy + mx + ny - p = 0,$$

qui appartient à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, comme il est aisé de s'en convaincre par la construction qui suit.

170. Soit $x + n = u$, on aura $uy + mu = mn + p$. Soit $y + m = z$, on aura $uz = mn + p$. Soit prolongé AP vers D jusqu'à ce que AD soit égal à n, et soit mené $DC = m$, parallèlement à PM, de ma-

nière que par le point C on puisse mener une droite indéfinie CQ parallèle à AP. FIG.

Cette construction une fois faite, il est clair que l'on aura

$$MQ = y + m \ldots . CQ = x + n.$$

Donc

$$(y + m)(x + n) = mn + p;$$

équation à l'hyperbole décrite entre les asymptotes CK et CQ, en supposant qu'elle ait $mn + p$ pour puissance (697).

Or cette dernière équation est précisément la même que

$$xy + mx + ny - p = 0,$$

dont nous cherchions le lieu géométrique.

755. De tout ce qui précède, on doit conclure que toute équation indéterminée du second degré appartient à une section conique; et que pour en connaître l'espèce, il suffit d'avoir égard aux trois premiers termes $y^2 + axy + bx^2$ de la formule générale de ces équations.

Résumant donc les diverses suppositions que nous avons faites, nous dirons:

I°. Que si ces trois termes forment un quarré parfait, ou, ce qui revient au même, si $b = \frac{1}{4}a^2$, l'équation appartient toujours à la parabole. Donc si $b = 0$, ou s'il ne reste des trois premiers termes que y^2, l'équation appartient encore à la parabole. On voit que la même chose aurait lieu, s'il n'y avait simplement que x^2.

II°. Si b, coefficient de x^2, surpasse $\frac{1}{4}a^2$, quarré de la moitié du coefficient de xy, l'équation est alors à l'ellipse. Il faut dans ce cas là que le terme qui renferme x^2 soit positif.

Remarquez que l'ellipse peut devenir un cercle dans deux cas. 167.

1°. Lorsque CD = CG, ou A = 1, et que l'angle CNM = BCG est droit. Alors $BE^2 = BF^2 + FE^2$, ou $m^2 = n^2 + \frac{a^2m^2}{4}$; et puisque $A = 1 = (b - \frac{1}{4}a^2)\frac{m^2}{n^2}$, on a

$$b = \frac{n^2}{m^2} + \frac{1}{4}a^2 = 1.$$

Ainsi l'équation à construire aurait cette forme

$$y^2 + axy + x^2 + cx + dy + f = 0,$$

et elle appartiendrait au cercle, tant que l'angle BNM serait droit.

2°. L'ellipse devient encore un cercle, si $a = 0$, si $b = 1$, et si l'angle APM est droit: car alors l'équation devenant

$$y^2 + x^2 + cx + dy + f = 0,$$

on voit bien qu'elle doit appartenir au cercle, et que ce cas-là suit immédiatement du précédent.

III°. L'équation générale des équations du second degré appartient à l'hyperbole, lorsque dans ses trois premiers termes, $y^2 + axy + bx^2$, e coefficient b est plus petit que $\frac{1}{4}a^2$, quarré de la moitié du coeffi-

FIG. cient du terme xy. Si b est négatif, l'équation est donc encore à l'hyperbole, et si $b = -1$, l'hyperbole est équilatère.

Si l'un des deux quarrés y^2 ou x^2 manque, le rectangle xy restant toujours, la courbe est encore à l'hyperbole; et si les deux quarrés manquent à-la-fois, alors l'équation doit se rapporter aux asymptotes.

756. Il peut arriver que l'équation proposée ne soit pas réellement du second degré, et qu'elle appartienne à la ligne droite. Telle est l'équation

$$y^2 - xy + \tfrac{1}{4}x^2 = a^2;$$

mais alors la section conique qu'elle représente, dégénère en ligne droite, comme on sent bien que cela doit avoir lieu pour une parabole dont le paramètre serait nul, et qui parconséquent se confondrait avec son axe.

757. Si par hasard l'équation proposée impliquait quelque contradiction, le calcul le ferait bientôt connaître, par les opérations qu'il indiquerait; comme, par exemple, en conduisant le calculateur à décrire un cercle d'un rayon imaginaire, etc. etc. Ces détails suffiront pour l'intelligence des problèmes suivans.

Résolution des Problêmes indéterminés du second degré.

171. 758. PROBLÊME I. Les deux points A et B étant donnés, trouver la courbe AMB, telle qu'en menant de l'un quelconque M de ses points, les droites MA et MB, l'angle AMB soit toujours le même.

Soit mené MP perpendiculaire sur AB, et soit AP $= x$.. PM $= y$ ...AB $= a$...tang AMB $= t$, on aura

$$\text{tang AMP} = \frac{x}{y}, \text{ et tang BMP} = \frac{a-x}{y}.$$

Donc

$$t = \left(\frac{x}{y} + \frac{a-x}{y}\right) : \left(1 - \frac{x(a-x)}{y^2}\right);$$

ce qui donne

$$y^2 + x^2 - ax - \frac{a}{t}y = 0;$$

équation au cercle que l'on peut construire ainsi.

Soit d'abord cette équation écrite sous cette forme

$$\left(y - \frac{a}{2t}\right)^2 + (\tfrac{1}{2}a - x)^2 = \tfrac{3}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}\frac{a^2}{t^2}.$$

Soit divisé ensuite AB par la moitié au point F, par lequel on mènera EF $= \frac{a}{2t}$ perpendiculaire sur AB; puis du centre E et du rayon EA $= \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a^2}{4t^2}\right)}$, soit décrit le cercle AMB. Il est

clair que ce sera le lieu de l'équation trouvée ; car en menant EQ 116.
parallèle à AB, on aura

$$EQ = \tfrac{1}{2}a - x \ldots . MQ = y - \frac{a}{2t}.$$

Donc, etc.

Puisque $EF = \frac{a}{2t}$, l'angle AEF doit être égal à l'angle AMB ; donc si on mène AT, de manière que l'angle TAB soit égal à l'angle AMB, la ligne AE perpendiculaire sur AT rencontrera EF au centre du cercle cherché.

759. PROBLÊME II. Imaginons que la ligne droite AB, d'une lon- 172.
gueur donnée, se meuve dans l'angle BCA, de manière que ses extrémités A et B restent toujours sur les côtés de cet angle ; il s'agit de trouver la courbe décrite par un point déterminé M, pris sur cette ligne AB.

Soit mené MP parallèle à AC, et soit $CP = x \ldots . PM = y \ldots .$ $AM = m \ldots . BM = n \ldots .$ cos ACB = cos MPB = c ; on aura

$$BP = \frac{nx}{m},$$

et le triangle MPB donnera (580),

$$cy \cdot \frac{2nx}{m} = y^2 - n^2 + \frac{n^2x^2}{m^2} ; \text{ ou } y^2 - \frac{2nc}{m}xy + \frac{n^2}{m^2}x^2 - n^2 = 0,$$

équation qui appartient évidemment à l'ellipse.

Pour la construire, soit $y - \frac{cnx}{m} = u$; on aura, en faisant

$$\sin MPB = s \ldots . u^2 + \frac{n^2s^2}{m^2}x^2 - n^2 = 0.$$

Ayant donc pris arbitrairement $CE = g$, et mené $EF = \frac{cgn}{m}$, parallèlement à AC, si on tire CFQ, on aura $QM = u$.

Soit donc $CF = f$, et $CQ = z$, on aura $x = \frac{gz}{f}$; donc

$$u^2 = \frac{n^2s^2g^2}{m^2f^2}\left(\frac{f^2m^2}{g^2s^2} - z^2\right).$$

Ainsi les diamètres conjugués CO et CG seront respectivement exprimés par $\frac{fm}{gs}$ et par n ; et puisque l'on connaît l'angle GCO, il est facile de décrire l'ellipse (684).

Si l'angle ACB était droit, l'équation primitive deviendrait $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$; auquel cas elle appartiendrait à une ellipse qui aurait m et n pour demi-axes. On peut donc décrire par ce procédé toute ellipse dont les axes seront donnés ; le premier étant désigné

FIG. par $2a$, et le second par $2b$, on prendra $AM = a \ldots MB = b$, et on fera mouvoir la droite AB entre les côtés d'une équerre. Le point M décrira le quart de l'ellipse demandée.

173. 760. PROBLÊME III. La parabole NAK étant donnée, trouver le lieu de tous les points M tels qu'en menant les deux tangentes NM et KM, l'angle qu'elles formeront soit toujours égal à un angle donné.

Menons MP, KL et NQ perpendiculairement sur l'axe AQ, et supposons $AP = x \ldots PM = y \ldots NQ = z \ldots KL = u \ldots$ le paramètre de la parabole $= p \ldots$ tang $NMK = t$; et nous aurons, à cause des triangles semblables TPM, TNQ et SPM, SLK, les proportions suivantes :

$$\frac{2z^2}{p} : z :: \frac{z^2}{p} - x : y \ldots \frac{2u^2}{p} : u :: x - \frac{u^2}{p} : y.$$

Donc

$$2yz = z^2 - px, \text{ et } 2uy = px - u^2.$$

Ajoutant et soustrayant ces deux équations, on trouve pour résultat

$$2y = z - u \ldots z^2 + u^2 - 2px = 4y^2.$$

Or la première donne

$$z^2 + u^2 - 2uz = 4y^2; \text{ donc } uz = px.$$

Cette équation jointe à celle-ci $z - u = 2y$, exprime que les lignes MK et MN touchent la parabole. Il ne reste donc plus qu'à faire ensorte que l'angle NMK soit constant.

Or $NMK = NTQ + KSL$; et puisque tang $NTQ = \frac{NQ}{TQ} = \frac{pz}{2zz} = \frac{p}{2z}$, et que tang $KSL = \frac{p}{2u}$, on a

$$\text{tang } NMK = t = \frac{\frac{p}{2z} + \frac{p}{2u}}{1 - \frac{pp}{4zu}} = \frac{\frac{1}{2}p(u+z)}{zu - \frac{1}{4}pp} = \frac{2p(u+z)}{4px - p^2},$$

d'où l'on tire $\frac{1}{2}t(4x - p) = u + z$. D'ailleurs, puisque $z - u = 2y$, on en déduit

$$z = y + \tfrac{1}{4}t(4x - p) \ldots u = -y + \tfrac{1}{4}t(4x - p);$$

donc

$$uz, \text{ ou } px = -y^2 + t^2(x - \tfrac{1}{4}p)^2;$$

et ordonnant, on obtient enfin

$$y^2 - t^2x^2 + x(\tfrac{1}{2}pt^2 + p) - \tfrac{1}{16}p^2t^2 = 0,$$

équation à l'hyperbole que l'on peut construire ainsi.

Soit $x - \frac{1}{4}p - \frac{p}{2t^2} = z$, on aura

$$y^2 = t^2\left[z^2 - \frac{p^2}{4t^4}(t^2 + 1)\right];$$

et comparant cette équation à $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2)$, on trouvera en appelant s le sinus de l'angle NMK, FIG.

$$m = \frac{p}{2t^2}\sqrt{(t^2+1)} = \frac{p}{2ts} \ldots n = \frac{p}{2s}.$$

Diminuant donc les x de la quantité $AC = \frac{1}{4}p + \frac{p}{2t^2}$, et décrivant une hyperbole dont le premier axe $Dd = 2m$, et le second $= 2n$, cette courbe sera le lieu géométrique de l'équation trouvée.

On peut remarquer, 1°. que si l'angle NMK était obtus, la tangente t serait négative : mais cela ne changerait rien à l'équation, parcequ'elle ne renferme que des puissances paires de t; d'où il suit que des deux branches hyperboliques MDm et M'dm', l'une satisfait au problême dans le cas où l'angle donné est aigu, et l'autre dans le cas où cet angle serait obtus; et il est clair que c'est la plus éloignée, MDm, qui convient au premier cas.

On peut remarquer, 2°. que si l'angle donné était droit, la ligne cherchée serait la directrice même de la parabole; ensorte que si de chaque point de cette directrice on mène deux tangentes à la parabole, l'angle qu'elles formeront sera toujours droit.

761. PROBLÊME IV. Faire passer une section conique par cinq points donnés, A, C, D, B, E. 174.

Par deux de ces points, menons la ligne AB, et tirons des autres points les perpendiculaires CF, DH, GE sur cette ligne. Supposons ensuite que l'équation de la section conique cherchée est

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dx + fy + g = 0,$$

et faisons $AF = p \ldots FC = q \ldots AG = p' \ldots GE = q' \ldots AH = p'' \ldots DH = q'' \ldots AB = p'''$. Il faudra que lorsque $x = 0$, on ait $y = 0$: ainsi $g = 0$; ce qui réduit l'équation à

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dx + fy = 0.$$

Ensuite, selon que $x = p$, ou p', ou p'', ou p''', on a $y = q$, ou $-q'$, ou q'', ou zéro : ainsi on a les quatre équations suivantes :

$$aq^2 + bpq + cp^2 + dp + fq = 0 \ldots aq'q' - bp'q' + cp'p' + dp' - fq' = 0;$$
$$aq''q'' + bp''q'' + cp''p'' + dp'' + fq'' = 0 \ldots cp'''p''' + dp''' = 0;$$

d'où l'on tirera les valeurs des quatre inconnues b, c, d, f, qui étant substituées dans l'équation $ay^2 + bxy + cx^2 + dx + fy = 0$, donneront l'équation de la courbe cherchée, après avoir divisé par a.

Il n'y aura donc plus qu'à construire cette équation par les principes déjà connus.

On peut appliquer la même méthode à la résolution d'un problême semblable pour les lignes du troisième, du quatrième degré, et ainsi de suite.

762. Cette même méthode peut servir à trouver par approxima-

FIG. tion la loi qu'observent entre elles plusieurs quantités liées ensemble par de certains rapports; et on l'appelle alors *la Méthode des interpolations*.

175. Supposons, par exemple, les trois quantités BC, DE, FG dépendantes de trois autres quantités AB, AD, AF, il s'agit de trouver en général une loi qui unisse ces six quantités.

Pour cela, imaginons la ligne indéfinie ABDF, dont nous regarderons les parties AB, AD et AF comme les abscisses d'une courbe CEMG, et supposons que chaque ordonnée y est une fonction indéterminée $A + Bx + Cx^2$ de l'abscisse correspondante. (On prendrait quatre termes pour exprimer cette fonction, s'il y avait quatre quantités données, BC, DE, PM et FG, et ainsi de suite).

Cela posé, puisque l'on a dans cet exemple $y = A + Bx + Cx^2$, on fera $AB = a \ldots$ $BC = b \ldots$ $AD = a' \ldots$ $DE = b' \ldots$ $AF = a'' \ldots$ $FG = b''$, ce qui donnera les trois équations suivantes :

$$b = A + Ba + Ca^2 \ldots b' = A + Ba' + Ca'a' \ldots b'' = A + Ba'' + Ca''a'',$$

par lesquelles on déterminera les coefficiens A, B, C; ce qui donnera une équation approchée de la courbe CM : ainsi on pourra trouver une quantité AP qui dépende d'une autre quantité PM, de la même manière que AB dépend de BC, et que AD dépend de DE; ce qui est réciproque.

763. On peut trouver aussi par la même méthode l'équation approchée d'une courbe que l'on aurait tracée au hasard sur le papier.

Il suffit pour cela, 1°. d'abaisser des perpendiculaires de différens points de cette courbe, et surtout de ceux où elle change le plus de concavité, sur une droite quelconque, que l'on prendra pour ligne des abscisses. 2°. De supposer que l'équation de la courbe tracée est de cette forme $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc., dans laquelle on fera entrer autant de coefficiens indéterminés que l'on aura abaissé de perpendiculaires sur la ligne des abscisses; après quoi on déterminera, comme ci-dessus, les coefficiens A, B, C, D, afin d'obtenir une équation approchée de la courbe en question.

Résolution des Problêmes déterminés qui ne passent pas le quatrième degré.

764. Etant données deux équations indéterminées du second degré, on peut construire séparément leurs lieux géométriques, en leur donnant la même ligne des abscisses, la meme origine, et le même angle des coordonnées. Dans cette supposition, il est clair que les deux courbes se couperont en des points tels que les ordonnées correspondantes à ces points seront les racines de l'équation déterminée que l'on aurait en réduisant les deux équations données à une seule qui ne renfermât plus que x ou y.

Réciproquement, étant proposée une équation déterminée du troi-

sième ou du quatrième degré à résoudre, si on prend deux équations affectées l'une et l'autre de deux inconnues x et y, telles qu'en éliminant une de ces deux inconnues, on trouve l'équation proposée, il est évident qu'en construisant séparément les lieux de chacune de ces deux équations indéterminées, les points d'intersection des courbes qui en résulteront, auront chacun pour l'une de ses coordonnées une valeur de l'inconnue. FIG. 175.

Soit, par exemple, l'équation générale

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0;$$

si on fait $x^2 = py$, on aura l'équation

$$p^2y^2 + apxy + bpy + cx + d = 0;$$

qui appartient à une section conique, et qui étant construite avec la parabole exprimée par l'équation $x^2 = py$, coupera cette courbe en des points dont les abscisses correspondantes seront les valeurs de x.

Si l'équation proposée a quatre racines réelles, les deux sections qu'il faudra construire se couperont en quatre points. S'il n'y a que deux racines réelles, il n'y aura que deux intersections entre les lieux trouvés; et si toutes les racines sont imaginaires, il n'y aura aucun point d'intersection. Au cas enfin qu'il y eût quelques racines égales, les deux courbes se toucheraient en un ou deux endroits.

765. Remarque. Il peut arriver cependant que l'équation ait des racines réelles, et que les courbes ne se rencontrent pas, ou qu'elles se rencontrent en moins de points que l'équation n'a de racines. C'est une exception qui donne lieu à une difficulté dont on peut voir les détails et la résolution dans les *Institutions analytiques* du P. Riccati. Nous n'insisterons pas sur cet objet, ne devant proposer dans les problèmes suivans aucun cas qui soit sujet à une pareille exception.

766. Problême I. Etant données deux droites a et b, trouver deux moyennes proportionnelles x et y entre ces deux lignes.

Puisque l'on a par la supposition $\div\div\ a : x : y : b$, on en conclura d'abord que $x^2 = ay$, et que $y^2 = bx$. Ainsi en construisant les paraboles qui seraient les lieux géométriques de ces équations, et en leur donnant la même ligne des abscisses, le même sommet, et le même angle des coordonnées, (angle que l'on suppose ordinairement droit), ces paraboles donneraient par leur intersection les valeurs cherchées de x et de y.

Mais pour un problême aussi facile, une pareille solution serait trop compliquée : car, en général, on ne doit point construire une équation du troisième ou du quatrième degré, par le moyen de deux sections coniques, sans y employer le cercle dont la description est beaucoup plus aisée que celle des autres courbes.

Il est vrai que pour introduire le cercle dans ce genre de solution, on a quelquefois besoin d'une certaine adresse que l'habitude seule peut faire acquérir : mais aussi il est des cas où cette manière de construire les équations se présente tout de suite.

Digitized by Google

FIG. Par exemple, si on ajoute les deux équations précédentes,

$$x^2 - ay = 0 \ldots . y^2 - bx = 0;$$

on trouvera qu'en supposant les coordonnées perpendiculaires, il résulte une équation au cercle, qui est

$$x^2 + y^2 - ay - bx = 0;$$

laquelle étant construite avec une des deux équations à la parabole, $x^2 = ay \ldots y^2 = bx$, fera connaître les valeurs de x et de y.

766. Soit donc décrite une parabole AM dont le paramètre soit b, et qui ait pour axe la droite indéfinie AP; cette courbe sera le lieu géométrique de l'équation $y^2 = bx$.

Pour trouver celui de l'équation $x^2 + y^2 - ay - bx = 0$, faisons $x - \frac{1}{2}b = u$, et $y - \frac{1}{2}a = z$: nous aurons

$$u^2 + z^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2.$$

Menons ensuite par le point A perpendiculairement sur AP une droite AB qui soit $= \frac{1}{2}a$, et par le point B la droite BCQ, parallèle indéfinie à AP.

Cela posé, si on prend BC $= \frac{1}{2}b$, et si du rayon CA on décrit un cercle, on aura le lieu de l'équation

$$x^2 + y^2 - ay - bx = 0:$$

ce cercle coupera donc la parabole en un point M, tel qu'en abaissant la perpendiculaire MP, les coordonnées AP et PM seront les deux moyennes proportionnelles cherchées.

Si on supposait $b = 2a$, le cube construit sur AP serait double du cube a^3; ce qui résoudrait à peu de frais le problême de la duplication du cube, dont quelques anciens géomètres firent grand bruit.

On peut même généraliser la solution de ce problême, en prenant $b = \frac{m}{n}a$, pour trouver un cube $AP^3 = \frac{m}{n}a^3$ qui serait à un cube donné a^3, dans le rapport de m à n.

767. PROBLÊME II. Diviser un arc de cercle BF en trois parties égales.

Je suppose que MF soit le tiers de l'arc BF, et après avoir mené les perpendiculaires BOG, et MPm sur le rayon AF, je tire mR perpendiculaire sur BG.

Puis, faisant AP $= x \ldots$ PM $= y \ldots$ AM $= a \ldots$ AO $= b \ldots$ BO $= c$, j'aurai par les triangles semblables AMP et BmR

$$x : y :: c + y : x - b, \text{ ou } y^2 - x^2 + cy + bx = 0;$$

équation à l'hyperbole équilatère (755), qui étant construite déterminera le point M où le cercle et l'hyperbole se couperont.

Or l'équation $y^2 - x^2 + bx + cy = 0$, peut être mise sous cette forme

$$(y + \tfrac{1}{2}c)^2 - (x - \tfrac{1}{2}b)^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \tfrac{1}{4}b^2.$$

Donc si c est plus grand que b, l'équation appartiendra au second

axe, et si b est plus grand que c, elle appartiendra au premier. Dans cette dernière hypothèse, on pourra décrire l'hyperbole de la manière suivante : FIG.

Par le centre A soit mené $AD = \frac{1}{2} BO$, perpendiculairement sur AF : soit tiré ensuite DC parallélement à la ligne AO, de manière que DC soit égal à $\frac{1}{2}$ AO : le point C ainsi déterminé, sera le centre de l'hyperbole ; desorte que si on prend $CL = CK = \sqrt{(\frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{4} c^2)}$, et si on décrit sur l'axe LK une hyperbole équilatère KM, elle coupera le cercle au point cherché M.

L'hyperbole opposée M'LM'' coupe le cercle en deux points M' et M'', dont le premier donne (572) l'arc $F'M' = \frac{1}{3} F'M'B$, pendant que le second détermine l'arc $F'M'' = \frac{1}{3} F'M''GFB$.

Quant au point d'intersection G, il est aisé de voir que l'hyperbole est assujétie à passer par ce point, et qu'il ne donne parconséquent aucune solution.

768. Si on eût voulu résoudre le même problême par le moyen d'une parabole, cela eût été facile en ajoutant les deux équations

$$x^2 + y^2 = a^2, \text{ et } y^2 - x^2 + bx + cy = 0.$$

Car alors on eût trouvé

$$y^2 + \tfrac{1}{2} bx + \tfrac{1}{2} cy = \tfrac{1}{2} a^2;$$

équation à la parabole qui se construit ainsi.

Du point A ayant mené parallélement à BG la ligne $AD = \frac{1}{4} BO$, 178.
on tirera $DC = \frac{\frac{1}{8} c^2 + a^2}{b}$, parallèle à AF, et on décrira du sommet C et de l'axe CD une parabole dont le paramètre soit $= \frac{1}{2}$ AO.

Cette parabole coupera le cercle aux points cherchés M, M', et M''. On peut varier ces solutions de bien des manières, en multipliant les deux équations du problême par des quantités indéterminées, et en ajoutant ou soustrayant les produits, ce qui mène à des sections coniques différentes, toutes également propres à résoudre le problême.

769. Si on voulait, par exemple, le résoudre par le moyen d'une ellipse, il n'y aurait qu'à multiplier l'équation du cercle $y^2 + x^2 - a^2 = 0$, par l'indéterminée m, et qu'à joindre le produit à la seconde équation. Il en résulterait

$$y^2 + \frac{(m-1)\,x^2 + bx + cy - a^2 m}{m+1} = 0,$$

qui appartient à l'ellipse tant que m est positive et plus grande que l'unité : si m était négative et < 1, l'équation appartiendrait à l'hyperbole. On peut ensuite déterminer m par une condition arbitraire ; par exemple, si on demandait que les axes de l'ellipse fussent entre eux dans le rapport de $p : q$, il faudrait que $\frac{m-1}{m+1}$ fût égal à $\frac{p^2}{q^2}$, ce qui donne $m = \frac{q^2 + p^2}{q^2 - p^2}$.

FIG. 179. 770. PROBLÊME III. L'espace parabolique ACB étant donné, mener une droite CM qui le divise en deux secteurs égaux ACM et BCM.

Soit mené MP perpendiculaire sur AC, et soit AP $= x$.... PM $= y$.... AC $= a$.... BC $= b$.... le paramètre de la parabole $= p$, on aura

$\frac{2}{3}xy + \frac{1}{2}y(a-x) = \text{ACM} = \frac{1}{3}ab = \frac{1}{2}\text{ACB}$, ou $xy + 3ay = 2ab$; équation à l'hyperbolè entre les asymptotes, que l'on peut construire ainsi.

Soit prolongé AP au-delà de l'origine A, jusqu'à ce que AF soit égal à 3AC, et soit mené FK perpendiculaire sur FA; si on décrit entre les asymptotes FA et FK une hyperbole équilatère dont la puissance soit $2ab$, elle sera le lieu de l'équation $xy + 3ay = 2ab$, et coupera parconséquent la parabole au point cherché M.

Mais si on voulait se servir d'un cercle pour la résolution de ce problème, on le pourrait de la manière suivante :

1°. Soit substituée $\frac{y^2}{p}$ à la place de x dans l'équation..... $xy + 3ay = 2ab$, elle se changera en une autre équation de cette forme $y^3 + 3b^2y - 2b^3 = 0$.

2°. Soit multipliée cette équation par y, elle deviendra $y^4 + 3b^2y^2 - 2b^3y = 0$; de laquelle on tirera, après avoir substitué px à y^2, cette nouvelle équation

$$x^2 + 3ax - \frac{2a^2}{b}y = 0.$$

3°. A celle-ci soit ajouté $y^2 - px = 0$; on aura

$$y^2 + x^2 + (3a - p)x - \frac{2a^2}{b}y = 0,$$

équation au cercle, dont la construction peut s'effectuer ainsi.

Soit menée perpendiculairement sur AP une ligne AD $= \frac{a^2}{b}$; sur cette ligne AD soit menée de l'autre côté du point M une perpendiculaire DC′ $= \frac{3a-p}{2}$, (on suppose dans cette figure que $3a$ surpasse p). Cela posé, si du rayon C′A et du centre C′ on décrit un arc de cercle, on trouvera facilement que cet arc coupera la parabole au point cherché M, puisqu'il est par la construction même le lieu de l'équation

$$y^2 + x^2 + (3a - p)x - \frac{2a^2}{b}y = 0.$$

On a donc

$$\text{PM} = b\left[\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})} - \sqrt[3]{(-1+\sqrt{2})}\right].$$

771. PROBLÊME IV. Résoudre par une construction géométrique l'équation générale du troisième degré

$$x^3 \pm p^2x - p^2q = 0.$$

Multipliant

Multipliant cette équation par x, on aura FIG.

$$x^4 \pm p^2x^2 - p^2qx = 0;$$

et faisant $x^2 = ay$, on trouvera

$$y^2 \pm \frac{p^2}{a}y - \frac{p^2q}{a^2}x = 0;$$

équation qui, ajoutée avec $x^2 - ay = 0$, devient une équation au cercle de cette forme

$$y^2 + x^2 - y\left(\frac{a^2 \mp p^2}{a}\right) - \frac{p^2q}{a^2}x = 0.$$

Or la construction de celle-ci avec celle de la parabole, $x^2 = ay$, 180.
donnera les racines de l'équation proposée. Mais il faut distinguer deux cas; celui où l'on a $x^3 + p^2x - p^2q = 0$, et celui où $x^3 - p^2x - p^2q = 0$.

Dans le premier, l'équation au cercle est

$$y^2 + x^2 - y\left(\frac{a^2 - p^2}{a}\right) - \frac{p^2qx}{a^2} = 0;$$

et comme la quantité a est indéterminée, on peut simplifier cette équation, en faisant $a = p$; ce qui donnera $y^2 + x^2 - qx = 0$, que l'on pourra construire ainsi.

Soit décrit un cercle sur le diamètre AB $= q$, et ayant élevé sur AB la perpendiculaire AL, décrivons une parabole dont le sommet soit A, l'axe AL, et le paramètre p; cette courbe coupera le cercle en un point M qui déterminera l'abscisse AP, seule racine réelle (340) de l'équation proposée.

Dans le second cas on a

$$y^2 + x^2 - y\left(\frac{a^2 + p^2}{a}\right) - \frac{p^2qx}{a^2} = 0.$$

Ainsi en faisant $a = p$, on aura

$$x^2 = py \ldots y^2 + x^2 - 2py - qx = 0.$$

Décrivons donc une parabole MAM′, comme dans le cas précédent, 181.
et prenons AD $= p$: menant ensuite la ligne DC $= \frac{1}{2}q$ perpendiculairement sur AD, décrivons du centre C et du rayon CA un cercle; ce cercle coupera la parabole aux points M, M′ et M″, qui donneront MQ, M′Q′ et M″Q″ pour les racines cherchées.

Quant au point A où le cercle et la parabole se rencontrent, il donne la racine introduite $x = 0$.

De ces trois valeurs, il n'y a que la première qui soit positive; les deux autres sont négatives, et leur somme est égale à la seule racine positive MQ (317).

Il pourrait arriver que le cercle ne coupât la parabole qu'en un point M; et cela arrive toutes les fois que $\frac{1}{4}q^2$ surpasse $\frac{1}{27}p^3$ (340).

772. PROBLÊME V. Trouver les racines de l'équation générale du

FIG. quatrième degré $x^4 - p^2x^2 + p^2qx + p^3r = 0$, par le moyen d'un cercle et d'une parabole.

Je fais à l'ordinaire $x^2 = py$, et j'ai $y^2 + qx - py + pr = 0$; j'ajoute $x^2 - py = 0$; il en résulte l'équation au cercle.

$$x^2 + y^2 - 2py + qx + pr = 0.$$

182. Soit donc décrite une parabole M'AM''' qui ait pour axe la droite AQ perpendiculaire sur AP, et p pour paramètre. Cela posé, si on prend AD $= p$, et DC $= \frac{1}{2}q$, perpendiculaire sur AD, du côté que l'on voit dans la figure (ou de l'autre côté si DC devait être négatif), on trouvera qu'un cercle décrit du centre C et du rayon $\sqrt{(CA^2 - pr)}$, coupera la parabole aux points M, M', M'' et M''', qui détermineront les quatre racines de l'équation proposée. Il y en aura deux positives, savoir, MQ et M'Q'; les deux autres seront négatives, et leur somme sera égale à celle des deux premières (317).

773. REMARQUE. Il peut arriver, 1°. que le cercle coupe la parabole en quatre points, comme on le voit dans la figure 182; 2°. qu'il n'y ait que deux points d'intersection; 3°. qu'il n'y en ait aucun. Or on sait (764) que dans le premier cas l'équation a ses quatre racines réelles; que dans le second cas, elle en a deux réelles et deux imaginaires; et que dans le troisième cas, toutes ses racines sont imaginaires.

Vous remarquerez cependant que la construction précédente n'aurait pas lieu, si l'équation à construire était $x^4 + p^2x^2 - p^2qx + p^3r = 0$. Mais en supposant à l'ordinaire $x^2 = py$, on aurait..... $y^2 + x^2 - qx + pr = 0$; équation au cercle, comme dans le cas précédent, et qui est encore plus facile à construire : c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas.

774. PROBLÊME VI. Trouver les racines de l'équation

$$x^4 - pqx^2 + p^2rx + p^2m^2 = 0,$$

par le moyen d'un cercle et d'une hyperbole entre les asymptotes.

Je fais $xy = pm$, et j'en déduis

$$x^4 - pqx^2 + p^2rx + x^2y^2 = 0 = x^2 + y^2 - pq + \frac{p^2r}{x} = x^2 + y^2 - pq + \frac{pry}{m};$$

équation au cercle qui donne la construction suivante.

183. Entre les asymptotes perpendiculaires QAQ', P'''AP', soient décrites deux hyperboles équilatères opposées, dont la puissance soit pm. Si on prend au-dessous de AP la ligne AC $= \frac{pr}{2m}$, et si on décrit un cercle du centre C et du rayon $\sqrt{(AC^2 + pq)}$, ce cercle coupera les hyperboles opposées aux quatre points M, M', M'' et M''', qui détermineront les quatre valeurs de x, par les abscisses AP, AP', AP'' et AP'''.

Les deux premières sont positives, les deux dernières sont négatives; d'où l'on voit que cette solution ne peut avoir lieu que lorsque le dernier terme de l'équation proposée est positif.

Les principes que nous avons exposés dans le premier chapitre des lieux géométriques, et les applications que nous venons d'en faire dans la résolution de divers problêmes, suffisent pour donner au moins une idée des constructions géométriques. Nous allons maintenant passer au calcul différentiel. FIG.

ÉLÉMENS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Il en est du calcul différentiel comme de l'algèbre : on ne saurait le définir d'une manière intelligible pour ceux qui n'en connaissent pas les premiers élémens.

Newton fut le premier inventeur de ce calcul, et personne n'en eût partagé la gloire avec lui, s'il eût été plus empressé de mettre au jour ses découvertes.

Mais l'espèce de mystère dont il les enveloppa dans l'origine, donna le temps à Leibnitz de marcher à grands pas dans la même carrière. Bientôt après Jacques et Jean Bernoulli y firent des progrès rapides; de là cette vive contestation que les géomètres allemands eurent avec les géomètres anglais, sur la part que Leibnitz avait eue à cette nouvelle théorie. Sans entrer dans cette discussion, nous observerons que d'autres géomètres avaient préludé depuis long-temps à la découverte du calcul différentiel.

Il ne serait même pas difficile de faire voir l'analogie qui règne entre ce calcul d'une part, et de l'autre la *méthode d'Exhaustion*, si connue des anciens, la *méthode des indivisibles*, donnée par Cavalieri, et les procédés dont Fermat, Descartes, Barrow et tant d'autres faisaient usage avant Newton. Les travaux de ces derniers géomètres semblent avoir servi d'échelon à ce grand homme.

775. Quoi qu'il en soit, supposons qu'une variable quelconque x reçoive un accroissement fini e; de manière qu'après l'avoir reçu, son état soit exprimé par $x+e$. On demande quels doivent être les accroissemens correspondans des autres fonctions de x.

D'abord il est clair que si x devient $x+e$, son quarré x^2 deviendra $x^2+2ex+ee$; ainsi le rapport de ces deux accroissemens sera $\frac{1}{2x+e}$. Mais si e diminue, ce rapport augmentera, et il approchera de plus en plus de celui de $\frac{1}{2x}$. Cependant il ne lui deviendra égal qu'au moment où e s'évanouira : le rapport $\frac{1}{2x}$ est donc la limite de ceux que les accroissemens finis de x et de xx peuvent avoir entre eux. On trouvera de même que la limite de ceux de x et de x^n est $\frac{1}{nx^{n-1}}$.

FIG. 776. Or le calcul différentiel a pour objet de déterminer ces limites dans tous les cas. Voyez ce que d'Alembert a écrit sur cette matière, vous y trouverez les vraies notions de ce calcul. S'il reste encore quelques difficultés, c'est qu'elles sont inséparables des idées abstraites de limite et d'infini.

777. Voici une des applications les plus propres à faire entendre la manière de déterminer ces limites. Soit proposé de mener une
184. tangente au point M de la courbe AMm, ou, ce qui revient au même, soit proposé de déterminer la soutangente PT.

On supposera que l'abscisse AP $= x$ croît d'une quantité finie P$p = e$; on mènera l'ordonnée PM $= y$, et on déterminera l'ordonnée mp, en substituant $x + e$ au lieu de x dans l'équation de la courbe. Quelle que soit la valeur de cette ordonnée, on pourra toujours la représenter par $y + Pe + Qe^2 + Re^3 +$ etc. (P, Q, R, etc. étant des fonctions de x); on aura donc pour l'expression de rm, accroissement correspondant de l'ordonnée PM, la quantité $Pe + Qe^2 + Re^3 +$ etc.

Cela posé, soient menées la sécante SMm, et la ligne Mr parallèle et égale à Pp, on aura

$$\text{PS} = \frac{y}{\text{P} + \text{Q}e + \text{R}e^2 + \text{etc.}}.$$

Rapprochons maintenant le point p du point P; le point m s'approchera du point M, et le point S du point T; mais on aura toujours

$$\text{PS} = \frac{y}{\text{P} + \text{Q}e + \text{R}e^2 + \text{etc.}}.$$

Si la quantité Pp diminue encore et devient très-petite, il ne s'en faudra que de très-peu que m ne se confonde avec M, et que la sécante ne devienne tangente. Mais si e s'évanouit, le rapport déjà trouvé se réduit à $\frac{y}{\text{P}}$, PS devient PT, Sm devient TM qui n'a plus que le point M de commun avec la courbe, et la soutangente est déterminée par cette limite.

Par exemple, si AMm est une parabole, on substituera $x + e$ à x dans l'équation $y = \sqrt{px}$, et on aura

$$y = p^{\frac{1}{2}}(x+e)^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}\cdot p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}e - \text{etc.};$$

qui donne

$$\text{P} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}; \text{ d'où } \text{PT} = \frac{\sqrt{px}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}} = 2x;$$

comme nous l'avons déjà trouvé (669).

On voit par là avec quelle promptitude cette méthode résout le problème des tangentes, qui est en quelque sorte le berceau du calcul

différentiel. Mais on verra bien plus amplement dans la suite la conformité des résultats de ce calcul avec ceux de l'ancienne Géométrie.

En attendant, nous remarquerons que ces quantités Pp, ou Mr, et rm qui diminuent de plus en plus, à mesure que le point p se rapproche du point P, sont les élémens respectifs de l'abscisse AP et de l'ordonnée MP.

778. Ces élémens, quelque petits qu'on les suppose, conservent entre eux le même rapport que les quantités finies auxquelles ils appartiennent ; cela est visible par la seule inspection des triangles semblables SPM et Mmr. Et comme la limite de ce rapport n'a lieu qu'au moment où ces élémens s'évanouissent, on peut dire avec Euler, que le calcul différentiel a pour objet de faire connaître à quoi se réduisent les rapports des élémens des quantités variables, lorsque ces élémens deviennent nuls.

Mais ne pouvant devenir nuls, sans passer par tous les degrés possibles de diminution, on sent bien qu'il doit résulter de leur décroissement infini des idées un peu confuses ; car notre esprit ne comporte pas de perception claire de ce qui tient à l'infini. Aussi depuis son origine, le calcul différentiel a-t-il éprouvé beaucoup de contradictions. Il en éprouvera sans doute encore ; mais s'il fallait répondre à toutes les chicanes d'une métaphysique pointilleuse, on n'en finirait pas. L'existence même du mouvement serait encore un problême, si on s'était arrêté aux difficultés que Zénon proposait autrefois pour la combattre.

Ce n'est pas au reste que Maclaurin, dans son *Traité des Fluxions*, n'ait répondu à la plupart des sophismes dont quelques auteurs ont voulu embrouiller la matière.

Mais on ne peut se dissimuler que pour suivre la marche rigoureuse de ce savant homme, il faut essuyer bien des longueurs.

779. Au reste, si les principes dont Leibnitz est parti, ne semblent pas aussi rigoureux que ceux de Newton, ils ont du moins l'avantage de conduire aux mêmes résultats, ce qui finit par inspirer le même degré de confiance. Or telle est, suivant Leibnitz, la subordination d'une quantité infiniment petite par rapport à la quantité finie dont elle fait partie, qu'elle peut être négligée sans erreur sensible, de même qu'on néglige une quantité finie par rapport à une quantité infinie. C'est ainsi, par exemple, que $\infty \pm 1$, et plus généralement $\infty \pm a$ se réduisent à ∞. On peut regarder de même un infiniment petit du second ordre, comme une quantité qui s'évanouit par rapport à un infiniment petit du premier.

Cela posé, Leibnitz imagine qu'une variable x croisse ou décroisse d'une quantité infiniment petite, qu'il désigne par dx, et il cherche quels doivent être les accroissemens ou décroissemens respectifs des autres fonctions de x. Son quarré x^2, par exemple, devenant $(x \pm dx)^2 = x^2 \pm 2xdx + dxdx$, il est clair que $dxdx$ doit être rejeté comme un infiniment petit du second ordre, et parconséquent la différence entre x^2 et $x^2 \pm 2xdx$ est $\pm 2xdx$. Ainsi l'accroissement

correspondant du quarré d'une variable quelconque est le produit du double de cette variable multipliée par son accroissement.

780. En général, la différence qui règne entre une quantité variable, avant qu'elle ait reçu aucune altération infiniment petite, et cette même quantité, après qu'elle a reçu quelque altération de ce genre, s'appelle la *différentielle* de cette quantité; ce qui a fait donner le nom de calcul différentiel à la méthode qui détermine dans tous les cas ces différences.

Newton lui avait donné auparavant le nom de *Calcul des Fluxions*, par une suite de l'idée qu'il s'était faite de la formation de toutes les quantités. Imaginant en effet que tout ce qui croît ou diminue dans la nature, reçoit ces accroissemens ou ces diminutions par le mouvement d'un de ses élémens, il appella *Calcul des Fluxions* la méthode dont il se servait pour déterminer les rapports de ces variations.

781. Il nomma *Fluentes* les quantités que Leibnitz appelle *variables*, et ce que nous désignerons par dx, il le désigna par un point mis sur x; ensorte que dx et $\dot{x}$ signifient la même chose, et que fluxion de x, ou différentielle de x, sont absolument synonymes. Le seul avantage qu'il y ait à se servir de la lettre d, au lieu d'un point, pour marquer les différentielles ou les fluxions des variables, c'est qu'elle les fait mieux reconnaître parmi d'autres quantités. Il eût même été à propos d'introduire dès le commencement quelque caractère propre à marquer les différentielles, comme on en a introduit un pour marquer les radicaux. Mais à présent que l'usage a prévalu, toute innovation de ce genre serait déplacée, outre qu'elle aurait bien peu d'utilité.

782. Ainsi que les quantités finies et variables x et y ont des différentielles dx et dy, ces différentielles à leur tour en ont aussi.

On les appelle *Différences secondes*, pour les distinguer des premières, et on les désigne indifféremment par ddx et ddy, ou par $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$. Les différentielles troisièmes sont $dddx$, et $dddy$, ou $\dddot{x}$ et $\dddot{y}$, et ainsi de suite.

Pour abréger, on écrit $d^2 x$, $d^3 x$, au lieu de ddx, $dddx$. En général, la lettre d mise devant une quantité quelconque indique qu'il faut différentier cette quantité; et l'exposant de la même lettre d annonce combien de fois de suite il faut procéder à la différentiation.

Lorsque la quantité proposée est polynome, on la met entre deux parenthèses, que l'on fait précéder de la lettre d. Ainsi $d(x^2 + y^2)$ indique qu'il faut différentier le binome $x^2 + y^2$.

783. Quoique les différentielles de même degré soient toutes infiniment petites, elles ne sont égales entre elles, que lorsqu'il y a égalité entre les quantités variables, dont elles dépendent respectivement. En attendant que nous enseignions la manière de trouver l'expression du rapport que peuvent avoir des quantités qui s'évanouissent en même temps, soit $\frac{aa - xx}{a - x}$; il est certain que $a + x$ exprime la valeur de cette fraction, quelle que soit la valeur de x; mais si $x = a$,

la fraction se réduit à $\frac{0}{0}$, et le quotient devient $2a$. Voilà donc un exemple de ces sortes de fractions dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent en même temps, et qui cependant ont des valeurs très-réelles.

784. Si on suppose infini le diviseur d'une quantité finie quelconque a, il est clair que le quotient doit alors se réduire à zéro. On a donc

$$\frac{a}{\infty} = 0; \text{ ce qui donne } a = 0 \times \infty;$$

d'où il suit que zéro multiplié par une quantité infinie peut représenter indifféremment toute sorte de quantités finies; réciproquement, que toute quantité finie divisée par zéro, c'est-à-dire, que ∞ et 0 servent dans le calcul différentiel, comme autant de quantités indéterminées. Ce sont des expressions vagues, dont il semble que l'on ne s'est avisé que pour éviter des circonlocutions.

RÈGLES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

785. ETANT donné $y = ax$, on suppose que x reçoive un accroissement infiniment petit, désigné par dx; y en recevra donc un aussi que nous désignerons par dy, et nous aurons

$$y + dy = ax + adx; \text{ d'où } dy = adx;$$

c'est la différentielle de l'équation proposée.

Elle eût été la même pour l'équation $b + y = ax - c$; car les constantes n'ont point de différentielle.

786. Et toutes les fois que les variables ne passeront pas le premier degré, on aura les différentielles des quantités proposées, en effaçant les termes constans et en substituant aux variables leurs propres différentielles. S'il fallait, par exemple, différentier $bx + cy - a = \frac{m}{n}z + f$; vous écririez $bdx + cdy = \frac{m}{n}dz$.

Mais si les variables sont élevées à d'autres puissances que la première; si on a, par exemple, $y = x^m$, alors, en supposant que x devienne $x + dx$, on aura

$$y + dy = (x + dx)^m = x^m + mx^{m-1}dx + \frac{m.m-1}{2}x^{m-2}dx^2 + \text{etc.}$$

Or dx^2, dx^3, etc. s'évanouissent par rapport à dx: restera donc $dy = mx^{m-1}dx$; donc si $m = 2$, $dy = 2xdx$; si $m = 3$, $dy = 3x^2dx$; etc.

787. En général, pour différentier une variable élevée à une puissance quelconque, diminuez son exposant d'une unité, et multipliez-la par l'exposant qu'elle avait d'abord, et par sa différentielle. On

aurait pu déduire cette règle par introduction, sans y employer la formule du binome, et alors on eût trouvé cette formule même avec plus de facilité que par l'Algèbre ordinaire. Supposons en effet que l'on demande la valeur générale de $(1+z)^m$. On peut représenter cette valeur par l'équation

$$(1+z)^m = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.}$$

Cela posé, différentions en suivant la règle précédente : nous aurons

$$m(1+z)^{m-1}dz = Adz + 2Bzdz + 3Cz^2dz + \text{etc.}$$

en divisant par dz, nous trouverons

$$m(1+z)^{m-1} = A + 2Bz + 3Cz^2 + \text{etc.}$$

Or cette équation doit avoir lieu quelle que soit la valeur de z, supposons-la donc $= 0$; alors $m = A$; donc

$$m(1+z)^{m-1} = m + 2Bz + 3Cz^2 + \text{etc.}$$

Différentions de nouveau, et divisons ensuite par dz; il viendra

$$m.m-1.(1+z)^{m-2} = 2B + 2.3Cz + 3.4Dz + \text{etc.}$$

Soit $z = 0$, donc

$$B = \frac{m.m-1}{2}, \text{ et } m.m-1.(1+z)^{m-2} = m.m-1 + 2.3Cz + \text{etc.}$$

Le même calcul donnera

$$C = \frac{m.m-1.m-2}{2.3}$$

et ainsi des autres coefficiens indéterminés D, E, etc. On aura donc

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m.m-1}{2}z^2 + \text{etc. et } (a+b)^m,$$

ou

$$a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = a^m\left(1 + m.\frac{b}{a} + \frac{m.m-1}{2}.\frac{b^2}{a^2} + \text{etc.}\right)$$

$$= a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{2}a^{m-2}b^2 + \text{etc.}$$

Revenons aux différentielles.

788. Lorsque deux variables x et y se trouvent multipliées l'une par l'autre, alors

$$d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy = ydx + xdy + dxdy = ydx + xdy;$$

parceque $dxdy$ s'évanouit.

On a de même,

$$d(xyz) = zd(xy) + xydz = xydz + xzdy + yzdx$$

$$d(uxyz) = yzd(ux) + uxd(yz) = uxydz + uxzdy + uyzdx + xyzdu.$$

Donc en général, pour différentier le produit de tant de variables que l'on voudra, il n'en faut différentier qu'une à la fois, comme si toutes les autres étaient constantes; et après avoir fait la même chose pour chacune, il faut rassembler toutes ces différentielles.

Soit, par exemple, la quantité x^3y. Je fais varier y, et j'ai x^3dy; je fais varier x, et j'ai $3yx^2\,dx$. Donc

$$d\,(x^3y) = x^3dy + 3yx^2dx.$$

De même

$$d\,(x^2y^3z^4) = 3x^2z^4y^2dy + 4x^2y^3z^3dz + 2xy^3z^4dx.$$

789. Soit maintenant la fraction $\frac{x}{y}$; je l'écris ainsi xy^{-1}, et en différentiant j'ai

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = y^{-1}dx - xy^{-2}dy = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy} = \frac{ydx - xdy}{yy}.$$

Donc pour différentier une fraction où il entre des variables, il faut 1°. multiplier le dénominateur par la différentielle du numérateur; 2°. multiplier le numérateur par la différentielle du dénominateur; 3°. retrancher le dernier produit du premier, et diviser le reste par le quarré du dénominateur.

Avec ces règles seules, il n'est pas de quantité algébrique que l'on ne puisse différentier. Voici quelques exemples de celles qui sont les plus usitées.

I. Soit $x = \frac{1}{y}$, on aura

$$dx = d\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{dy}{yy}.$$

II. Soit $x = \sqrt{(qy + yy)} = (qy = yy)^{\frac{1}{2}}$, on aura

$$dx = \tfrac{1}{2}\,(qy + yy)^{\frac{1}{2}-1}\,d\,(qy + yy) = \frac{(\frac{1}{2}q + y)\,dy}{\sqrt{(qy + yy)}}.$$

790. En général, si $x = \sqrt[m]{(az + z^2)} = (az + z^2)^{\frac{1}{m}}$, on trouvera que

$$dx = \frac{1}{m}(az + z^2)^{\frac{1}{m}-1}(adz + 2zdz) = \frac{dz\,(a + 2z)}{m\sqrt[m]{(az + z^2)^{m-1}}}.$$

D'où il suit que pour différentier un radical du degré m, il faut diviser la différentielle de la quantité qui est sous le signe, par l'exposant m et par la racine m de cette quantité élevée à la puissance $m - 1$.

III. Soit $x = (a + by + cyy)^m$, on aura

$$dx = m\,(a + by + cy^2)^{m-1}\,(b + 2cy)\,dy.$$

IV. Si $y = (ax + bxx + cx^3)^{\frac{m}{n}}$, on trouvera

$$dy = \frac{m}{n}(ax + bxx + cx^3)^{\frac{m}{n}-1}(a + 2bx + 3cx^2)\,dx.$$

V. Soit $z = \frac{x}{-x + \sqrt{(aa + xx)}} = \frac{x}{aa}(x + \sqrt{(xx + aa)})$, on aura

$$dz = \frac{2xdx}{aa} + \frac{dx}{aa}\sqrt{(aa+xx)} + \frac{x^2dx}{aa\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{2xdx}{aa} + \frac{aadx + 2xxdx}{aa\sqrt{(a^2+x^2)}}.$$

Des différentielles secondes, troisièmes, etc.

791. La différentielle seconde d'une quantité est la différentielle de la première différence. La différentielle troisième est la différentielle de la seconde, et ainsi de suite ; ddx ou d^2x signifie la différentielle seconde de x ; d^3x ou $dddx$ marque la troisième, etc. Le quarré de la différentielle dx s'écrit ainsi, dx^2, et sa puissance m s'écrit dx^m, etc. Il ne faut pas confondre $d(x^m)$ avec dx^m.

D'après ce que nous venons de dire sur les différentielles premières, il est facile d'avoir les secondes, etc. Soit x^2 dont on demande la différentielle seconde : on aura pour la première $2xdx$; la seconde sera donc

$$2dxdx + 2xddx = 2dx^2 + 2xddx.$$

De même, puisque $d(x^m) = mx^{m-1}dx$, on a

$$dd(x^m) = mx^{m-1}ddx + m.m-1.x^{m-2}dx^2.$$

On a aussi

$$d(xy) = xdy + ydx;$$

donc

$$dd(xy) = xddy + yddx + 2dydx.$$

De ce que $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{yy} = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}$, on tire

$$dd\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ddx}{y} - \frac{dxdy}{yy} - \frac{xddy}{yy} - \frac{dxdy}{yy} + \frac{2xdy^2}{y^3}$$

$$= \frac{2xdy^2}{y^3} + \frac{ddx}{y} - \frac{xddy}{yy} - \frac{2dxdy}{yy} = \frac{2xdy^2 + y^2ddx - xyddy - 2ydxdy}{y^3},$$

et ainsi des autres.

Par les mêmes principes, on peut trouver les différentielles troisièmes, quatrièmes, et en général les différentielles d'un degré quelconque, de toutes sortes de quantités affectées de dx et de dy.

Par exemple, la différentielle de ydx est $yddx + dydx$;

celle de $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ est $\frac{dxddx+dyddy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; celle de $\frac{ydx}{dy}$ est $dx+\frac{yddx}{dy}-\frac{ydxddy}{dy^2}$; celle de la quantité infiniment grande $\frac{a}{dx}$ est $-\frac{addx}{dx^2}$, etc., etc.

792. Pour abréger le calcul des secondes différentielles de plusieurs variables, on suppose ordinairement une des premières différentielles constante; c'est-à-dire, que l'on rapporte les autres différentielles à celle-là, comme à un terme fixe de comparaison; on en verra bientôt des exemples. Cette supposition simplifie le travail, en ce qu'elle fait disparaître tous les termes affectés de la différentielle de la quantité que l'on a prise pour constante.

Si on cherchait, par exemple, la différentielle de $\frac{ydx}{dy}$, en supposant dx constante, on trouverait $dx-\frac{ydxddy}{dy^2}$; et si on faisait dy constante, on aurait $dx+\frac{yddx}{dy}$.

793. Remarque. Nous avons supposé jusqu'ici que les variables qu'on avait à différentier, augmentaient toutes en même temps. Si les unes augmentant, les autres diminuaient, il n'y aurait pas de difficulté pour cela; car dx et dy peuvent être positives ou négatives, comme toutes les autres quantités algébriques.

Des Différentielles logarithmiques et exponentielles.

794. Soit proposé de différentier le logarithme naturel de la variable x. Je désigne ce logarithme par lx, et faisant $lx=z$, j'ai

$$z+dz=l(x+dx);$$

ce qui donne dz, ou

$$d(lx)=l(x+dx)-lx=l\left(1+\frac{dx}{x}\right)=\frac{dx}{x}-\frac{dx^2}{2x^2}+\frac{dx^3}{3x^3}-\text{etc.}=\frac{dx}{x}.$$

Donc la différentielle du logarithme d'une quantité quelconque est égale à la différentielle de cette quantité divisée par elle-même. Parconséquent, pour un système dont le module $=m$, on a

$$d(lx)=\frac{mdx}{x}.$$

Mais nous ne parlerons dans la suite que des logarithmes naturels dont le module $=1$.

Cette règle posée, il est facile d'entendre les exemples suivans :

$$dlx^n = \frac{nx^{n-1}dx}{x^n} = \frac{ndx}{x} \ldots dlxy = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{ydx + xdy}{xy};$$

$$dl\frac{x}{y} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{ydx - xdy}{xy} \ldots dl(aa - xx) = \frac{-2xdx}{aa - xx} = \frac{-dx}{a-x} + \frac{dx}{a+x}$$

$$dl\sqrt[m]{(a+bx^n)^p} = \frac{p}{m}.dl(a+bx^n) = \frac{\frac{bpn}{m}x^{n-1}dx}{a+bx^n};$$

$$dl\frac{x}{\sqrt{(1+xx)}} = \frac{dx}{x} - \frac{xdx}{1+xx} = \frac{dx}{x(1+xx)}.$$

795. Si l'on a des puissances de logarithmes, ou même des logarithmes de logarithmes, leur différentiation sera aisée. Soit, par exemple, $y = (lx)^m$, on aura

$$dy = m(lx)^{m-1}\frac{dx}{x}.$$

Si on a $y = x^m(lx)^n$, il viendra

$$dy = mx^{m-1}dx(lx)^n + nx^{m-1}dx(lx)^{n-1} = x^{m-1}dx(lx)^{n-1}(n+mlx) \text{ etc.}$$

Soit ensuite $y = llx$, on fera $lx = z$, et on aura

$$dy = \frac{dz}{z} = \frac{dx}{xlx}.$$

796. L'équation $d(lx) = \frac{dx}{x}$, donne $dx = xd(lx)$. Donc la différentielle d'une quantité quelconque est égale au produit de cette quantité par la différentielle de son logarithme. Cette règle peut servir à trouver facilement les différentielles des quantités même algébriques. Par exemple,

$$d(x^m) = x^m dlx^m = \frac{mx^m dx}{x} = mx^{m-1}dx;$$

$$d(xy) = xy\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) = ydx + xdy;$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}\left(\frac{dx}{x} - \frac{y}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2} \text{ etc.}$$

On l'applique surtout avec succès à la différentiation des *exponentielles*. On nomme ainsi celles qui ont des exposans variables. Telles sont a^x, x^y, etc. qui sont du premier ordre ; x^{y^z} est du second, etc.

La différentielle de a^x, ou $d(a^x)$ sera

$$a^x dla^x = a^x d(xla) = a^x dxla.$$

Donc si e est le nombre 2,7182818, dont le logarithme $= 1$, on aura

$$d(e^x) = e^x dx.$$

De même

$$d(x^y) = x^y d(ylx) = x^y\left(dylx + \frac{ydx}{x}\right), \text{ etc.}$$

797. On aurait pu trouver ces différentielles de cette autre manière. Nous avons vu (306) que $n = 1 + ln + \frac{(ln)^2}{2} + \frac{(ln)^3}{2.3} + \text{etc.}$ Supposons donc que $n = a^x$, et substituons cette valeur de n, nous trouverons

$$a^x = 1 + la^x + \frac{(la^x)^2}{2} + \frac{(la^x)^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Or

$$la^x = xla, \text{ et } (la^x)^2 = (xla)^2 = x^2l^2a;$$

donc

$$ax = 1 + xla + \frac{x^2l^2a}{2} + \frac{x^3l^3a}{2.3} + \text{etc.}$$

et parconséquent

$$d(a^x) = dxla + xdxl^2a + \frac{x^2dxl^3a}{2} + \text{etc.}$$

$$= dxla\left(1 + xla + \frac{x^2l^2a}{2} + \frac{x^3l^3a}{2.3} + \text{etc.}\right) = a^xdxla.$$

A l'égard des exponentielles, telles que x^{y^z}, leur différentielle est aisée à trouver; car on a

$$d(x^{y^z}) = x^{y^z} d(y^zlx) = x^{y^z}\left[y^z\frac{dx}{x} + y^zlx\left(dzly + \frac{zdy}{y}\right)\right]$$

$$= x^{y^z}y^z\left(\frac{dx}{x} + \frac{zdy}{y}lx + dzlxly\right);$$

si $x = y = e$, on a $e^{e^z}e^zdz$ pour la différentielle de e^{e^z}. On trouverait de même les différentielles secondes, troisièmes, etc. des quantités logarithmiques et exponentielles, mais nous ne nous y arrêterons pas. Voyons maintenant comment on différentie les sinus, cosinus, etc.

Des différentielles des quantités affectées de sinus, de cosinus, etc.

798. Soit $\sin x = y$, on aura

$$y + dy = \sin(x + dx) = \sin x \cos dx + \sin dx \cos x.$$

Or dx étant un arc infiniment petit, on aura

$$1^\circ.\ \cos dx = 1;\ 2^\circ.\ \sin dx = dx.$$

Donc

$$y + dy = \sin x + dx \cos x, \text{ ou } dy = d\sin x = dx\cos x.$$

La différentielle du sinus d'un arc quelconque est donc égale à la différentielle de cet arc multipliée par son cosinus.

FIG. 799. Puisque $d \sin x = dx \cos x$, si on fait $x = 90° - y$, on aura

$$dx = -dy, \text{ et } d \cos y = -dy \sin y,$$

formule que l'on aurait pu trouver de ces deux autres manières :

$$1°.\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Donc

$$\sin x d \sin x + \cos x d \cos x = 0, \text{ et } d \cos x = -\frac{\sin x}{\cos x} d \sin x = -dx \sin x.$$

$$2°.\ d \cos x = \cos (x + dx) - \cos x$$
$$= \cos x \cos dx - \sin dx \sin x - \cos x = -dx \sin x.$$

Concluons donc que la différentielle du cosinus d'un arc quelconque est égale à la différentielle négative de cet arc multipliée par son sinus.

800. Soit $\text{tang}\, x = z = \frac{\sin x}{\cos x}$, on aura

$$dz = \frac{\cos x d \sin x - d \cos x \times \sin x}{\cos^2 x} = \frac{dx \cos^2 x + dx \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x} = d\, \text{tang}\, x.$$

La différentielle de la tangente d'un arc est donc égale à la différentielle de cet arc divisée par le quarré de son cosinus.

Si au lieu de supposer le rayon $= 1$, on le supposait $= a$, on aurait

$$d\, \text{tang}\, x = \frac{aadx}{\cos^2 x}.$$

801. Soit $x = 90° - y$, on aura

$$d \cot y = \frac{-dy}{\sin^2 y};$$

de même

$$d\, \text{séc}\, y = d \frac{1}{\cos y} = \frac{-d \cos y}{\cos^2 y} = \frac{dy \sin y}{\cos^2 y} = \frac{dy\, \text{tang}\, y}{\cos y},$$

et

$$d\, (\text{cosec}\, y) = d \frac{1}{\sin y} = \frac{-d \sin y}{\sin^2 y} = \frac{-dy \cos y}{\sin^2 y} = \frac{-dy \cot y}{\sin y}.$$

99. On trouverait les mêmes formules d'une autre manière, en supposant que l'arc AB désigné par z, a pour cosinus $x = \text{CD}$, pour sinus $y = \text{BD}$, et 1 pour rayon.

Car on aurait d'abord

$$y = \sqrt{(1 - x^2)},$$

ce qui donnerait

$$dy = d \sin z = x \cdot \frac{-dx}{\sqrt{(1 - x^2)}};$$

Or

$$x = \cos z, \text{ et } \frac{-dx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = dz,$$

comme on le prouverait aisément par deux triangles semblables ; donc

$$d \sin z = dz \cos z.$$

Digitized by Google

On aurait ensuite

$$\cos AB = x = \sqrt{(1-y^2)},$$

d'où on tirerait dx, ou

$$d\cos z = -y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = -\sin z dz.$$

D'où on pourrait déjà conclure que $d\frac{\sin z}{\cos z}$, ou $d\,\text{tang}\,z = \frac{dz}{\cos^2 z}$. Mais cette formule peut se trouver d'une autre manière.

Soit $AT = \text{tang}\,z = t$ on aura

$$t : 1 :: y : \sqrt{(1-y^2)};$$

et parconséquent

$$t = \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}};$$

donc

$$dt = \frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} \times \frac{1}{(1-y^2)} = \frac{dz}{\cos^2 z}.$$

D'où il suit que $d\left(\frac{1}{t}\right)$, ou $-\frac{dt}{t^2}$, ou.....

$d\cot z = -\frac{dy}{y^2\sqrt{(1-y^2)}} = -\frac{1}{y^2} \times \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{-dz}{\sin^2 z}$, comme ci-dessus.

Ces règles suffisent pour trouver les différences premières, secondes, etc. de toute quantité dans laquelle entrent des sinus, des cosinus, etc. Voici quelques exemples.

$d(\sin x)^m = m(\sin x)^{m-1}dx\cos x = m\sin x^m dx\cot x$
$dd(\sin x) = ddx\cos x - dx^2\sin x.$
$dd(\cos x) = d(-dx\sin x) = -ddx\sin x - dx^2\cos x.$
$d(\sin mx) = mdx\cos mx \ldots d\cos mx = -mdx\sin mx.$
$d(\sin x\cos x) = dx\cos^2 x - dx\sin^2 x = dx\cos 2x.$

Puisque $\sqrt{\frac{(1+\cos x)}{2}} = \cos\frac{1}{2}x$, on a donc

$$d\sqrt{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)} = d\cos\tfrac{1}{2}x = -\tfrac{1}{2}dx\sin\tfrac{1}{2}x.$$

On trouvera de même que

$$d(\cos lx) = -dlx\sin lx = -\frac{dx}{x}\sin lx;$$

et que

$$d(x\sin x) = dx\sin x + xdx\cos x.$$

802. Si x est un arc quelconque, sa différentielle

$$dx = \frac{d\sin x}{\cos x} = \frac{-d\cos x}{\sin x} = \cos^2 x d\,\text{tang}\,x = \frac{d\,\text{tang}\,x}{\text{séc}^2 x} = \frac{d\,\text{tang}\,x}{1+\text{tang}^2 x}$$
$$= -d\cot x\sin^2 x = \frac{-d\cot x}{\text{coséc}^2 x} = \frac{-d\cot x}{1+\cot^2 x}, \text{ etc. etc.}$$

FIG.

Applications du calcul différentiel à la théorie des courbes.

803. De tous les problêmes que l'on peut proposer sur une courbe, le plus simple est celui qui a pour objet de mener une tangente à l'un quelconque de ses points. Commençons donc par rappeler la solution
185. qui en a été donnée (777).

Soit la courbe AM, son axe AP, ses coordonnées AP et PM; il est clair que pour mener la tangente au point M, il suffit de déterminer la soutangente PT.

Imaginons donc l'arc infiniment petit Mm, les deux ordonnées infiniment proches MP, mp, et supposons Mr parallèle à Pp. Soit à l'ordinaire AP$=x$, PM$=y$, et nous aurons Pp ou M$r=dx$, $mr=dy$, et PT $=\frac{ydx}{dy}$. Il n'y aura donc plus qu'à différentier l'équation de la courbe, afin d'en tirer la valeur de $\frac{dx}{dy}$, que l'on substituera dans la formule des soutangentes, et PT sera déterminée.

804. L'expression de la tangente MT est $\sqrt{\left(y^2+\frac{y^2dx^2}{dy^2}\right)}$, ou $\frac{y}{dy}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, celle de la sounormale PN est $\frac{y^2}{\text{PT}}$, ou $\frac{ydy}{dx}$; la normale MN $=\frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$; et si on mène par le point A la ligne AQ parallèle à MP, on aura

$$\frac{ydx}{dy}:\frac{ydx}{dy}-x \text{ ou AT} :: y : \text{AQ} = y-\frac{xdy}{dx}.$$

Ces valeurs de AQ et de AT serviront à trouver les asymptotes de la courbe AM, lorsqu'elle en aura : car si après avoir substitué dans ces deux valeurs celle de $\frac{dy}{dx}$ tirée de l'équation même de la courbe, on suppose x infinie, il y aura autant d'asymptotes que de valeurs différentes des lignes AQ et AT. Quant à la position des asymptotes, elle sera toujours déterminée par les points T et Q. Appliquons maintenant ces formules à quelques exemples.

On sait que l'équation au cercle est $y^2=a^2-x^2$; donc

$$ydy=-xdx, \text{ et } \frac{ydx}{dy}=\frac{-y^2}{x}=-\frac{(a^2-x^2)}{x}=\text{PT}.$$

Le signe — indique que la soutangente doit être prise dans le même sens que l'abscisse, parceque dans la construction de la formule on l'a prise en sens contraire. Si on eût compté les abscisses du sommet, l'équation $y^2=2ax-xx$ eût donné un résultat positif comme la formule.

Par

Par l'équation $y^2 = a^2 - x^2$, on trouve $\frac{ydy}{dx}$, ou la sounormale FIG.
$= -x$, et la normale $\sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2}\right)} = \sqrt{(x^2+y^2)} = a =$ le rayon, comme cela doit être.

Dans la parabole, $y^2 = px$; donc

$$\frac{ydy}{dx} = \tfrac{1}{2}p, \text{ et } \frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = 2x.$$

Dans l'ellipse, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; donc

$$ydy = \frac{b^2}{a^2}(-xdx), \text{ et } \frac{ydy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2};$$

ensuite
$$\frac{ydx}{dy} = \frac{-a^2y^2}{b^2x} = \frac{-(a^2-x^2)}{x}.$$

Dans l'hyperbole, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + xx)$; donc

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \times (a+x), \text{ et } \frac{ydx}{dy} = \frac{a^2y^2}{b^2(a+x)} = \frac{2ax+xx}{a+x}.$$

On a aussi $AT = \frac{ax}{a+x}$, expression qui est réduite à la seule 185.
quantité a, quand on suppose x infinie. Dans la même supposition on trouve que $AQ = y - \frac{xdy}{dx} = y - \frac{b^2x}{a^2y}(a+x) = \frac{a^2y^2 - b^2x(a+x)}{a^2y}$ $= \frac{b^2x}{ay} = b\sqrt{\left(\frac{x}{2a+x}\right)}$ se réduit à b. Ces deux valeurs de AT et de AQ donnent la position des asymptotes, telle que nous l'avons déjà trouvée (695).

805. Soit $y^m = x^n a^{m-n}$, on aura $nlx + (m-n)\,la = mly$, $\frac{ndx}{x} = \frac{mdy}{y}$, et la soutangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{m}{n}x$. Toutes les courbes représentées par l'équation générale $y^m = x^n a^{m-n}$, sont nommées paraboles, lorsque m et n sont positives. Si $m = 2$, et $n = 1$, on a $yy = ax$, équation à la parabole ordinaire ou appollonienne, comme l'appellent quelques auteurs, du nom d'Appollonius, ancien géomètre, dont on a un Traité sur les sections coniques. Si $m = 3$, et $n = 1$, l'équation est $y^3 = a^2x$, et la courbe qui en résulte est la première parabole cubique, à cause de $n = 1$. Si $m = 3$, et $n = 2$, c'est alors la seconde parabole cubique, dont l'équation est $y^3 = ax^2$. Voyez les fig. 129 et 130.

806. Si n est négative, les paraboles se changent en hyperboles dont l'équation est $x^n y^m = a^{m+n}$; la soutangente de ces courbes est donc généralement $-\frac{m}{n}x$, c'est-à-dire, qu'elle doit être prise dans

rie. le même sens que les x. Et si $m = n = 1$, on a l'hyperbole ordinaire dont la soutangente $= -x$ (699).

Dans la logarithmique, on a

$$x = A \log y, \text{ et } dx = \frac{Ady}{y}.$$

Donc

$$\frac{ydx}{dy} = A;$$

sa soutangente est donc toujours égale au module (730).

159. 807. Soit maintenant une courbe quelconque BIOC avec une autre courbe BMA, telle que si on prolonge les ordonnées OP de la première jusqu'à la rencontre de la seconde, la ligne MO soit une fonction quelconque de l'arc BIO; il s'agit de mener par le point donné M la tangente MT.

Concevons l'ordonnée mp infiniment proche de MP, et Mr parallèle à la tangente au point O; si on fait BIO $= z$, MO $= u$, on aura

$$mr = du, \; rM = Oo = dz, \text{ et } du : dz :: u : OT = \frac{udz}{du}.$$

Or u étant une fonction de z, on aura $\frac{dz}{du}$ en prenant les différentielles : ainsi TO, ou le point T sera déterminé; d'où il est facile de mener la tangente MT.

Supposons, par exemple, $u = \frac{b}{a} z$, on aura

$$du = \frac{bdz}{a}, \text{ et } OT = z = BIO.$$

Si BIOC est un arc de cercle, alors AMB est une cycloïde, et cette construction est la même que celle que nous avons déjà donnée.

160. Dans la quadratrice, si on compte les abscisses du centre, on a (737).

$$y = \frac{x}{a} \cot \frac{cx}{a}; \text{ donc } dy = \frac{dx}{a} \cot \frac{cx}{a} - \frac{cxdx}{\sin^2 \frac{cx}{a}},$$

et

$$\frac{xdy}{dx} = \frac{x}{a} \cot \frac{cx}{a} - \frac{cxx}{\sin^2 \frac{cx}{a}}.$$

Mais $-\frac{xdy}{dx} = OT$, comme on peut le prouver par deux triangles semblables, savoir MOT, et le triangle différentiel que l'on imaginera en menant une ordonnée infiniment proche de MP. (Il faut $-dy$, parceque y diminue lorsque x augmente). Donc

$$OT = \frac{cxx}{\sin^2 \frac{cx}{a}} \frac{x}{a} \cot \frac{cx}{a};$$

et en ajoutant de part et d'autre $CO = PM = y = \frac{x}{a} \cot \frac{cx}{a}$, on aura FIG.

$$CT = \frac{cxx}{\sin^2 \frac{cx}{a}} = \frac{c}{aa} CM^2.$$

Lorsque CM = CT ou au point D, on a, comme nous l'avons déjà trouvé, la base $CD = \frac{aa}{c}$, et parconséquent $CT = \frac{CM^2}{CD}$. Il faut donc prendre CT troisième proportionnelle à la base CD et au rayon CM; ce qui donnera le point T par lequel, et par le point M si on mène la ligne MT, elle sera la tangente demandée.

808. Pour mener les tangentes aux spirales, il faut résoudre le problême suivant. Soit décrit un cercle d'un rayon quelconque CA, et soit une courbe CKM telle qu'en menant le rayon CMN, la ligne CM soit une fonction quelconque de l'arc ABN, il s'agit de mener par le point donné M la tangente MT. 161.

On imaginera les deux rayons infiniment proches CMN, C*mn*, et le petit arc M*r* décrit du centre C et du rayon CM, on mènera ensuite CT perpendiculaire à CM.

Cela posé, soit $CM = y$, $ABN = x$, $CA = a$, on aura

$$a : y :: Nn\,(dx) : Mr = \frac{ydx}{a}, \text{ et } rm\,(dy) : \frac{ydx}{a} :: y : CT = \frac{y^2dx}{ady}.$$

Soit, par exemple, $y = \frac{ax}{\pi}$, la courbe CKM sera la spirale d'Archimède, et on aura

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\pi}{a}, \; CT = \frac{y^2\pi}{aa} = \frac{axy}{aa} = \frac{xy}{a} = MQO.$$

Soit la spirale hyperbolique dont l'équation est $xy = ab$, on aura

$$xdy + ydx = 0, \; ydx = -xdy, \; CT = -\frac{xydy}{ady} = -\frac{xy}{a} = -b;$$

ce que nous avons déjà trouvé (746).

809. Dans la spirale logarithmique, où l'angle CMT est constant, on imaginera les rayons infiniment proches CM, C*m*, et décrivant du centre C et d'un rayon quelconque CN un cercle, on fera $CM = z$, $CN = a$, et marquant sur la circonférence du cercle un point fixe A, on supposera l'abscisse $AN = x$; ce qui donnera la proportion $a : dx :: z : Mr = \frac{zdx}{a}$. 164.

Soit $t = \text{tang } Mmr$, on aura

$$t = \frac{zdx}{adz}, \text{ ou } \frac{dx}{at} = \frac{dz}{z} = d\,(lz);$$

FIG. donc $lz = \frac{x}{at}$, ou $\frac{x}{at}$ + une constante C, parceque la différentielle de l'équation $lz = \frac{x}{at}$ est la même que celle de $lz = \frac{x}{at} + C$.

Or cette équation $lz = \frac{x}{at} + C$, fait voir, 1°. que la spirale fait une infinité de révolutions autour de son centre, tant pour s'en approcher que pour s'en éloigner; car au lieu de x on peut substituer successivement $x + \pi$, $x + 2\pi$, $x + 3\pi$, etc. $-\pi + x$, $-2\pi + x$, etc. π étant la circonférence ANB.

2°. Que si on fait $C = lC'$, on aura

$$l\frac{z}{C'} = \frac{x}{at} = \frac{x}{at}le, \text{ ou } \frac{z}{C'} = e^{\frac{x}{at}}, \text{ et } z = C'e^{\frac{x}{at}};$$

donc au point A où $x = 0$; on a $CD = C'$.

3°. Que les abscisses AN croissant en progression arithmétique, x, $2x$, $3x$, etc., les ordonnées forment la progression géométrique $C'e^{\frac{x}{at}}$, $C'e^{\frac{2x}{at}}$, $C'e^{\frac{3x}{at}}$, etc.

4°. Que si $t = \infty$, on a $z = C'$, propriété du cercle qui coupe à angles droits tous ses rayons, comme on le sait déjà.

Ces exemples suffisent pour mener les tangentes de toute sorte de courbes, soit mécaniques, soit géométriques. Au reste, on peut voir cette matière traitée plus en détail dans l'Analyse des infiniment petits du marquis de l'Hôpital.

Des Développées.

186. 810. Imaginons un fil ABC appliqué sur une courbe quelconque BC dont l'origine est en B, et dont AB est tangente en ce point; si on développe ce fil en le tenant toujours également tendu, son extrémité A décrira une courbe AM, qui aura les propriétés suivantes.

1°. La tangente MC de la courbe BC sera toujours perpendiculaire à la courbe AM; 2°. la longueur de cette ligne sera égale à la ligne AB + à l'arc BC; 3°. l'arc infiniment petit Mm pourra être regardé comme un arc de cercle décrit du centre C et du rayon CM; 4°. le point C sera le point de réunion de deux normales infiniment proches MN, mn.

811. La courbe BC se nomme la *Développée* de la courbe AM; la ligne MC est le rayon de la développée; on l'appelle aussi *rayon osculateur*, *rayon de courbure*.

Cela posé, on demande comment on pourrait déterminer pour chaque point M le rayon MC de la développée BC de la courbe AM que l'on suppose connue.

Soient MP, mp deux perpendiculaires à l'axe AQ infiniment proches, et CO, rM parallèles au même axe; si on appelle MQ, u...

AP, x... PM, y... Mm ou $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, ds, on aura FIG. 186.

$$dx : ds :: u : \mathrm{MC} = \frac{uds}{dx}.$$

Mais pendant que AP, PM et MO varient, MC devenant mC ne varie point; ainsi l'équation $\mathrm{MC} = \frac{uds}{dx}$ étant différentiée, on aura

$$(udds + dsdu)\,dx = udsddx;$$

et puisque $du = mr = dy$, on trouvera que

$$u = \frac{dsdxdy}{dsddx - dxdds};$$

et que parconséquent

$$\mathrm{MC} = \frac{ds^2dy}{dsddx - dxdds} = \frac{ds^3dy}{ds^2ddx - dx\,(dxddx + dyddy)}$$
$$= \frac{ds^3}{dyddx - dxddy} = \frac{ds^3}{-dx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}.$$

Supposons maintenant, pour abréger, qu'une de ces différentielles soit constante, l'élément ds de la courbe, par exemple, et nous aurons

$$\mathrm{MC} = \frac{dsdy}{ddx} = \frac{dy\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{ddx}.$$

Si on eût supposé dy constante, on eût eu $dsdds = dxddx$; d'où $dds = \frac{dxddx}{ds}$, ce qui donne

$$\mathrm{MC} = \frac{dyds^3}{(ds^2 - dx^2)\,ddx} = \frac{ds^3}{dyddx} = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx}.$$

Mais si on suppose, comme on le fait ordinairement, que dx soit constante, alors

$$\mathrm{MC} = \frac{ds^2dy}{-dxdds} = \frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}.$$

812. Comme les courbures des cercles sont en raison inverse de leurs rayons, on en déduit qu'en deux points différens d'une courbe quelconque, les courbures sont en raison inverse des rayons de la développée. Ainsi pour savoir en quels points la courbe a une plus grande courbure, il faut chercher le *minimum* du rayon de la développée.

Si la tangente en A est perpendiculaire à l'axe, alors pour déterminer la ligne droite BA, ou la distance du sommet A à l'origine B de la développée, il faudra faire $x = 0$ dans l'expression du rayon MC, et on aura la valeur de BA. Enfin pour trouver l'équation de la

110. développée, menons CQ perpendiculaire à l'axe, et nommons AB, a... BQ, t...CQ, z; nous aurons d'abord, en supposant dx constante,

$$\mathrm{MO} = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}, \text{ et } z = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} - y.$$

Ensuite

$$dx : dy :: \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} : \mathrm{CO} = \mathrm{PQ} = \frac{dy\,(dx^2 + dy^2)}{-dxddy}.$$

Donc

$$\mathrm{AP} + \mathrm{PQ} - \mathrm{AB} = t = x - a + \frac{dy\,(dx^2 + dy^2)}{-dxddy},$$

valeurs qui suffisent, avec l'équation de la courbe, pour déterminer l'équation de la développée.

813. Jusqu'ici nous avons supposé les ordonnées parallèles entre elles. Si elles partaient d'un même point B, voici comment on déterminerait le rayon MC.

187. J'imagine deux ordonnées infiniment proches BM, Bm, et CO, Co perpendiculaires à ces ordonnées; je décris ensuite du centre B l'arc Mr. Cela posé, soit BM $= y$, M$r = dx$; $mr = dy$, M$m = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, MO $= u$; à cause des triangles semblables Mrm, CMO, on a

$$dx : u :: dy : \mathrm{CO} = \frac{udy}{dx} :: ds : \mathrm{MC} = \frac{uds}{dx}.$$

Différentiant cette dernière équation (en supposant dx constante) on a

$$du = -\frac{udds}{ds},$$

et la différentielle de CO qui est

$$\mathrm{C}o - \mathrm{CO} = -\mathrm{OQ} = \frac{dudy + uddy}{dx} = \frac{uddy - \frac{udydds}{ds}}{dx}$$
$$= \frac{uddy}{dx} - \frac{udy^2ddy}{ds^2dx} = \frac{udxddy}{ds^2}.$$

Donc

$$\mathrm{OQ} = -\frac{udxddy}{ds^2}, \text{ et } y : dx :: y - u : \frac{-udxddy}{ds^2}.$$

D'où l'on tire

$$u = \frac{yds^2}{ds^2 - yddy}, \text{ et } \mathrm{MC} = \frac{yds^3}{ds^2dx - ydxddy} = \frac{y\,(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy},$$

qui se réduit à $\frac{ds^3}{-dxddy}$ lorsque $y = \infty$, ou lorsque les ordonnées sont parallèles, comme nous l'avons déjà trouvé. Passons maintenant à quelques exemples.

L'équation à l'ellipse et à l'hyperbole, lorsqu'on compte les

abscisses du sommet, est généralement exprimé par $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$; FIG.
où il est clair que si $a = \infty$, on a $yy = px$; équation à la parabole, qui n'est parconséquent qu'une ellipse ou une hyperbole dont le grand axe est infini. Ainsi l'équation $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$ est générale pour toutes les sections coniques. Elle peut donc servir à trouver leur rayon de courbure.

814. Observons d'abord que $\frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, étant égale à la normale (804), si on le nomme n, le rayon de la développée, en supposant dx constante, sera exprimé par $\frac{n^3 dx^2}{-y^3 ddy}$; et puisque dans cet exemple, $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$, on a

$$2ydy = pdx \pm \frac{pxdx}{a} \ldots . 2yddy + 2dy^2 = \pm \frac{pdx^2}{a};$$

$$y^3 ddy = \pm \frac{p}{2a} y^2 dx^2 - y^2 dy^2$$

$$= dx^2 \left[\pm \frac{p}{2a} \left(px \pm \frac{pxx}{2a} \right) - \left(\frac{p}{2} \pm \frac{px}{2a} \right)^2 \right] = -\frac{p^2}{4} dx^2.$$

Donc le rayon de la développée pour toutes les sections coniques $= \frac{n^3}{\frac{1}{4}pp}$, c'est-à-dire, qu'il est égal au cube de la normale divisée par le quart du quarré du paramètre. D'où il suit que dans le cercle où $n = \frac{1}{2}p$, le rayon de la développée est toujours égal à la normale, ce qui est évident. Quant à la développée du cercle, on voit bien qu'elle n'est autre chose que le point même qui sert de centre au cercle.

815. On a

$$n = \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left[px \pm \frac{pxx}{2a} + \frac{pp}{4}\left(1 \pm \frac{2x}{a} + \frac{xx}{aa}\right)\right]};$$

et au sommet, lorsque $x = 0$, $n = \frac{1}{2}p$, et le rayon de la développée, ou la droite $AB = \frac{1}{2}p$. Dans l'ellipse, la développée a 188.
quatre branches BD, Db, bd, Bd égales, et faisant entre elles quatre points de rebroussement. La distance $CB = Cb = a - \frac{1}{2}p$, et $ED = ed =$ la moitié du paramètre du petit axe.

Dans la parabole, le rayon $MC = \frac{MN^3}{\frac{1}{4}pp} = NT \times \frac{MN}{PN}$, et parcon- 189.
séquent CO ou $PQ = NT = 2x + \frac{1}{2}p$; donc $AQ = 3x + \frac{1}{2}p = 3x + AB$, et parconséquent $BQ = 3x$; ce qui donne une construction bien simple pour déterminer le point C, ou le centre du cercle osculateur; prenez $BQ = 3AP$ et menez CQ perpendiculaire à AQ, le point de concours C des deux lignes MC, CQ sera le centre du cercle cherché.

FIG. Pour trouver l'équation de la développée, soit $BQ = z$, $CQ = u$; on aura

$$x = \tfrac{1}{3} z, \text{ et } \tfrac{1}{2} p : y :: QN : CQ :: 2x : u = \frac{4xy}{p} = \frac{4x\sqrt{px}}{p}.$$

Donc

$$\frac{pu^2}{16} = x^3 = \tfrac{1}{27} z^3 \text{ et } z^3 = \tfrac{27}{16} pu^2;$$

ce qui fait voir que la développée de la parabole ordinaire est une seconde parabole cubique, dont le paramètre est les $\frac{27}{16}$ de celui de la parabole donnée.

Par la nature des développées $AB + BC = MC$. Donc

$$BC = MC - \tfrac{1}{2} p = \frac{MN^3}{\frac{1}{4} pp} - \tfrac{1}{2} p:$$

or

$$MN = \sqrt{(px + \tfrac{1}{4} pp)} = \sqrt{(\tfrac{1}{3} pz + \tfrac{1}{4} pp)}.$$

On a donc, en faisant $\frac{27}{16} p = a$,

$$BC = \tfrac{8}{27} a \left[\left(1 + \frac{9z}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right],$$

expression d'un arc quelconque de la seconde parabole cubique dont l'équation est $z^3 = au^2$.

190. 816. Soit la cycloïde $AMBa$, son cercle générateur $BODO'$, l'ordonnée MOP perpendiculaire à BD. Si on fait $BP = x$, $PM = y$, $BD = 2a$, on aura

$$y = BO + \sqrt{(2ax - xx)};$$

or la différentielle de l'arc BO est

$$\frac{ad\,(\sin BO)}{\cos BO} = \frac{a}{a-x}\, d\sqrt{(2ax - xx)} = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}.$$

Donc

$$dy = \frac{(2a - x)\,dx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = dx\sqrt{\left(\frac{2a - x}{x}\right)} = \frac{dx}{x}\sqrt{(2ax - xx)},$$

équation différentielle de la cycloïde.

Cela posé, pour trouver le rayon MC de la développée, supposons dx constante, et nous aurons en différentiant,

$$ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{(2ax - xx)}}, \quad dx^2 + dy^2 = \frac{2adx^2}{x}.$$

Donc le rayon

$$MC = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy} = 2\sqrt{2a\,(2a - x)} = 2OD;$$

or MNC est parallèle à OD, puisque (733) la tangente MT est parallèle à OB. Donc $OD = MN = NC$.

Il suit de là, 1°. que le rayon de la développée au point A est nul; FIG. et que parconséquent la développée passe par ce point; 2°. que le rayon de la développée au point B est la ligne BE double de BD.

817. Pour déterminer la développée ACE, achevons le rectangle AE, et sur le côté $AB' = DE = BD$, comme diamètre, décrivons un demi-cercle $AQ'B'$, menons AQ' parallèle à CM, et joignons C et Q'; cela posé, l'angle $NAQ' = NDO$. Donc $OD = AQ'$, et l'arc OID ou la droite $AN =$ l'arc ALQ'. Or $OD = CN$. Donc $CN = AQ'$, et parconséquent $CQ' = AN =$ l'arc ALQ'; propriété distinctive de la cycloïde ordinaire; d'où il suit que la développée ACE est une demi-cycloïde égale à celle que l'on avait déjà, AMB. Elle n'en diffère que par sa position. On aurait trouvé la même chose, en cherchant directement l'équation de la développée, par ce qui a été dit (812).

L'arc $AC = MC = 2AQ'$; donc un arc quelconque de cycloïde est double de la corde correspondante du cercle générateur. Ainsi $MB = 2OB$, $AMB = 2BD$, et la cycloïde entière ABa est quadruple du diamètre BD.

818. Soit la spirale logarithmique ADM dont le centre est A, 191. on aura

$$\cot MmA = \frac{mr}{Mr} = \frac{dy}{dx};$$

et en différentiant (dx étant supposée constante), on aura

$$ddy = 0;$$

et le rayon de la développée $MC = \frac{y(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx(dx^2+dy^2) - ydxddy}$ se réduit à $\frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Donc si l'on mène AC perpendiculaire à MA et MC perpendiculaire à la tangente en M, leur point de concours C sera sur la développée; car les triangles semblables Mrm et MAC donnent

$$Mm : Mr :: MC : MA,$$

c'est-à-dire ds, ou

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} : dx :: MC : y; \text{ donc } MC = \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+dy^2)}.$$

819. L'angle $ACM = 90° - AMC = AMT$; d'où il suit que la développée ABC est la même spirale logarithmique ADM; elle est seulement disposée d'une manière différente. Il suit de là que la tangente MC est égale en longueur à la spirale ABC, quoique celle-ci fasse une infinité de révolutions autour du point A. Donc aussi, si l'on mène AT perpendiculaire à AM, on aura $MT =$ l'arc ADM. La spirale logarithmique et la cycloïde sont donc elles-mêmes leurs développées.

FIG.

Des points d'inflexion, et de la méthode de maximis *et* minimis.

192. 820. Si une courbe AMO de convexe qu'elle était, devient concave, le point M où ce changement arrive, est ce que l'on appelle un *point d'inflexion.*

Pour déterminer ces sortes de points, on peut regarder la tangente en M comme etant tout-à-la-fois tangente des deux parties MA, MO; et dans cette supposition on peut imaginer de part et d'autre du point M deux élémens Mm, Mm' en ligne droite; d'où il suit que le rayon de la développée au point M doit alors être infini. Mais comme ces élémens peuvent être supposés décroître de plus en plus, de manière à s'évanouir tous deux, le rayon de la développée doit alors se réduire à zéro.

821. Donc au point d'inflexion, le rayon de la développée est toujours infini ou nul. Donc, en supposant dx constante, on aura toujours

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}, \text{ ou } \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{-ddy}{dx^2}}=\infty \text{ ou } 0;$$

et parconséquent

$$\frac{-ddy}{dx^2}=0, \text{ ou } \infty.$$

On différentiera donc deux fois l'équation de la courbe, en supposant dx constante, et on aura la valeur finie de $\frac{-dyy}{dx^2}$ que l'on égalera à zéro ou à l'infini. Au moyen de cette équation et de celle de la courbe, on déterminera les valeurs de x et de y qui conviennent au point d'inflexion, ou aux points d'inflexion, s'il y en a plusieurs.

822. Lorsque les ordonnées partent d'un point fixe, alors on a

$$\frac{dx^2+dy^2-yddy}{dx^2}=0 \text{ ou } =\infty.$$

EXEMPLE I. Soit la première parabole cubique dont l'équation est $y^3=a^2x$, on aura

$$y=x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}\ldots dy=\tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx\times a^{\frac{2}{3}};$$

193. $$ddy=-\tfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}dx^2a^{\frac{2}{3}}\ldots \frac{ddy}{dx^2}=-\tfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\sqrt[3]{aa}=0$$

au point d'inflexion; on a donc $x=0$. Ainsi le point d'inflexion est à l'origine.

EXEMPLE II. Soit la conchoïde de Nicomède, dont l'équation est FIG. 193.

$$y = \frac{b+x}{x} \sqrt{(aa - xx)};$$

on a en différentiant

$$dy = \frac{-dx(aab + x^3)}{xx\sqrt{(aa - xx)}};$$

différentiant de nouveau, en supposant dx constante, on a

$$-\frac{ddy}{dx^2} = \frac{a^2x^3 + 3a^2bx^2 - 2a^4b}{(a^2x^3 - x^5)\sqrt{(aa - xx)}} = 0$$

au point d'inflexion. Donc

$$x^3 + 3bx^2 - 2a^2b = 0,$$

équation qui étant résolue (338) donnera pour x la valeur qui convient au point d'inflexion.

EXEMPLE III. Soit une courbe qui ait pour équation

$$y - a = (x - a)^{\frac{3}{5}},$$

il s'agit de trouver les valeurs de x et de y qui répondent au point d'inflexion, au cas qu'il doive y en avoir.

En différentiant deux fois de suite, on a

$$-\frac{ddy}{dx^2} = \frac{6}{25(x-a)^{\frac{7}{5}}},$$

qui étant égalée à zéro, ne fait rien connaître; il faut donc l'égaler à l'infini, et on a

$$x = a = y;$$

valeurs qui répondent au point d'inflexion.

823. Si l'ordonnée MP d'une courbe quelconque BM est plus grande ou plus petite que celles qui la précèdent (pm), et que celles qui la suivent ($p'm'$), on lui donne alors le nom de *maximum* ou de *minimum*; et la méthode qui apprend à déterminer ces sortes de quantités, se nomme *la méthode de* maximis *et* minimis.

824. Si CM est le rayon du cercle osculateur au point M, il est clair que l'ordonnée MP doit être plus grande ou plus petite que toute autre ordonnée correspondante à quelque point de l'arc KMD décrit du rayon CM; d'où il suit que l'ordonnée MP (prolongée dans le cas du *minimum*) passe par le centre du cercle osculateur: donc la tangente en M est parallèle à l'axe AP, et parconséquent la soutangente $\frac{ydx}{dy} = \infty$. Donc $\frac{dy}{dx} = 0$.

Or y peut être considérée comme une fonction quelconque de l'abscisse AP (x); d'où il suit que pour savoir dans quels cas une quantité y dépendante de x peut devenir un *maximum* ou un *minimum*, il faut bien différentier l'équation qui exprime leur rapport,

FIG. et égaler à zéro la quantité $\frac{dy}{dx}$. L'équation qui en résultera, combinée avec la première, donnera les valeurs de y et de x dans lesquelles y est un *maximum* ou un *minimum*.

825. Mais pour distinguer lequel de ces deux cas a lieu, il faut observer que le rayon de la développée au point du *maximum* est positif, et qu'il est négatif au point du *minimum*. Or l'expression du rayon osculateur est

$$\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : - \frac{ddy}{dx^2};$$

et comme $\frac{dy}{dx} = 0$, on a

$$CM = \frac{-dx^2}{ddy}.$$

Donc, si y est un *maximum*, $\frac{ddy}{dx^2}$ doit être négatif, et s'il est un *minimum*, $\frac{ddy}{dx^2}$ doit être positif.

S'il arrive que $\frac{ddy}{dx^2}$ soit infini ou nul, alors M sera un point d'inflexion ou de rebroussement, la tangente en M sera parallèle à l'axe; mais il pourra se faire que MP ne soit ni un *maximum* ni un *minimum*. Voyez la Fig. 194.

826. Il peut encore arriver que l'ordonnée PM soit un *maximum*, ou un *minimum*, lorsque la tangente en M est perpendiculaire à l'axe. Or dans ce cas $\frac{ydx}{dy} = 0$, et parconséquent $\frac{dy}{dx} = \infty$: formule qui déterminera ces sortes d'ordonnées. Alors MP peut être tout-à-la-fois un *maximum* et un *minimum* à l'égard des deux
195. branches MB, MB'. Mais ce n'est qu'un cas particulier renfermé dans celui dont nous venons de parler, et dont voici quelques exemples.

827. I. Soit proposé de diviser une droite a en deux parties, telles que leur rectangle soit un *maximum* ou un *minimum*. En nommant x l'une de ces parties, $a - x$ sera l'autre, et on aura $ax - xx$ pour l'expression du *maximum* ou du *minimum*. Soit donc $y = ax - xx$, et on aura

$$\frac{dy}{dx} = a - 2x = 0, \text{ d'où } x = \tfrac{1}{2}a.$$

Pour savoir maintenant si cette solution donne un *maximum* ou un *minimum*, je différentie l'équation $\frac{dy}{dx} = a - 2x$, et j'ai

$$\frac{ddy}{dx^2} = -2,$$

quantité négative ; d'où il suit que la valeur $x = \frac{a}{2}$ donne un *maximum* $y = \frac{1}{4} a^2$. FIG.

En général, si $y = x^m (a - x)^n$, pour que cette quantité soit un *maximum* ou un *minimum*, il faut que

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} (a-x)^n - nx^m (a-x)^{n-1} = 0 = \frac{m}{x} - \frac{n}{a-x}.$$

Alors $x = \frac{am}{m+n}$; et cette valeur donne un *maximum* pour y, parceque $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{m}{xx} - \frac{n}{(a-x)^2}$.

II. Trouver les diamètres conjugués de l'ellipse qui font entre eux le plus petit angle.

Soient m, n ces diamètres, p l'angle qu'ils font entre eux, on aura (684)

$$mn \sin p = ab, \text{ et } m^2 + n^2 = a^2 + b^2.$$

Donc

$$\sin p = \frac{ab}{n(a^2+b^2-n^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ et } \frac{d \sin p}{dn} = \frac{-ab\,(a^2+b^2-2n^2)}{n^2\,(a^2+b^2-n^2)^{\frac{3}{2}}} = 0;$$

donc

$$n = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)}{2}} = m.$$

Ainsi les diamètres conjugués et égaux de l'ellipse sont ceux qui par leur intersection forment le plus petit angle cherché. Le sinus de cet angle est $\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

Soit $\frac{b}{a} = \text{tang } u$, on aura 138.

$$\sin p = \frac{2 \text{ tang } u}{1 + \text{tang}^2 u} = \frac{2 \text{ tang } u}{\text{séc}^2 u} = 2 \sin u . \cos u = \sin 2u;$$

donc l'angle p est égal à celui que forment entre elles les deux lignes menées des deux extrémités du petit axe à une du grand.

III. De toutes les paraboles que l'on peut couper dans le cône droit DCB, déterminer celle qui a le plus de surface.

Soit BD $= a$; CD $= b$, BP $= x$, on aura 196.

$$a : b :: x : \text{AP} = \frac{bx}{a} \ldots . \text{PM} = \sqrt{(ax - xx)};$$

la surface mAMP$m = \frac{4}{3} . \frac{bx}{a} \sqrt{(ax - xx)} = y$; donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} . \frac{b}{a} \sqrt{(ax - xx)} + \frac{4}{3} . \frac{bx}{a} \left(\frac{a}{2} - x\right) : \sqrt{(ax - xx)} = 0$$

$$= ax - xx + x\left(\frac{a}{2} - x\right) = \tfrac{3}{2} ax - 2xx.$$

FIG. 197. D'où

$$x = \tfrac{3}{4}\, a\,,$$

solution qui donne un *maximum*, parceque $\frac{ddv}{dx^2} = -\frac{3}{2}\, a$.

IV. De tous les triangles construits sur la même base AB, et de même périmètre, quel est celui qui a le plus de surface ?

Soit le demi-périmètre $= q$, la base $AB = a$, le côté $AM = x$, MB sera $2q - a - x$. Donc en appelant y la surface, on aura (492)

$$y = \sqrt{[q.q - a.q - x.(a + x - q)]}$$

$$2ly = lq + l(q - a) + l(q - x) + l(a + x - q)$$

$$\frac{2dy}{y} = -\frac{dx}{q - x} + \frac{dx}{a + x - q} \cdots \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left(\frac{1}{a + x - q} - \frac{1}{q - x}\right) = 0.$$

Donc

$$a + x - q = q - x\,,\ 2q - a - x = x\,;$$

et parconséquent le triangle cherché est isoscèle.

828. Il suit de là qu'entre tous les triangles isopérimètres ou de même contour, celui qui a le plus de surface est équilatéral. Car si AMB est le triangle cherché, il est clair qu'il doit avoir plus de surface que tout autre triangle isopérimètre AM'B construit sur la même base AB ; donc AM = MB. On prouvera de même que AM = AB.

829. Jusqu'ici nous n'avons considéré que le *maximum* ou le *minimum* des fonctions d'une seule variable x. Pour trouver dans quels cas une fonction quelconque Y de deux variables x et y devient un *maximum* ou un *minimum*, on peut se servir de la méthode suivante. (Le mot fonction est pris généralement pour toute expression dépendante de la valeur des deux variables).

Supposons que y a déjà la valeur propre à rendre la fonction Y un *maximum* ou un *minimum* ; il ne s'agira donc plus que de trouver la valeur convenable de x, c'est-à-dire qu'il faudra différentier la fonction Y en faisant varier x seule, et égaler le coefficient de dx à zéro. En faisant un raisonnement semblable, on verra que pour avoir y, il faut différentier la fonction Y en faisant varier y seule, et égaler le coefficient de dy à zéro. D'où il suit que si dY est représenté généralement par $Pdx + Qdy$, on doit avoir $P = 0$, $Q = 0$, équations qui donneront les valeurs de x et de y propres à rendre les fonctions Y *maximum* ou *minimum*.

Or il est aisé de voir que ce même raisonnement a lieu quel que soit le nombre des variables dont Y peut représenter une fonction. D'où il suit en général, que pour connaître les valeurs des variables qui rendent la fonction Y *maximum* ou *minimum*, il faut prendre la différentielle totale de Y, et égaler à zéro le coefficient de la différentielle de chaque variable, ce qui donnera autant d'équations que d'inconnues.

Par exemple, soit proposé de diviser le nombre donné a en trois parties dont le produit soit un *maximum*.

En appelant x et y deux de ces parties, la troisième sera exprimée par $a-x-y$, et on aura $xy(a-x-y)$ dont la différentielle $=(a-2x-y)ydx+(a-2y-x)xdy$. Egalant donc séparément à zéro le coefficient de dx et celui de dy, on aura

$$a-2x-y=0=a-2y-x;\ \text{d'où}\ y=x=\tfrac{1}{3}a.$$

Il faut donc diviser le nombre donné en trois parties égales.

Proposons-nous maintenant de trouver entre tous les triangles isopérimètres celui qui a le plus de surface. Nous avons déjà résolu ce problême, mais indirectement.

Soient x, y deux de ses côtés, $2q$ le périmètre, $2q-x-y$ sera l'autre côté, et la surface $\sqrt{[q.q-x.q-y.(x+y-q)]}$ devant être un *maximum*, si on la nomme Y, on aura

$$2lY-lq=l(q-x)+l(q-y)+l(x+y-q).$$

Donc.

$$dY=\frac{Ydx}{2}\left(\frac{1}{x+y-q}-\frac{1}{q-x}\right)+\frac{Ydy}{2}\left(\frac{1}{x+y-q}-\frac{1}{q-y}\right),$$

égalant à zéro le coefficient de dy et celui de dx, on a

$$x+y-q=q-y=q-x;\ \text{d'où}\ x=y=\frac{2q}{3}=2q-x-y.$$

Le triangle cherché est donc équilatéral, comme nous l'avons déjà trouvé.

Pour s'exercer à la résolution de quelques autres problêmes de ce genre, on peut chercher la réponse aux questions suivantes.

I. De tous les quarrés inscrits dans un quarré donné, quel est le plus petit ?

II. De toutes les fractions, quelle est celle qui surpasse sa puissance m de la plus grande quantité possible ?

III. Quel est le nombre x dont la racine x est un *maximum* ?

IV. On voudrait construire une mesure cylindrique d'une capacité donnée, et dont la surface intérieure fût un *minimum*, quel rapport doit-il y avoir entre la hauteur de cette mesure et le diamètre de sa base ?

V. Entre tous les cylindres que l'on peut inscrire dans une même sphère, quel est celui dont la surface convexe est un *maximum* ?

VI. Parmi tous ces cylindres, lequel a le plus de solidité ?

VII. Quelles doivent être les dimensions du plus grand cylindre qu'il soit possible d'inscrire dans un cône donné ?

VIII. De tous les triangles qui ont même base, et qui sont inscrits dans le même cercle, quel est le plus grand ?

IX. Quel serait, au contraire, le plus petit de ceux qui seraient circonscrits au même cercle ?

Des fractions dont le Numérateur et le Dénominateur se réduisent à zéro dans certains cas.

830. On trouve quelquefois des expressions algébriques en forme de fractions, qui se réduisent à $\frac{0}{0}$. Telle est, par exemple, la quantité $\frac{x^2-a^2}{x-a}$, lorsque $x=a$. Or, quoique indéterminés en apparence, ces résultats sont pourtant susceptibles de valeurs déterminées, et voici une méthode pour les trouver.

Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions de x, qui se réduisent l'une et l'autre à o lorsque $x=a$. Pour en trouver la valeur, on substituera $x+dx$ au lieu de x dans P et dans Q, et on aura $\frac{P+dP}{Q+dQ}$: faisant ensuite $x=a$ dans cette fraction, elle se réduira à $\frac{dP}{dQ}$; et ce sera la valeur de la fraction proposée dans la supposition de $x=a+dx$, ou de $x=a$, si toutefois les termes de la fraction $\frac{dP}{dQ}$ ne s'anéantissent pas encore en faisant $x=a$.

Exemple. On demande la valeur de $\frac{x^2-a^2}{x-a}$, lorsque $x=a$? Ici $P=x^2-a^2$, et $Q=x-a$; donc

$$\frac{dP}{dQ}=\frac{2xdx}{dx}=2x=2a,$$

comme cela doit être (783).

Soit la progression géométrique $\div\div x : x^2 : x^3 : \ldots x^n$, dont la somme est $\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$; on demande la valeur de cette somme lorsque $x=1$? On trouvera

$$\frac{dP}{dQ}=(n+1)\,x^n-1=n,$$

ce qui est évident.

Soit la quantité $\frac{\sqrt{(2a^3x-x^4)}-a\sqrt[3]{(a^2x)}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$ qui devient $\frac{0}{0}$, lorsque $x=a$. En prenant les différentielles séparément, on aura

$$\frac{\dfrac{a^3-2x^3}{\sqrt{(2a^3x-x^4)}}-\dfrac{a}{3x}\sqrt{a^2x}}{-\dfrac{3}{4}\sqrt[4]{\dfrac{a}{x}}}=\tfrac{16}{9}\,a,$$

valeur de la quantité proposée.

831.

831. Mais s'il arrive qu'en substituant a au lieu de x dans $\frac{dP}{dQ}$, cette fraction devienne aussi $\frac{0}{0}$, on la traitera de même que la première, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait une valeur dont un des termes au moins soit fini.

Exemple. Si on différentie la même équation $\div\div x : x^2 : x^3 : \ldots$, $x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$, on aura, après avoir divisé par $\frac{dx}{x}$,

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \frac{x + nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2},$$

qui se réduit à $\frac{0}{0}$ lorsque $x = 1$. Ainsi

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1 - x^n(n+1)^2 + n(n+2)x^{1+n}}{-2(1-x)};$$

mais cette nouvelle expression donne encore $\frac{0}{0}$, en substituant 1 à x; il faut donc différentier séparément son numérateur et son dénominateur, et on aura

$$\frac{-nx^{n-1}(n+1)^2 + n \,.\, n+1 \,.\, n+2 \,.\, x^n}{2},$$

qui en faisant $x = 1$, donne

$$\frac{n(n+1)}{2},$$

somme de la progression arithmétique $\div 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$.

Dans la quadratrice,

$$y = \frac{a - x}{a} \text{ tang } \frac{cx}{a};$$

et cette expression se réduit à $\frac{0}{0}$, lorsque $x = a$. Donc

$$y = \frac{-dx}{ad \cot \frac{cx}{a}} = \frac{\sin^2 \frac{cx}{a}}{c} = \frac{aa}{c}.$$

On peut avec ces principes trouver dans chaque cas particulier les valeurs indéterminées de $0 \times \infty$, et de $\infty - \infty$. Car $0 \times \infty$ se réduit à $\frac{0}{0}$, parceque $\infty = \frac{a}{0}$. On y ramène aussi $\infty - \infty$, en supposant que le premier ∞ provient de $\frac{a}{0}$, et le second de $\frac{b}{0}$. Par exemple, si $x = 1$, on a

$$\frac{1}{Lx} - \frac{x}{Lx} = \infty - \infty;$$

qui en différentiant $\frac{1 - x}{Lx}$, se réduit à $-x = -1$.

QUELQUES AUTRES APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

832. Nous avons déjà trouvé des séries qui donnent les valeurs de sin z et de cos z. Le calcul différentiel va nous les faire retrouver.

Supposons $\sin z = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$, et $\cos z = 1 + az + bz^2 + cz^3 + \text{etc.}$; comme le calcul que nous allons faire nous apprendrait que B, D, etc., a, c, etc. sont zéro, faisons tout simplement $\sin z = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + \text{etc.}$, et $\cos z = 1 + az^2 + bz^4 + cz^6 + \text{etc.}$; maintenant, puisque $d(\sin z) = dz \cos z$, et $d(\cos z) = -dz \sin z$, on aura, après avoir divisé par dz, les deux équations suivantes :

$$A + 3Bz^2 + 5Cz^4 + 7Dz^6 + \text{etc.} = 1 + az^2 + bz^4 + cz^6 + \text{etc.}$$
$$A + Bz^2 + Cz^4 + Dz^6 + \text{etc.} = -2a - 4bz^2 - 6cz^4 - 8dz^6 - \text{etc.}$$

D'où l'on tire

$$A = 1,\ a = -\tfrac{1}{2},\ B = \frac{-1}{2.3},\ b = \frac{1}{2.3.4},$$
$$C = \frac{1}{2.3.4.5},\ c = \frac{-1}{2.3.4.5.6},\ \text{etc.}$$

Donc

$$\sin z = z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

et

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

comme nous l'avons déjà vu (562).

833. Cela posé, soit $x = ly$, on aura

$$dx = l\left(1 + \frac{dy}{y}\right) = l(1 + dx) = dxle = le^{dx};$$

donc

$$e^{dx} = 1 + dx,\ \text{et}\ e^x = (1 + dx)^{\frac{x}{dx}}.$$

Soit donc $\frac{x}{dx} = \omega$, la quantité ω sera infiniment grande, et on aura

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\omega}.$$

Développant cette expression, et ayant égard à ce que $\omega - 1$, $\omega - 2$, etc. ne diffèrent pas de ω à cause qu'il est infini, on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \text{etc.} = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\omega},$$

comme on l'aurait déduit de la série déjà trouvée (306), $n = 1 + ln + \frac{l^2 n}{2} + \frac{l^3 n}{2.3} +$ etc., et en faisant $ln = x$.

Substituons successivement $z\sqrt{-1}$ et $-z\sqrt{-1}$ dans la valeur de e^x à la place de x, nous aurons

$$e^{z\sqrt{-1}} = 1 + z\sqrt{-1} - \frac{zz}{2} - \frac{z^3\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

$$e^{-z\sqrt{-1}} = 1 - z\sqrt{-1} - \frac{zz}{2} + \frac{z^3\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

Ajoutant et soustrayant, il vient

$$e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}} = 2\left(1 - \frac{zz}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}\right) = 2\cos z;$$

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} = 2\left(z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.4.5} - \text{etc.}\right) = 2\sin z.$$

Donc

$$\sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \ldots\ldots \cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2},$$

ou

$$\sin z = \frac{\left(1 + \frac{z\sqrt{-1}}{\omega}\right)^{\omega} - \left(1 - \frac{z\sqrt{-1}}{\omega}\right)^{\omega}}{2\sqrt{-1}} \ldots \cos z = \frac{\left(1 + \frac{z\sqrt{-1}}{\omega}\right)^{\omega} + \left(1 - \frac{z\sqrt{-1}}{\omega}\right)^{\omega}}{2}.$$

Et parconséquent

$$\frac{\sin z}{\cos z} = \text{tang}\, z = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{2z\sqrt{-1}} - 1}{e^{2z\sqrt{-1}} + 1}.$$

On a aussi

$$e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1}\sin z,\quad e^{-z\sqrt{-1}} = \cos z - \sqrt{-1}\sin z;$$

d'où l'on tire

$$e^{nz\sqrt{-1}} = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n$$

$$e^{-nz\sqrt{-1}} = (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n \ldots (\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n$$

$$= \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz \ldots \frac{e^{nz\sqrt{-1}} + e^{-nz\sqrt{-1}}}{2}$$

$$= \cos nz = \tfrac{1}{2}(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + \tfrac{1}{2}(\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n$$

$$\frac{e^{nz\sqrt{-1}} - e^{-nz\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Or les valeurs de $e^{z\sqrt{-1}}$, $e^{-z\sqrt{-1}}$ donnent, en prenant les logarithmes,

$$z\sqrt{-1} = l(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) = l\cos z + l(1 + \sqrt{-1}\,\text{tang}\, z) \ldots$$

$$-z\sqrt{-1} = l(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = l\cos z + l(1 - \sqrt{-1}\,\text{tang}\, z);$$

et en soustrayant

$$2z\sqrt{-1} = l\left(\frac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\sin z}\right) = l\left(\frac{1+\sqrt{-1}\tang z}{1-\sqrt{-1}\tang z}\right);$$

d'où l'on déduirait, comme on le sait déjà (567),

$$z = \tang z - \frac{\tang^3 z}{3} + \frac{\tang^5 z}{5} - \text{etc.}$$

834. Avec ces principes, on peut réduire une quantité exponentielle quelconque $a^x =$ en série, lorsque x est réel, et à des sinus lorsqu'il est imaginaire. Car si on fait $a^x = e^z$, on aura

$$xla = z, \text{ et } a^x = e^z = 1 + xla + \frac{x^2 l^2 a}{2} + \frac{x^3 l^3 a}{2.3} + \text{etc.}$$

Supposant ensuite qu'on ait $a^{x\sqrt{-1}}$, on fera $e^{z\sqrt{-1}} = a^{x\sqrt{-1}}$; d'où l'on déduira encore

$$z = xla, \text{ et } a^{x\sqrt{-1}} = \cos(xla) + \sqrt{-1}\sin(xla).$$

Reprenons l'équation

$$\pm z\sqrt{-1} = l\cos z + l(1 \pm \sqrt{-1}\tang z) = l(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z),$$

et en supposant la demi-circonférence 3.1415 etc. $= \pi$, si on fait $z = (2k+1)\pi$, k étant un nombre entier quelconque, on aura

$$\sin z = 0, \text{ et } \cos z = -1;$$

donc

$$\pm(2k+1)\pi\sqrt{-1} = l - 1.$$

Ainsi le logarithme de -1 a une infinité de valeurs toutes imaginaires; ce qui ne doit pas paraître plus étonnant que la multiplicité des racines dans une équation algébrique, et que l'infinité d'arcs différens qui répondent à un même sinus.

835. On peut remarquer en passant, que les logarithmes des quantités positives ont aussi une infinité de valeurs dont une seule est réelle. Il n'y a pourtant que celle-ci dont on fasse usage dans le calcul : on néglige les autres.

Pour s'assurer que ces logarithmes ont réellement un nombre infini de valeurs, on n'a qu'à supposer $z = 2k\pi$ dans la formule

$$l(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z) = \pm z\sqrt{-1},$$

il en résultera

$$l1 = \pm 2k\pi\sqrt{-1}.$$

Donc le logarithme de $+1$ a une infinité de valeurs imaginaires, et une seule réelle, savoir zéro, que l'on obtiendra en faisant $k = 0$.

836. Il est facile par ce qui précède, 1°. de réduire des logarithmes de quantités imaginaires à des sinus ou cosinus d'arcs réels; 2°. de trouver une expression simple des logarithmes des nombres négatifs, s'il en était jamais besoin.

En effet, soit d'abord $l(a + b\sqrt{-1})$ qui peut représenter le lo-

garithme d'une quantité quelconque imaginaire, on fera $\frac{b}{a} = \text{tang}\, u$, u étant un arc réel déterminé par cette valeur. On aura donc

$$l(a+b\sqrt{-1}) = la + l(1+\sqrt{-1}\,\text{tang}\, u) = la - l\cos u + u\sqrt{-1}.$$

Mais

$$\cos u = \frac{\sin u}{\text{tang}\, u} = \sqrt{1-\cos^2 u} \times \frac{a}{b}.$$

Donc

$$\cos u = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

et

$$l(a+b\sqrt{-1}) = l\sqrt{(a^2+b^2)} + u\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}l(a^2+b^2) + u\sqrt{-1}.$$

Soit maintenant $l-a$; puisqu'on a $l-a = la + l-1$, et que $l-1 = (2k+1)\pi\sqrt{-1}$, on en déduit

$$l-a = la + (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Donc encore une fois les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires. Mais comme leur expression est assez simple, quoiqu'elle dépende de la circonférence du cercle, on peut les traiter dans le calcul aussi facilement que les logarithmes des nombres positifs.

837. Reprenons maintenant les deux équations

$$\sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},\quad \cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2},$$

et faisons $z = \frac{(2i+1)\pi}{m}$, i étant un nombre entier quelconque, nous aurons

$$\sin\frac{(2i+1)\pi}{m} = \frac{e^{\frac{2i+1}{m}\pi\sqrt{-1}} - e^{-\frac{2i+1}{m}\pi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\cos\frac{(2i+1)\pi}{m} = \frac{e^{\frac{2i+1}{m}\pi\sqrt{-1}} + e^{-\frac{2i+1}{m}\pi\sqrt{-1}}}{2}.$$

Puisqu'on a $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$, on aura

$$e^{(2i+1)\pi\sqrt{-1}} = -1,$$

et parconséquent

$$e^{\frac{2i+1}{m}\pi\sqrt{-1}} = \sqrt[m]{-1};$$

donc

$$\sin\frac{(2i+1)\pi}{m} = \frac{\sqrt[m]{-1} - \frac{1}{\sqrt[m]{-1}}}{2\sqrt{-1}},\ \text{et}\ \cos\frac{(2i+1)\pi}{m} = \frac{\sqrt[m]{-1} + \frac{1}{\sqrt[m]{-1}}}{2}.$$

Soit $\sqrt[m]{-1} = x$, on aura

$$x^m + 1 = 0, \text{ et } \sin\frac{2i+1}{m}\pi = \frac{xx-1}{2x\sqrt{-1}}; \cos\frac{2i+1}{m}\pi = \frac{xx+1}{2x}.$$

On substituera donc à x toutes les racines de l'équation $x^m + 1 = 0$, et on aura les valeurs de $\sin\frac{2i+1}{m}\pi$, et de $\cos\frac{2i+1}{m}\pi$.

Par exemple, si $m = 3$, on a $x = -1$, $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, et les trois valeurs de $\sin\frac{2i+1}{3}\pi = \sin(2i-1)60°$ sont 0, $+\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, quel que soit le nombre entier que l'on prenne pour i. On trouvera de même que les trois valeurs $\cos(2i+1)60°$ sont -1, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$. Il est aisé de vérifier tout cela.

838. Puisqu'on a $\cos\frac{(2i+1)\pi}{m} = \frac{xx+1}{2x}$, il est clair que $xx - 2x\cos\frac{(2i+1)\pi}{m} + 1 = 0$ est un facteur de l'équation $x^m + 1 = 0$, et parconséquent que $xx - 2ax\cos\frac{(2i+1)\pi}{m} + aa = 0$ est un facteur du second degré de l'équation $x^m + a^m = 0$. Ensorte que si on substitue à i tous les nombres entiers possibles, on aura tous les facteurs du second degré de $x^m + a^m = 0$. Il ne pourra donc y en avoir qu'un certain nombre. Aussi retrouvera-t-on les mêmes facteurs lorsque $2i + 1$ sera plus grand que m. Par exemple, si on demande les facteurs du second degré de l'équation $x^5 + a^5 = 0$, le facteur général sera dans ce cas

$$xx - 2ax\cos\frac{(2i+1)\pi}{5} + aa = 0.$$

Faisons $i = 0$, nous aurons pour premier facteur

$$xx - 2ax\cos\tfrac{1}{5}\pi + aa = 0.$$

Soit $i = 1$, le facteur sera

$$xx - 2ax\cos\tfrac{3}{5}\pi + aa = 0.$$

Soit $i = 2$, on aura

$$\cos\frac{2i+1}{5}\pi = -1,$$

et le facteur sera

$$xx + 2ax + aa = 0, \text{ ou } x + a = 0.$$

Donc les facteurs de l'équation proposée sont

$$x + a = 0 \ldots xx - 2ax\cos\tfrac{1}{5}\pi + aa = 0 \ldots xx - 2ax\cos\tfrac{3}{5}\pi + aa = 0,$$

et par le moyen du cercle, connaissant $\cos\frac{1}{5}\pi$, $\cos\frac{3}{5}\pi$, l'équation proposée sera résolue.

839. Pour trouver de la même manière les facteurs de $x^m - a^m = 0$,

je reprends l'équation

$$2\cos z = e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}},$$

et je fais $z = \frac{2k\pi}{m}$, k étant un nombre entier, ce qui donne

$$2\cos\frac{2k\pi}{m} = e^{\frac{2k}{m}\pi\sqrt{-1}} + e^{-\frac{2k}{m}\pi\sqrt{-1}}.$$

Or $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$, donc

$$e^{2k\pi\sqrt{-1}} = +1, \text{ et } e^{\frac{2k\pi}{m}\sqrt{-1}} = \sqrt[m]{1}.$$

Soit $\sqrt[m]{1} = x$, on aura

$$2\cos\frac{2k\pi}{m} = \frac{xx+1}{x},$$

et parconséquent $xx - 2x\cos\frac{2k\pi}{m} + 1 = 0$ est le facteur général de l'équation $x^m - 1 = 0$, ou $xx - 2ax\cos\frac{2k\pi}{m} + aa = 0$, celui de $x^m - a^m = 0$.

Par exemple, les cinq facteurs de $x^5 - a^5 = 0$ se déduisent facilement des trois équations

$$x - a = 0 \ldots xx - 2ax\cos\tfrac{2}{5}\pi + aa = 0 \ldots xx - 2ax\cos\tfrac{4}{5}\pi + aa = 0;$$

si on eût fait $k = 3$, $k = 4$, etc., on aurait trouvé les mêmes facteurs. Passons à quelques autres usages du calcul différentiel.

840. Soit une fonction quelconque y de la variable x, on sait que si x devient $x + dx$, y deviendra $y + dy$, et parconséquent si x varie uniformément et devient $x + 2dx$, y deviendra $y + dy + d(y + dy) = y + 2dy + ddy$. De même si x devient $x + 3dx$, y se changera en $y + 3dy + 3ddy + d^3y$, et en général si on substitue dans y, $x + ndx$ au lieu de x, y deviendra

$$y + ndy + \frac{n.n-1}{2}ddy + \frac{n.n-1.n-2}{2.3}d^3y + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}d^4y + \text{etc.}$$

Soit donc $ndx =$ à la quantité finie a, alors n étant infini on aura

$$n = n - 1 = n - 2, \text{ etc.}$$

Donc si dans y on substitue $x + a$ au lieu de x, la fonction y se changera en

$$y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2ddy}{2dx^2} + \frac{a^3d^3y}{2.3.dx^3} + \frac{a^4d^4y}{2.3.4.dx^4} + \text{etc.}$$

dx étant supposée constante.

Pour faire voir la vérité de cette formule dans un exemple simple, supposons $y = xx - 2x + 1$, et cherchons la valeur que cette quantité doit avoir si on substitue $x + 1$ à x, nous aurons

$$a = 1, \quad \frac{dy}{dx} = 2x - 2, \quad \frac{ddy}{dx^2} = 2, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0, \text{ etc.}$$

Donc x se change en $xx - 2x + 1 + 2x - 2 + 1 = xx$, ce qui est évident.

Si l'on fait a négatif dans la formule générale, on aura $y - \frac{ady}{dx} + \frac{a^2ddy}{2dx^2} - \frac{a^3d^3y}{2.3.dx^3}$ — etc. pour la valeur de y lorsqu'on y substitue $x - a$ au lieu de x. Voici quelques applications de cette formule.

Soit $y = x^m$, et on aura

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \ldots \frac{ddy}{dx^2} = m.m-1.x^{m-2} \ldots \frac{d^3y}{dx^3} = m.m-1.m-2.x^{m-3}; \text{ etc.}$$

Donc si x devient $x + a$, y deviendra

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} a^2x^{m-2} + \text{etc.}$$

Faisons $a = \frac{-bx}{x+b}$, nous aurons

$$(x+a)^m = \frac{x^{2m}}{(x+b)^m} = x^m - \frac{mbx^m}{x+b} + \frac{m.m-1.b^2x^m}{2(x+b)^2} - \text{etc.}$$

ou

$$\frac{1}{(x+b)^m} = (x+b)^{-m} = x^{-m} - \frac{mx^{-m}b}{x+b} + \frac{m.m-1.x^{-m}b^2}{2(x+b)^2} - \text{etc.}$$

$$= x^{-m}\left(1 - \frac{mb}{x+b} + \frac{m.m-1.b^2}{2(x+b)^2} - \frac{m.m-1.m-2.b^3}{2.3.(x+b)^3} + \text{etc.}\right);$$

série qui n'aura qu'un nombre fini de termes lorsque m sera un nombre entier.

Soit $-m = n$, on aura

$$(x+b)^n = x^n\left(1 + \frac{nb}{x+b} + \frac{n.n+1.b^2}{2(x+b)^2} + \text{etc.}\right):$$

on peut vérifier ces formules en réduisant en séries les fractions $\frac{1}{x+b}$; $\frac{1}{(x+b)^2}$, etc. Or ces séries peuvent servir à trouver les racines des nombres d'une manière prompte, parcequ'on peut toujours les rendre très-convergentes.

841. Soit maintenant $y = lx$; si on met $x + a$ au lieu de x, on aura $\left(\text{à cause de } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{ et de } \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-1}{xx}, \text{ etc.}\right)$

$$l(x+a) = lx + \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} + \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^4}{4x^4} + \text{etc.}$$

$$l(x-a) = lx - \frac{a}{x}\left(1 + \frac{a}{2x} + \frac{a^2}{3x^2} + \text{etc.}\right).$$

Soit $a = \frac{-xx}{b+x}$, on aura

$$l(x+a) = l\frac{bx}{b+x};$$

ou

$$lbx - l(b+x) = lx - \frac{x}{b+x} - \frac{x^2}{2(b+x)^2} - \frac{x^3}{3(b+x)^3} - \text{etc.}$$

Donc

$$l(b+x) = lb + \frac{x}{b+x}\left(1 + \frac{x}{2(b+x)} + \frac{x^2}{3(b+x)^2} + \text{etc.}\right),$$

$$l(b-x) = lb - \frac{x}{b-x}\left(1 - \frac{x}{2(b-x)} + \frac{x^2}{3(b-x)^2} - \text{etc.}\right);$$

séries convergentes qui facilitent beaucoup le calcul des logarithmes.

Supposons $y = b^x$, nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = b^x lb \ldots \frac{ddy}{dx^2} = b^x l^2 b, \text{ etc.}$$

Donc

$$b^{x+a} = b^x\left(1 + alb + \frac{a^2 l^2 b}{2} + \frac{a^3 l^3 b}{2.3} + \text{etc.}\right),$$

et parconséquent

$$b^a = 1 + alb + \frac{a^2 l^2 b}{2} + \frac{a^3 l^3 b}{2.3} + \text{etc.}$$

842. Soit à présent y un arc de cercle dont le sinus $= x$, que nous désignerons par $y = \text{A} \sin x$, alors on aura

$$x = \sin y \ldots \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y},$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{\sin y}{\cos^3 y} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}} \ldots \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}, \text{ etc.}$$

Donc l'arc qui a pour sinus $x + a$, ou

$$\text{A} \sin(x+a) = \text{A} \sin x + \frac{a}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}} + \text{etc.}$$

On trouve de même que

$$\text{A} \sin(x-a) = \text{A} \sin x - \frac{a}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} - \text{etc.}$$

Ces séries sont très-propres à calculer d'une manière facile l'arc qui répond à un sinus donné. Pour cela on cherche dans les Tables l'arc qui en approche le plus; son sinus x étant ôté du sinus proposé, donnera la quantité a qui sera toujours extrêmement petite; et comme on a immédiatement $\sqrt{(1-xx)}$, on trouvera l'arc cherché

en ajoutant $\frac{a}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} +$ etc. à celui dont le sinus est x.

Mais il faut observer, 1°. que la série sera si convergente, que les deux premiers termes suffiront toujours lorsqu'on ne voudra pas pousser l'approximation plus loin qu'environ jusqu'aux quintes. 2°. Que l'arc qu'on aura par cette série sera exprimé en parties du rayon 1, et que pour les exprimer en secondes, tierces, etc., il faudra les diviser par la longueur de l'arc d'une seconde, ou retrancher de leur logarithme celui de l'arc d'une seconde qui est 4.6855748668 2354, en supposant le logarithme de l'unité = 10 pour éviter les caractéristiques négatives. Le reste est le logarithme du nombre de secondes de l'arc cherché; ce qui donne aussitôt les tierces, les quartes, etc.

843. *Exemple.* Soit une hyperbole dont la puissance = 1, et l'angle fait par ses asymptotes = A, on aura sin Alz pour la surface d'un trapèze asymptotique compris entre les ordonnées 1, $\frac{1}{z}$. Donc pour que cet espace représente le logarithme tabulaire de l'abscisse z, il faut que sin A soit égal au module 0.4342944819; cherchons donc l'angle A dont le sinus = 0.4342944819.

Or celui qui en approche le plus, dans les Tables ordinaires, est de 25° 44′. Son sinus x = 0.4341833, et son cosinus $\sqrt{(1-xx)}$ = 0.9008245. On a donc a = 0.0001112. Maintenant pour trouver ce qu'il faut ajouter à 25° 44′ pour avoir l'arc cherché, calculons les deux premiers termes $\frac{a}{(1-xx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$, et en faisant 25° 44′ = y, on aura

$$\frac{a}{\cos y} + \frac{a^2 \sin y}{2\cos^3 y} = \frac{a}{2\cos^3 y}(2\cos^2 y + a \sin y) = \frac{a}{2\cos^3 y}(1 + \cos 2y + a \sin y)$$

$$= \frac{a}{2\cos^3 y}(1 + \cos 51°28' + a \sin 25°44') = \frac{a}{2\cos^3 y} \times 1,6230 1807,$$

dont le logarithme est 6,0914025, (en supposant celui de l'unité = 10), ôtant 4,6855749, il reste 1,4058276, pour le logarithme du nombre de secondes de l'arc demandé.

Or ce logarithme répond au nombre 25,4582; l'arc cherché a donc 25″ + 0.4582″; multipliant par 60 cette fraction décimale, elle se réduit à 27‴ + 0.492‴; multipliant par 60, on a 29ᵛ + 0.52ᵛ, ou 29ᵛ + 31ᵛ + 12ᵛᵢ. Donc enfin l'angle que doivent faire entre elles les asymptotes d'une hyperbole dont les espaces asymptotiques représentent les logarithmes des Tables, ou celui qui a pour sinus le module, est de 25° 44′ 25″ 27‴; et si on prenait le sinus x avec dix ou douze décimales, le calcul serait exact jusqu'aux 12ᵛᵢ.

844. Faisons actuellement $y = A.\cos(x)$, nous aurons

$$x = \cos y \ldots \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{(1-xx)}} \ldots \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{1+2xx}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}, \text{ etc.}$$

Donc

$$A\cos(x+a) = A\cos x - \frac{a}{\sqrt{(1-xx)}} - \frac{a^2x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}} - \text{etc.}$$

et

$$A\cos(x-a) = A\cos x + \frac{a}{\sqrt{(1-xx)}} - \frac{a^2x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}} - \text{etc.}$$

séries dont on fera le même usage que des précédentes. On en trouvera de semblables pour l'arc dont la tangente ou la cotangente est $x \pm a$.

845. Supposons maintenant $y = \sin x$, nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \ \frac{ddy}{dx^2} = -\sin x, \ \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x, \text{ etc.}$$

Donc

$$\sin(x+a) = \sin x + a\cos x - \tfrac{1}{2}a^2\sin x - \tfrac{1}{6}a^3\cos x + \tfrac{1}{24}a^4\sin x + \text{etc.}$$

$$\sin(x-a) = \sin x - a\cos x - \tfrac{1}{2}a^2\sin x + \tfrac{1}{6}a^3\cos x + \tfrac{1}{24}a^4\sin x - \text{etc.}$$

De même si $y = \cos x$, on aura

$$\cos(x+a) = \cos x - a\sin x - \tfrac{1}{2}a^2\cos x + \tfrac{1}{6}a^3\sin x + \tfrac{1}{24}a^4\cos x - \text{etc.}$$

$$\cos(x-a) = \cos x + a\sin x - \tfrac{1}{2}a^2\cos x - \tfrac{1}{6}a^3\sin x + \tfrac{1}{24}a^4\cos x + \text{etc.}$$

Ces formules sont d'un très-grand usage pour interpoler les Tables des sinus ; il nous suffit de les indiquer.

Faisons $x = 0$, les valeurs de $\sin(x+a)$, $\cos(x+a)$, deviendront, à cause de $\sin x = 0$, et de $\cos x = 1$,

$$\sin a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3\ldots7} + \frac{a^9}{2.3\ldots9} - \frac{a^{11}}{2.3\ldots11} + \text{etc.}$$

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6} + \frac{a^8}{2.3\ldots8} - \frac{a^{10}}{2.3\ldots10} + \text{etc.}$$

comme on le sait déjà.

846. Supposons encore $y = \text{tang}\, x$, nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \ldots \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{\sin x}{\cos^3 x};$$

$$\frac{d^3y}{2dx^3} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}, \text{ etc.}$$

Donc

$$\tang(x+a) = \tang x + \frac{a}{\cos^2 x} + \frac{a^2 \sin x}{\cos^3 x} + \frac{a^3}{\cos^4 x} + \frac{a^4 \sin x}{\cos^5 x} + \text{etc.}$$
$$- \frac{2a^3}{3\cos^2 x} - \frac{a^4 \sin x}{3\cos^3 x} - \text{etc.}$$

Or $\frac{a}{\cos^2 x} + \frac{a^2 \sin x}{\cos^3 x} + \frac{a^3}{\cos^4 x} + \frac{a^4 \sin x}{\cos^5 x} + \text{etc.}$ est une progression géométrique dont le premier terme $= \frac{a}{\cos^2 x} + \frac{a^2 \sin x}{\cos^3 x}$, et dont le quotient $= \frac{a^2}{\cos^2 x}$. Donc la somme $= \frac{a + a^2 \tang x}{\cos^2 x - aa}$, et parconséquent

$$\tang(x+a) = \tang x + \frac{a + a^2 \tang x}{\cos^2 x - aa} - \frac{2a^3}{3\cos^2 x} - \frac{a^4 \sin x}{3\cos^3 x} - \text{etc.}$$
$$= \frac{a + \sin x \cos x}{\cos^2 x - aa} - \frac{2a^3}{3\cos^2 x} - \frac{a^4 \sin x}{3\cos^3 x} - \text{etc.}$$

On trouvera de semblables formules pour $\cot(x \pm a)$.

847. Soit maintenant $y =$ le logarithme tabulaire de $\sin x = ml \sin x$, si m représente le module, on aura

$$\frac{dy}{dx} + \frac{m \cos x}{\sin x} \cdots \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{m}{\sin^2 x} \cdots \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2m \cos x}{\sin^3 x}, \text{ etc.}$$

Donc

$$\log \sin(x+a) = \log \sin x + am \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{ma^2}{2 \sin^2 x} + \frac{a^3 m \cos x}{3 \sin^3 x}, \text{ etc.}$$

$$\log \sin(x-a) = \log \sin x - am \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{ma^2}{2 \sin^2 x} - \frac{a^3 m \cos x}{3 \sin^3 x}, \text{ etc.}$$

Si $y = \log \cos x$, on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-m \sin x}{\cos x} \cdots \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-m}{\cos^2 x} \cdots \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{2m \sin x}{\cos^3 x}, \text{ etc.}$$

Donc

$$\log \cos(x+a) = \log \cos x - \frac{am \sin x}{\cos x} - \frac{a^2 m}{2\cos^2 x} - \frac{a^3 m \sin x}{3\cos^3 x} - \text{etc.}$$

et

$$\log \cos(x-a) = \log \cos x + \frac{am \sin x}{\cos x} - \frac{a^2 m}{2\cos^2 x} + \text{etc.}$$

Soit $y = \log \tang x$, on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2m}{\sin 2x} \cdots \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{-2m \cos 2x}{\sin^2 2x} \cdots \text{etc.}$$

et parconséquent

$$\log \operatorname{tang}(x+a) = \log \operatorname{tang} x + \frac{2am}{\sin 2x} - \frac{2a^2 m \cos 2x}{\sin^2 2x} \text{ etc.}$$

Il en serait de même pour $l \cot x$.

848. Si on suppose maintenant que y soit l'arc dont le logarithme du sinus $= x$, ou $y = \mathrm{A}l \sin x$, on aura

$x = l \sin y$, et parconséquent $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{m \cos y}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{\sin y}{m^2 \cos^3 y}$, etc.

Donc

$$\mathrm{A}l \sin(x+a) = y + \frac{a \sin y}{m \cos y} + \frac{a^2 \sin y}{2m^2 \cos^3 y} + \text{etc.}$$

Soit $y = \mathrm{A}l \operatorname{tang} x$, il viendra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2y}{2m}, \quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{\sin 4y}{4mm}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\sin 2y \cos 4y}{2m^3}, \text{ etc.}$$

Donc

$$\mathrm{A}l \operatorname{tang}(x+a) = y + \frac{a \sin 2y}{2m} + \frac{a^2 \sin 2y \cos 2y}{4mm} + \frac{a^3 \sin 2y \cos 4y}{12m^3} + \text{etc.}$$

Ces formules peuvent servir à résoudre d'une manière très-approchée les problêmes relatifs à l'usage des Tables des sinus.

ÉLÉMENS DU CALCUL INTÉGRAL.

Dans le calcul différentiel on suppose connu le rapport des quantités variables, et on cherche celui de leurs différentielles; dans le calcul intégral, au contraire, on détermine le rapport des variables par celui de leurs différentielles.

849. On se sert de la lettre $\int$ pour indiquer une intégrale; $\int adx$, par exemple, est l'expression générale de toutes les quantités qui par leur différentiation produisent adx; et comme adx peut également provenir ou de ax seul, ou de $ax +$ une quantité constante, on ajoute à chaque intégrale une constante C que l'on détermine ensuite par les conditions du problême.

La quantité ax étant en quelque sorte la somme de tous ses élémens adx, on prononce somme de adx l'expression $\int adx$; et sommer, intégrer, ou trouver la fluente, sont des mots synonymes.

S'il n'y avait de différentielles que celles qui proviennent d'une différentiation exacte, chacune aurait son intégrale : mais comme on entend par différentielle toute quantité affectée de dx, dy, etc., il y en a plusieurs qui ne sont susceptibles d'aucune intégration, parcequ'elles ne peuvent provenir d'aucune quantité différentiée : ydx, par exemple, est de ce nombre.

Il y en a beaucoup d'autres que l'on n'a pu intégrer jusqu'à présent que par approximation. Telles sont les différentielles des logarithmes, des arcs de cercle, et en général de toutes les quantités que l'on appelle transcendantes. Voyons d'abord celles dont on a trouvé les intégrales exactes, ou algébriques.

Des quantités susceptibles d'une intégration exacte.

850. Puisque la différentielle de x^n est $nx^{n-1}\,dx$, il est clair que l'intégrale de $nx^{n-1}\,dx$ doit être réciproquement x^n; donc

$$\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n};$$

et faisant $n-1=m$, on aura

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \text{ ou } \frac{x^{m+1}}{m+1} + C;$$

formule qui donne pour l'intégration des différentielles monomes la règle inverse de leur différentiation (787).

851. Ainsi pour intégrer les différentielles monomes, il faut d'abord augmenter d'une unité l'exposant de la variable, et diviser ensuite par l'exposant ainsi augmenté, et par la différentielle de la variable.

852. Cette règle est cependant sujette à exception dans le cas où $m=-1$; car alors l'intégrale devient $\frac{1}{0}+C$, c'est-à-dire, qu'elle prend une forme infinie. Mais comme la différentielle $x^m dx$ se réduit dans ce cas à $\frac{dx}{x}$, que l'on sait d'ailleurs être la différentielle du logarithme hyperbolique de x, son intégrale est lx. Ainsi $\int\frac{dx}{x}=lx+C$, et parconséquent les différentielles monomes à une variable peuvent s'intégrer exactement, ou du moins par approximation au moyen des logarithmes. Voici plusieurs autres différentielles que l'on peut intégrer de la même manière.

853. Supposons

$$dy = dx\,(a+bx+cx^2+\text{etc.}) = adx+bxdx+cx^2dx+\text{etc.},$$

et nous aurons

$$y = C + ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \text{etc.}$$

Soit $dy = adx\,(b+x)^m$; si on fait $b+x=z$, on aura

$$dx = dz, \text{ et } dy = az^m dz;$$

d'où

$$y = \frac{az^{m+1}}{m+1} = \frac{a}{m+1}\,(b+x)^{m+1} + C;$$

et lorsque $m = -1$, on aura

$$y = \int \frac{adx}{b+x} = al(b+x) + C = lc(b+a)^a,$$

en faisant $C = lc$.

854. Soit maintenant $dy = ax^{n-1}dx(b+x^n)^m$, on aura

$$y = C + \frac{a}{n(m+1)}(b+x^n)^{m+1};$$

et en général si on a $dy = x^n dx(a+bx^m)^k$, on trouvera, en développant cette expression,

$$dy = a^k x^n dx + ka^{k-1}bx^{m+n}dx + \frac{k.k-1}{2}a^{k-2}b^2x^{2m+n}dx + \text{etc.}$$

dont l'intégrale est

$$y = C + \frac{a^k x^{n+1}}{n+1} + \frac{k}{m+n+1}a^{k-1}bx^{m+n+1}$$
$$+ \frac{k.k-1}{2(2m+n+1)}a^{k-2}b^2x^{2m+n+1} + \frac{k.k-1.k-2}{2.3(3m+n+1)}a^{k-3}b^3x^{3m+n+1} + \text{etc.}$$

Or cette intégrale sera toujours finie, lorsque k sera un nombre entier positif. Mais on doit observer que si après avoir développé le binome, il y a des termes de la forme $\frac{dx}{x}$, il faut les intégrer par logarithmes. La méthode est la même pour $x^m dx(a+bx+cx^2+\text{etc.})^k$.

855. Concluons donc que toute différentielle binome représentée par la formule $x^n dx(a+bx^m)^k$ est intégrable algébriquement, 1°. toutes les fois que $n = m-1$, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de m et de k; 2°. toutes les fois que k est un nombre entier positif, quels que soient m et n. Voici encore deux autres cas où l'intégration exacte est possible.

856. 1°. Soit $a + bx^m = z$; on aura

$$x^{n+1} = \frac{(z-a)^{\frac{n+1}{m}}}{b^{\frac{n+1}{m}}},\quad x^n dx = \frac{1}{mb^{\frac{n+1}{m}}}dz(z-a)^{\frac{n+1}{m}-1},$$

et

$$x^n dx(a+bx^m)^k = \frac{1}{mb^{\frac{n+1}{m}}}z^k dz(z-a)^{\frac{n+1}{m}-1}$$

différentielle intégrable toutes les fois que $\frac{n+1}{m}$ sera un nombre entier positif.

Soit, par exemple, $x^3dx(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$ qui donne $\frac{n+1}{m} = 2$. La

transformée devient alors

$$\int \tfrac{1}{2} z^{\frac{1}{3}} dz\,(z - a^2) = \int \tfrac{1}{2} z^{\frac{4}{3}}\, dz - \int \tfrac{1}{2} a^2 z^{\frac{1}{3}} dz = \frac{\frac{1}{2} z^{\frac{4}{3}}}{\frac{7}{3}} - \tfrac{1}{2} a^2 \frac{z^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}$$

$$= \tfrac{3}{14} z^{\frac{7}{3}} - \tfrac{3}{8} a^2 z^{\frac{4}{3}} = 3z^{\frac{4}{3}} \left(\tfrac{1}{14} z - \tfrac{1}{8} a^2\right)$$

$$= 3(a^2 + x^2)^{\frac{4}{3}} \left(\tfrac{1}{14}(a^2 + x^2) - \tfrac{1}{8} a^2\right) = \tfrac{3}{56}(a^2 + x^2)^{\frac{4}{3}} (4x^2 - 3a^2).$$

Donc

$$\int x^3 dx\,(a^2 + x^2)^{\frac{1}{3}} = C + \tfrac{3}{56}(a^2 + x^2)^{\frac{4}{3}} (4x^2 - 3a^2).$$

857. 2°. $x^n dx\,(a + bx^m)^k = x^{mk+n} dx\,(b + ax^{-m})^k$; or cette différentielle est intégrable, suivant ce que nous venons de dire, si $\frac{mk + n + 1}{-m}$; ou $-k - \left(\frac{n+1}{m}\right)$ est un nombre entier positif.

Soit, par exemple, $x^{-2} dx\,(a + x^3)^{-\frac{5}{3}}$; on aura

$$\frac{mk + n + 1}{-m} = 2,$$

et

$$x^{-7} dx\,(1 + ax^{-3})^{-\frac{5}{3}} = x^{mk+n} dx\,(b + ax^{-m})^k.$$

Je suppose $1 + ax^{-3} = z$, et j'ai

$$-\frac{1}{3aa} . z^{-\frac{5}{3}} dz\,(z - 1), \text{ ou } -\frac{1}{3aa} z^{-\frac{2}{3}} dz + \frac{1}{3aa} z^{-\frac{5}{3}} dz,$$

dont l'intégrale est $-\frac{1}{aa} z^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2aa} z^{-\frac{2}{3}}$, qui donne

$$\int x^{-2} dx\,(a + x^3)^{-\frac{5}{3}} = C - \frac{1}{aa}\left(1 + \frac{a}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{2(1 + ax^{-3})}\right).$$

Lorsqu'une différentielle binome n'a pas les conditions que nous venons d'indiquer, on tâche de la ramener à quelque autre différentielle connue, telle, par exemple, que celle de la quadrature du cercle, ou celle des logarithmes, etc. Si cette réduction est possible, voici une manière de l'effectuer.

Méthode pour ramener l'intégration de plusieurs différentielles binomes à celle d'autres différentielles connues.

858. Soit proposé d'intégrer la différentielle $x^n dx\,(a + bx^m)^k$, en supposant connue l'intégrale de $x^p dx\,(a + bx^m)^k$, et n étant plus grand que p.

Je

Je considère la quantité $x^{q+1}(a+bx^m)^{k+1}$, dont la différentielle

$$d(x^{q+1}(a+bx^m)^{k+1}) = (aq+a)x^q dx(a+bx^m)^k$$
$$+(bmk+bm+bq+b)x^{m+q}dx(a+bx^m)^k.$$

Donc

$$\int x^{m+q}dx(a+bx^m)^k = \frac{x^{q+1}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+m+q+1)} - \frac{a(q+1)\int x^q dx(a+bx^m)^k}{b(mk+m+q+1)}.$$

Soit $m+q=n$, ou $q=n-m$, on aura

$$\int x^n dx(a+bx^m)^k$$
$$= \frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+n+1)} - \frac{a(n-m+1)}{b(mk+n+1)}\int x^{n-m}dx(a+bx^m)^k.$$

Par la même formule

$$\int x^{n-m}dx(a+bx^m)^k$$
$$= \frac{x^{1+n-2m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(1+n+mk-m)} - \frac{a(1+n-2m}{b(1+n+mk-m}\int x^{n-2m}dx(a+bx^m)^k.$$

Donc

$$\int x^n dx(a+bx^m)^k = \frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+n+1)} - \frac{a(n-m+1)x^{1+n-2m}}{b^2(mk+n+1)}$$
$$\times\frac{(a+bx^m)^{k+1}}{1+n+mk-m} + \frac{a^2(1+n-m)(1+n-2m)}{b^2(1+n+mk)(1+n+mk-m}\int x^{n-2m}dx(a+bx^m)^k.$$

On peut donc réduire l'intégrale de la différentielle proposée $x^n dx(a+bx^m)^k$ à celle de $x^{n-m}dx(a+bx^m)^k$, ou même de $x^{n-2m}dx(a+bx^m)^k$; et en général, on la réduira à celle de $x^{n-im}dx(a+bx^m)^k$, i étant un nombre entier positif, par cette formule qui se déduit des précédentes,

$$\int x^n dx(a+bx^m)^k = \frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+n+1)}$$
$$-\frac{a(1+n-m)x^{1+n-2m}(a+bx^m)^{k+1}}{b^2(mk+n+1)(mk+n+1-m)}$$
$$+\frac{a^2(1+n-m)(1+n-2m)x^{1+n-3m}(a+bx^m)^{k+1}}{b^3(mk+n+1)(mk+n+1-m)(mk+n+1-2m)} - \text{etc.}$$
$$\mp\frac{a^{i-1}(1+n-m)(1+n-2m)\ldots(1+n-m(i-1)(x^{1+n-im}(a+bx^m)^{k+1}}{b^i(mk+n+1)(mk+n+1-m)\ldots(mk+n+1-m(i-1))}$$
$$\pm\frac{a^i(1+n-m)(1+n-2m)\ldots(1+n-im)}{b^i(mk+n+1)(mk+n+1-m)\ldots(mk+n+1-m(i-1))}\int x^{n-im}dx(a+bx^m)^k.$$

Le signe supérieur a lieu lorsque i est pair; le signe inférieur, toutes les fois que i est impair.

859. Cela posé, si $n-im=p$, ou si $\frac{n-p}{m}$ différence des exposans de x hors du binome, divisée par l'exposant de x dans le binome donne un quotient i entier et positif, on pourra réduire l'intégrale de

$x^n dx\,(a+bx^m)^k$ à celle de $x^p dx\,(a+bx^m)^k$, par le moyen de la formule précédente.

Ex. Soit la différentielle $x^{10}dx\,(1-xx)^{\frac{1}{2}}$, dont on propose de réduire l'intégrale à celle de $dx\,(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ qui dépend de la quadrature du cercle, comme on le verra bientôt. On aura

$$m=2,\ n=10,\ p=0,\ k=\tfrac{1}{2},\ a=1,\ b=-1,\ \frac{n-p}{m}=5=i;$$

donc la réduction est possible, et on trouvera que

$$\int x^{10}dx\,(1-xx)^{\frac{1}{2}}=-\frac{x^9(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{12}-\frac{9x^7(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{12.10}$$
$$-\frac{9.7.x^5(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{12.10.8}-\frac{9.7.5x^3(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{12.10.8.6}-\frac{9.7.5.3x(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{12.10.8.6.4}$$
$$+\frac{9.7.5.3.1}{12.10.8.6.4}\int dx\,(1-xx)^{\frac{1}{2}}.$$

860. Soit proposé maintenant de réduire l'intégrale de $x^n dx(a+bx^m)^p$ à celle de $x^r dx\,(a+bx^m)^q$. Puisqu'on a

$$d[x^{n+1}(a+bx^m)^p]=(n+1)x^n dx(a+bx^m)^p+bmpx^{m+n}dx(a+bx^m)^{p-1},$$

il est clair que

$$\int x^n dx\,(a+bx^m)^p=\frac{x^{n+1}(a+bx^m)^p}{n+1}-\frac{bmp}{n+1}\int x^{m+n}dx\,(a+bx^m)^{p-1}.$$

Par la même raison

$$\int x^{m+n}dx\,(a+bx^m)^{p-1}=\frac{x^{m+n+1}(a+bx^m)^{p-1}}{m+n+1}$$
$$-\frac{bm(p-1)}{m+n+1}\int x^{n+2m}dx\,(a+bx^m)^{p-2};$$

donc

$$\int x^n dx\,(a+bx^m)^p=\frac{x^{n+1}(a+bx^m)^p}{n+1}-\frac{bpmx^{m+n+1}(a+bx^m)^{p-1}}{(n+1)(n+1+m}$$
$$+\frac{b^2m^2.p.p-1.\int x^{n+2m}dx\,(a+bx^m)^{p-1}}{(n+1)(n+1+m)};$$

et en général,

$$\int x^n dx\,(a+bx^m)^p=\frac{x^{n+1}(a+bx^m)^p}{n+1}-\frac{bpmx^{m+n+1}(a+bx^m)^{p-1}}{(n+1)(n+1+m)}$$
$$+\frac{b^2m^2.p(p-1)\,x^{n+1+2m}(a+bx^m)^{p-2}}{(1+n)(1+n+m)(1+n+2m)}-\text{etc.}$$
$$\pm\frac{b^{i-1}m^{i-1}.p.p-1.p-2.\ldots.(p-i+2)}{(1+n)(1+n+m)(1+n+2m)\ldots[1+n+m(i-1)]}$$
$$\times x^{1+n+m(i-1)}(a+bx^m)^{p-i+1}\mp\int x^{n+im}dx\,(a+bx^m)^{p-i}$$
$$\times\frac{b^im^i.p.p-1\ldots(p-i+1)}{(1+n)(1+n+m)\ldots[1+n+m(i-1)]};$$

le signe supérieur est pour le nombre entier i impair, et l'inférieur pour i pair.

Il est clair à présent que si $p - i = q$, ou si $p - q$ est un nombre entier i, l'intégrale de $x^n dx\,(a + bx^m)^p$ se réduira à celle de $x^{n+im} dx\,(a + bx^m)^q$, laquelle pouvant être réduite à $\int x^r dx\,(a + bx^m)^q$, lorsque $\frac{n + im - r}{m}$ ou $\frac{n - r}{m}$ est un nombre entier positif, la formule proposée pourra s'y réduire aussi.

Qu'il s'agisse, par exemple, de ramener $\int x^4 dx\,(1 - xx)^{\frac{5}{2}}$ à $\int dx\,(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$; on aura

$a = 1$, $b = -1$, $n = 4$, $m = 2$, $p = \frac{5}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $r = 0$, $p - q = i = 2$.

Donc

$$\int x^4 dx (1-xx)^{\frac{5}{2}} = \frac{x^5(1-xx)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{5x^7(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{5.7} + \frac{5.3}{5.7}\int x^8 dx (1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$

mais

$$\int x^8 dx (1-xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{-x^7(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{10} - 7x^5\frac{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{10.8} - \frac{7.5}{10.8.6}x^3(1-xx)^{\frac{3}{2}}$$
$$- \frac{7.5.3}{10.8.6.4}x(1-xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{7.5.3}{10.8.6.4}\int dx\,(1-xx)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\int x^4 dx (1-xx)^{\frac{5}{2}} = \frac{x^5(1-xx)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^7(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{10} - \frac{3}{10.8}x^5(1-xx)^{\frac{3}{2}}$$
$$- \frac{3.5}{10.8.6}x^3(1-xx)^{\frac{3}{2}} - \frac{3.5.3}{10.8.6.4}x(1-xx)^{\frac{3}{2}}$$
$$+ \frac{3.5.3}{10.8.6.4}\int dx (1-xx)^{\frac{1}{2}} + C.$$

861. La méthode réussira toujours, lorsque $p - q$ sera un nombre entier positif; mais s'il était négatif, ou si q était plus grand que p, au lieu de ramener $\int x^n dx\,(a + bx^m)^p$ à la formule $\int x^r dx\,(a + bx^m)^q$, il faudrait réduire celle-ci à la première, et on aurait une intégrale de cette forme

$$\int x^r dx\,(a + bx^m)^q = X + A\int x^n dx\,(a + bx^m)^p;$$

d'où par une simple transposition on déduirait

$$\int x^n dx\,(a + bx^m)^p = \frac{1}{A}\int x^r dx\,(a + bx^m)^q - \frac{X}{A}.$$

Exemple. Soit la différentielle $x^4 dx\,(1 + xx)^{-3}$ qu'il faut ramener à $dx\,(1 + xx)^{-1}$. Je suppose, au contraire, qu'il faut ramener celle-ci à la première, et j'ai

$n = 0$, $a = 1$, $b = 1$, $m = 2$, $p = -1$, $q = -3$, $r = 4$, $p - q = i = 2$.

Donc

$$\int dx(1+xx)^{-1} = x(1+xx)^{-1} + \tfrac{2}{3}x^3(1+xx)^{-2} + \tfrac{8}{3}\int x^4 dx(1+xx)^{-3},$$

et parconséquent, sans avoir recours à la première formule, j'ai

$$\int x^4 dx(1+xx)^{-3} = -\tfrac{3}{8}x(1+xx)^{-1} - \tfrac{1}{4}x^3(1+xx)^{-2} + \tfrac{3}{8}\int dx(1+xx)^{-1}.$$

Or $\int dx(1+xx)^{-1} = \int \frac{dx}{1+x^2}$ = l'arc de cercle dont le rayon est 1, et dont la tangente est x; car

$$d(\text{tang } z) = \frac{dz}{\cos^2 z};$$

donc

$$dz = \frac{d \text{ tang } z}{1 + \text{tang}^2 z} = \frac{dx}{1+xx}, \text{ si on fait tang } z = x.$$

En général, cette méthode peut servir à ramener l'intégrale de $x^{2h}dx(1+xx)^{-m}$ à celle de $dx(1+xx)^{-1}$, ou à un arc de cercle.

De l'intégration des Fractions différentielles rationnelles.

862. Supposons que $\frac{Pdx}{Q}$ soit une fraction rationnelle, et que le plus grand exposant de x dans P soit plus petit, au moins d'une unité que dans Q. S'il ne l'est pas, on divisera le numérateur par le dénominateur, jusqu'à ce que cette dernière condition ait lieu. Soit, par exemple, $\frac{x^4dx}{a+bx^3}$; on aura en divisant,

$$\frac{xdx}{b} - \frac{\frac{a}{b}xdx}{a+bx^3},$$

dont la seconde partie est telle que nous l'avons supposée pour $\frac{Pdx}{Q}$.

863. Cela posé, on cherchera les facteurs de Q, comme si on avait à résoudre l'équation $Q=0$; et s'ils sont tous du premier degré, réels et inégaux, alors la fraction proposée sera de cette forme

$$\frac{ax^{m-1} + bx^{m-2}, \text{ etc.} \ldots + \omega}{(x-f)(x-g)(x-h)\text{etc.}}dx,$$

en supposant que le nombre des facteurs $x-f$, $x-g$, etc. soit m. Pour intégrer dans ce cas, on décomposera cette fraction en celles-ci

$$\frac{Adx}{x-f} + \frac{Bdx}{x-g} + \text{etc.},$$

dont l'intégrale est $Al(x-f) + Bl(x-g) +$ etc. avec une constante, et on déterminera les coefficiens A, B, etc. en réduisant

d'abord au même dénominateur, en transposant ensuite, et égalant successivement à zéro le coefficient de chaque puissance de x; ce qui donnera autant d'équations que d'inconnues.

Exemple. On demande l'intégrale de $\frac{dx}{(aa-xx)x}$? Je décompose cette fraction en celle-ci,

$$\frac{Adx}{x}+\frac{Bdx}{a-x}+\frac{Cdx}{a+x},$$

et réduisant au même dénominateur, transposant et ordonnant, je trouve

$$\left\{\begin{array}{l} Aa^2+Bax+Bxx \\ -1+Ca-A \\ \qquad\quad -C \end{array}\right\}=0.$$

Donc

$$A=\frac{1}{aa},\ B=\frac{1}{2aa},\ C=-\frac{1}{2aa};$$

et

$$\frac{dx}{(aa-xx)x}=\frac{1}{aa}.\frac{dx}{x}+\frac{1}{2aa}.\frac{dx}{a-x}-\frac{1}{2aa}.\frac{dx}{a+x};$$

dont l'intégrale est

$$\frac{lx}{aa}-\frac{l(a-x)}{2aa}-\frac{l(a+x)}{2aa}+\frac{lc}{aa}=\frac{1}{aa}\,l\frac{xc}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

On trouvera de même que

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\int\frac{\frac{1}{2a}dx}{a+x}+\int\frac{\frac{1}{2a}dx}{a-x}=\frac{1}{2a}\,l\frac{(a+x)}{a-x}.$$

864. Cette méthode réussira toujours lorsque les facteurs du dénominateur proposé seront tous réels et inégaux : mais si quelques-uns d'entre eux étaient égaux, si $(x-a)^m$, par exemple, représentait un nombre m de ces facteurs, alors on décomposerait la fraction en celles-ci,

$$\frac{Adx}{x-f}+\frac{Bdx}{x-g}+\text{etc.}+\frac{A'x^{m-1}+B'x^{m-2}+\text{etc.}\ldots+R}{(x-a)^m}dx,$$

et après avoir déterminé les coefficiens comme ci-dessus, on intégrerait $\frac{A'x^{m-1}}{(x-a)^m}dx+\frac{B'x^{m-2}}{(x-a)^m}dx+$ etc. ou en général, $x^k dx\,(x-a)^{-m}$, en faisant $x-a=z$.

Exemple. Soit $\frac{(x^3+x^2+2)dx}{x(x-1)^2(x+1)^2}$, dont on cherche l'intégrale. Je suppose

$$\frac{(x^3+x^2+2)dx}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{Adx}{x}+\frac{(Bx+C)dx}{(x-1)^2}+\frac{(Dx+E)dx}{(x+1)^2},$$

d'où

$$A = 2,\ B = -\tfrac{3}{4},\ C = \tfrac{7}{4},\ D = -\tfrac{5}{4},\ E = -\tfrac{7}{4};$$

ainsi

$$\frac{(x^3 + x^2 + 2)\,dx}{x(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{2dx}{x} + \tfrac{1}{4}\frac{(7-3x)\,dx}{(x-1)^2} - \tfrac{1}{4}\frac{(5x+7)\,dx}{(x+1)^2}.$$

Maintenant pour intégrer la fraction $\frac{(7-3x)\,dx}{(x-1)^2}$, je fais $x-1=z$, ce qui la change en

$$\frac{(4-3z)\,dz}{zz} = \frac{4dz}{zz} - \frac{3dz}{z},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{-4}{z} - 3lz = \frac{-4}{x-1} - 3l\,(x-1);$$

et en traitant de la même manière l'autre fraction, je trouve pour l'intégrale totale,

$$2lx - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{3}{4}\,l(x-1) - \frac{5}{4}\,l(x+1) + C.$$

865. S'il y avait dans Q des facteurs imaginaires, en représentant l'un d'eux par $x + a + b\sqrt{-1}$, il y en aurait un autre de la forme $x + a - b\sqrt{-1}$. Donc leur produit $x^2 + 2ax + a^2 + b^2$ serait un facteur réel de Q. On chercherait donc (347) les coefficiens $2a$, $a^2 + b^2$, et le facteur réel du second degré $x^2 + 2ax + a^2 + b^2$, ou, pour abréger, le facteur $x^2 + mx + n$ serait déterminé. Ainsi on supposerait que $\frac{(Ax + B)\,dx}{x^2 + mx + n}$ est une des fractions partielles de $\frac{Pdx}{Q}$, et on déterminerait A et B comme ci-dessus.

Ensuite, faisant $x + \frac{1}{2}m = z$, la fraction deviendrait

$$\frac{(A'z + B')\,dz}{zz + b'b'} = \frac{A'zdz}{zz + b'b'} + \frac{B'dz}{zz + b'b'}.$$

Or $\int \frac{A'zdz}{zz + b'b'} = \frac{A'}{2}\,l(zz + b'b')$, et $\int \frac{B'dz}{zz + b'b'} = \frac{B'}{b'}\int \frac{\frac{dz}{b'}}{1 + \frac{zz}{b'b'}} = \frac{B'}{b'}$ $\times$ arc du cercle dont la tangente est

$$\frac{z}{b'} = \frac{B'}{b'} \times \text{arc tang}\,\frac{z}{b'} + C;$$

on aurait donc l'intégrale demandée.

Exemple. Soit $\frac{(z^2 - z + 1)\,dz}{(1+z)(1+zz)} = \frac{Adz}{1+z} + \frac{(Bz + C)\,dz}{1+zz}$; on trouvera

$$A = \tfrac{3}{2},\ B = -\tfrac{1}{2},\ C = -\tfrac{1}{2};$$

ce qui change la fraction en celles-ci

$$\tfrac{3}{2}\,\frac{dz}{1+z} - \tfrac{1}{2}\,\frac{zdz}{1+zz} - \tfrac{1}{2}\,\frac{dz}{1+zz},$$

dont l'intégrale est

$$\tfrac{3}{2}\,l(1+z) - \tfrac{1}{4}\,l(1+zz) - \tfrac{1}{2}\,\text{arc tang}\,z + C.$$

Soit encore $\dfrac{dx}{x(1+x)^2(1+x+xx)}$, qui se réduit à

$$\frac{dx}{x} - \frac{(2x+3)\,dx}{(1+x)^2} + \frac{xdx}{1+x+xx}.$$

Pour intégrer cette dernière quantité, je fais $x = z - \frac{1}{2}$, et elle devient

$$\frac{(z-\frac{1}{2})\,dz}{zz+\frac{3}{4}} = \frac{zdz}{zz+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\,\frac{dz}{zz+\frac{3}{4}},$$

dont l'intégrale est

$$\tfrac{1}{2}\,l(zz+\tfrac{3}{4}) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tang}\,\frac{2z}{\sqrt{3}}.$$

Substituant donc la valeur de z, j'ai pour l'intégrale entière,

$$lx - 2l(1+x) + \tfrac{1}{2}\,l(1+x+xx) + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tang}\,\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + C.$$

866. Le dernier cas qui nous reste à traiter est celui où le dénominateur Q aurait un ou plusieurs facteurs de cette forme $(xx+ax+b)^m$. Alors on supposera que la fraction partielle provenue de ce facteur est

$$dx\,\frac{(Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \text{etc.} + R)}{(xx+ax+b)^m},$$

et on déterminera les coefficiens A, B, etc. comme ci-dessus. Ensuite, faisant $x = z - \frac{1}{2}a$, et substituant, la fraction deviendra de cette forme,

$$\frac{A'z^{2m-1} + B'z^{2m-2} + \text{etc.} \ldots + R'}{(zz+b'b')^m}\,dz,$$

que l'on peut décomposer ainsi,

$$\frac{A'z^{2m-1}}{(zz+b'b')^m}\,dz + \frac{B'z^{2m-2}}{(zz+b'b')^m}\,dz + \text{etc.}$$

Or les termes où le numérateur a une puissance impaire, sont intégrables, en partie algébriquement, et en partie par logarithmes (854); et ceux où z dans le numérateur a une puissance paire, étant de la forme $\dfrac{Mz^{2k}dz}{(zz+b'b')^m}$, peuvent se ramener (861) à $\dfrac{dz}{zz+b'b'}$, c'est-à-dire, qu'on peut les intégrer, en partie algébriquement, et en partie par arcs de cercle; on aura donc par ce moyen l'intégrale de la fraction proposée.

867. Pour éclaircir ces différentes méthodes, voici un exemple qui les comprend toutes.

Soit la fraction

$$\frac{dx}{(1+x)\,xx\,(xx+2)\,(xx+1)^2}=\frac{Adx}{1+x}+\frac{(Bx+C)\,dx}{xx}$$
$$+\frac{(Dx+E)\,dx}{xx+2}+\frac{(Fx^3+Gx^2+Hx+I)\,dx}{(xx+1)^2}.$$

On trouvera, en réduisant au même dénominateur, $A=\frac{1}{12}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, $D=\frac{1}{6}$, $E=-\frac{1}{6}$, $F=\frac{1}{4}$, $G=-\frac{1}{4}$, $H=\frac{3}{4}$, $I=-\frac{3}{4}$; et la fraction proposée

$$=\tfrac{1}{12}\cdot\frac{dx}{1+x}+\tfrac{1}{2}\,\frac{(1-x)dx}{xx}+\tfrac{1}{6}\,\frac{(x-1)dx}{xx+2}+\frac{(\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{4})dx}{(xx+1)^2}.$$

Or

$$\int\tfrac{1}{12}\cdot\frac{dx}{1+x}=\tfrac{1}{12}\,l(1+x)\ldots\int\tfrac{1}{2}\,\frac{(1-x)\,dx}{xx}$$

$$=\tfrac{1}{2}\,l\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}\ldots\int\tfrac{1}{6}\,\frac{xdx-dx}{xx+2}=\tfrac{1}{12}\int\frac{2xdx}{xx+2}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\int\frac{\frac{dx}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}xx+1}$$

$$=\tfrac{1}{12}\,l(xx+2)-\frac{1}{6\sqrt{2}}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{\sqrt{2}}\ldots\int\tfrac{1}{4}\,\frac{x^3dx}{(xx+1)^2}$$

$$=\tfrac{1}{8}\,l(xx+1)+\frac{1}{8(xx+1)},\ \int\tfrac{3}{4}\,\frac{xdx}{(xx+1)^2}=-\frac{3}{8(xx+1)}.$$

Pour intégrer $-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3dx}{(xx+1)^2}$, $-\frac{3}{4}\frac{dx}{(1+xx)^2}$, il faut se proposer de ramener $\int\frac{dx}{1+xx}$ à la première, et on aura (861)

$$\int\frac{dx}{1+xx}=\frac{x}{1+xx}+2\int x^2dx\,(1+xx)^{-2}.$$

Donc

$$\int x^2dx\,(1+xx)^{-2}=-\frac{\frac{1}{2}x}{1+xx}+\tfrac{1}{2}\,\text{arc tang}\,x.$$

Or

$$\int x^3dx\,(1+xx)^{-2}=-x\,(1+xx)^{-1}+\int dx\,(1+xx)^{-2}.$$

Donc

$$\int dx\,(1+xx)^{-2}=x\,(1+xx)^{-1}+\int x^3dx\,(1+xx)^{-2}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}x}{1+xx}+\tfrac{1}{2}\,\text{arc tang}\,x.$$

Réunissant donc toutes ces intégrales, on a pour celle de la fraction proposée

$$\int \frac{dx}{(1+x)xx(xx+2)(xx+1)^2} = \tfrac{1}{12} l(1+x) + \tfrac{1}{12} l(xx+2)$$
$$+ \tfrac{1}{8} l(xx+1) + \tfrac{1}{2} l \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{\frac{1}{4}(x+1)}{1+xx} - \tfrac{1}{2} \text{arc tang } x$$
$$- \frac{1}{6\sqrt{2}} \text{arc tang } \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

868. Il suit de ce qui précède que toute différentielle fractionnaire et rationnelle est intégrable, ou algébriquement, ou par logarithmes, ou par arcs de cercle. La seule difficulté consiste à trouver les facteurs du dénominateur Q. Mais c'est plutôt un défaut de l'algèbre ordinaire, que de la méthode d'intégration que nous venons de donner.

Lorsqu'on pourra donc rendre rationnelle une fraction différentielle, on sera sûr d'en trouver l'intégrale; or voici quelques cas où cette réduction est possible.

869. Soit d'abord une quantité où il n'entre point d'autres radicaux que des radicaux monomes, telle que $\left(\frac{\sqrt[3]{x} + x\sqrt{x} + xx}{x + \sqrt[4]{x}}\right) dx$; je l'écris ainsi $\frac{x^{\frac{4}{12}} dx + x^{\frac{18}{12}} dx + xxdx}{x + x^{\frac{3}{12}}}$. Or il est clair que si je fais $x^{\frac{1}{12}} = z$, ce qui donne

$$x = z^{12}, \text{ et } dx = 12z^{11}dz;$$

la différentielle deviendra rationnelle, et parconséquent intégrable.

Soit maintenant X une fonction rationnelle de x; pour trouver l'intégrale de $dy = Xdx\sqrt{(a+bx+cxx)}$, je cherche les deux facteurs de $a+bx+cxx$; s'ils sont réels, j'ai

$$\sqrt{(a+bx+cxx)} = \sqrt{(m+nx)}\ (p+qx).$$

Je suppose cette quantité $= (m+nx)z$, et en élevant au quarré, j'ai

$$p+qx = (m+nx)zz,$$

d'où je tire

$$x = \frac{p-mzz}{nzz-q} \ldots dx = \frac{2zdz(mq-pn)}{(nzz-q)^2} \ldots (m+nx)z = \frac{(pn-mq)z}{nzz-q}$$

$= \sqrt{(a+bx+cx^2)}$. Or ces valeurs étant substituées dans la formule $Xdx\sqrt{(a+bx+cx^2)}$ la rendront rationnelle, et parconséquent intégrable. On voit que la même chose aurait lieu, si on avait à intégrer $dy = \frac{Xdx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}$.

Exemple. Soit $dy = dx\sqrt{(aa-xx)}$, on fera $\sqrt{(aa-xx)} = (a-x)z$; donc

$$x = \frac{-a+az^2}{1+zz} \ldots dx = \frac{4azdx}{(1+zz)^2}$$

$$(a-x)z = \frac{2az}{1+zz} \ldots = \sqrt{(aa-xx)} \ldots dy = \frac{8a^2z^2dz}{(1+zz)^3},$$

quantité rationnelle et facile à intégrer.

Soit encore $dy = \frac{dx}{\sqrt{(xx - aa)}}$; en faisant

$$\sqrt{(xx - aa)} = (x - a)z,$$

on aura

$$dy = \frac{-2dz}{z^2 - 1} \ldots y = l\frac{c(z-1)}{z-1} = l\frac{c}{a}(x + \sqrt{(xx - aa)}).$$

870. Lorsque les facteurs de $a + bx + cx^2$ sont imaginaires, il faut faire évanouir le second terme de cette quantité en supposant $x + \frac{b}{2c} = z$, et alors $Xdx\sqrt{(a + bx + cxx)}$ devient de cette forme $Zdz\sqrt{(zz + b'b')}$. Soit donc $\sqrt{(zz + b'b')} = z + u$, on aura

$$\frac{b'b' - uu}{2u} = z \ldots \sqrt{(zz + b'b')} = z + u = \frac{b'b' + uu}{2u} \ldots dz = -\frac{du}{2uu}(b'b' + uu$$

ces valeurs étant substituées dans la formule $\frac{Zdz}{\sqrt{(zz + b'b')}}$; ou $Zdz \times \sqrt{(zz + b'b')}$, la rendront rationnelle.

Soit, par exemple, $dy = dx\sqrt{(xx + aa)}$; en faisant $\sqrt{(xx + aa)} = x + z$, on aura

$$dy = xdx + zdx;$$

or

$$dx = -\frac{dz}{2zz}(aa + zz).$$

Donc

$$dy = xdx - \frac{aa}{2}.\frac{dz}{z} - \frac{zdz}{2},$$

et

$$y = C + \tfrac{1}{2}xx - \frac{aa}{2}lz - \tfrac{1}{4}z^2 = C - \tfrac{1}{4}aa + \frac{x}{2}\sqrt{(xx + aa)}$$
$$+ \tfrac{1}{2}aal(x + \sqrt{xx + aa}) - aala;$$

soit donc $C - \frac{1}{4}aa - aala = C'$, on aura

$$y = C' + \frac{x}{2}\sqrt{(xx + aa)} + \tfrac{1}{2}aal(x + \sqrt{xx + aa}).$$

871. On peut appliquer la même méthode au premier cas où $a + bx + cx^2$ a deux facteurs réels; car en faisant évanouir le second terme, on aura à intégrer $dz\sqrt{(zz - bb)}$, ou $dz\sqrt{(bb - zz)}$. Or si on suppose $\sqrt{(zz - bb)} = z - u$, ou $\sqrt{(bb - zz)} = b - uz$, on rendra rationnelles l'une et l'autre différentielles.

Méthode pour intégrer par Séries.

872. Lorsqu'une différentielle n'est pas susceptible d'une intégration exacte, on a recours aux approximations, et les séries sont

alors une des dernières ressources. On voit bien, en effet, qu'en réduisant en série une fonction X de la variable x, on aura une suite de termes monomes dont les intégrales réunies donneront une valeur approchée de $\int X dx$.

Par exemple, on sait que l'intégrale de $\frac{dx}{a+x}$ est $l\,(a+x)$, et que

$$\frac{dx}{a+x} = \frac{dx}{a} - \frac{xdx}{a^2} + \frac{x^2dx}{a^3} - \text{etc.}$$

Donc

$$\int \frac{dx}{a+x}, \text{ ou } l\,(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \text{etc.} + \text{C.}$$

Mais si on fait $x = 0$, la constante $\text{C} = la$; on aura donc

$$l\,(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \text{etc.}$$

et parconséquent

$$l\,(a-x) = la - \frac{x}{a}\left(1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \text{etc.}\right).$$

Supposons maintenant $\frac{x}{a} = \frac{z}{a+z}$, ou $x = \frac{az}{a+z}$, et nous aurons

$$l\,(a-x) = 2la - l\,(a+z) = la - \frac{z}{a+z} - \frac{z^2}{2\,(a+z)^2} - \text{etc.};$$

donc

$$l\,(a+z) = la + \frac{z}{a+z} + \frac{z^2}{2\,(a+z)^2} + \text{etc.},$$

série d'autant plus convergente que z sera plus petit que a. Par exemple,

$$l\,100 = l\,(99+1) = l\,99 + \frac{1}{100} + \frac{1}{2\,(100)^2} + \text{etc.} = 4{,}60517018;$$

et

$$l\,11 = l\,(10+1) = l\,10 + \frac{1}{11} + \frac{1}{2\,.\,11^2} + \text{etc} = 2{,}397 \text{ etc.}$$

Si on a

$$dy = \frac{dx}{1+xx}, \text{ alors } y = \text{arc tang } x;$$

mais $\frac{dx}{1+xx}$ étant réduit en série, donne

$$dy = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + \text{etc.};$$

donc y, ou

$$\text{Arc tang } x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \text{etc.}$$

Soit à présent y un arc quelconque, x son sinus, ou $y = \text{arc sin } x$; on aura

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = dx(1-xx)^{-\frac{1}{2}} = dx\left(1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \text{etc}\right).$$

Donc y, ou

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} + \text{etc.},$$

intégrale à laquelle il n'y a pas de constante à ajouter; soit $x = 1$, et la demi-circonference $= \pi$, on aura

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{7} + \text{etc.}$$

Si $x = \frac{1}{2}$, l'arc y devient

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{3.2^3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{7.2^7} + \text{etc.}$$

873. Ces exemples suffisent pour faire entendre la méthode précédente. Celle qui suit est digne d'attention.

La formule $d(xy) = xdy + ydx$, donne

$$xy = \int xdy + \int ydx.$$

Donc en général

$$\int xdy = xy - \int ydx;$$

et si on désigne par X une fonction quelconque de x, on aura pareillement

$$\int Xdx = Xx - \int xdX.$$

Je suppose $dX = X'dx$; donc par le même principe

$$\int xdX, \text{ ou } \int X'xdx = \frac{X'xx}{2} - \frac{\int xxdX'}{2}.$$

Soit maintenant $dX' = X''dx$, on aura

$$\int \frac{xxdX'}{2} = \frac{x^3}{2.3}X'' - \int \frac{x^3}{2.3}dX'', \text{ etc.}$$

Substituant ces différentes valeurs dans la première expression, on trouve

$$\int Xdx = Xx - \frac{x^2}{2}X' + \frac{x^3}{2.3}X'' - \frac{x^4}{2.3.4}X''' + \frac{x^5}{2.3.4.5}X^{\text{IV}} - \text{etc.},$$

ou bien, en supposant dx constante,

$$\int Xdx = Xx - \frac{x^2dX}{2.dx} + \frac{x^3ddX}{2.3.dx^2} - \frac{x^4dddX}{2.3.4.dx^3} + \text{etc.}$$

Exemple. Soit $X = \frac{1}{a+x}$, on aura

$$\frac{dX}{dx} = \frac{-1}{(a+x)^2}, \quad \frac{ddX}{dx^2} = \frac{2}{(a+x)^3}, \quad \frac{dddX}{dx^3} = \frac{-2.3}{(a+x)^4}, \text{ etc.}$$

Digitized by Google

Donc

$$\int\frac{dx}{a+x}=\frac{x}{a+x}+\frac{x^2}{2(a+x)^2}+\frac{x^3}{3(a+x)^3}+\text{etc.}\ldots+C,$$

ou bien

$$l(a+x)=la+\frac{x}{a+x}+\frac{xx}{2(a+x)^2}+\frac{x^3}{3(a+x)^3}+\text{etc.}$$

comme nous l'avons déjà trouvé.

874. Soit maintenant $dy=m(a+x)^{m-1}dx$, dont l'intégrale est $y=(a+x)^m$, on aura

$$X=m(a+x)^{m-1},\ \frac{dX}{dx}=m(m-1)(a+x)^{m-2},$$

$$\frac{ddX}{dx^2}=m.m-1.m-2.(a+x)^{m-3},\text{ etc.}$$

Donc y, ou

$$(a+x)^m=C+mx(a+x)^{m-1}-\frac{m.m-1}{2}x^2(a+x^{m-2})$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}x^3(a+x)^{m-3}-\text{etc.}$$

Soit $x=0$, on aura

$$C=a^m,\text{ et }(a+x)^m=a^m+mx(a+x)^{m-1}-\frac{m.m-1}{2}x^2(a+x)^{m-2}+\text{etc.}$$

Faisons $a+x=z$, nous aurons

$$z^m=(z-x)^m+mxz^{m-1}-\frac{m.m-1}{2}x^2z^{m-2}+\text{etc.};$$

donc

$$(z-x)^m=z^m-mxz^{m-1}+\frac{m.m-1}{2}x^2z^{m-2}-\text{etc.}$$

$$(z+x)^m=z^m+mxz^{m-1}+\frac{m.m-1}{2}x^2z^{m-2}+\text{etc.}$$

$$\frac{(z+x)^m}{z^m}=1+m.\frac{x}{z}+\frac{m.m-1}{2}.\frac{x^2}{z^2}+\text{etc.}$$

et

$$\frac{(z+x)^{-m}}{z^{-m}}=\frac{z^m}{(z+x)^m}=1-m.\frac{x}{z}+\frac{m.m+1}{2}.\frac{x^2}{z^2}-\frac{m.m+1.m+2}{2.3}.\frac{x^3}{z^3}+\text{etc.}$$

Maintenant si $z+x=b$, on aura

$$(b-x)^m=b^m\left(1-\frac{mx}{b-x}+\frac{m.m+1}{2}.\frac{x^2}{(b-x)^2}-\text{etc.}\right);$$

et

$$(b+x)^m=b^m\left(1+\frac{mx}{b+x}+\frac{m.m+1}{2}.\frac{x^2}{(b+x)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{m.m+1.m+2}{2.3}.\frac{x^3}{(b+x)^3}+\text{etc.}\right.$$

875. Pour trouver la valeur de $y = a^x$, je différentie, et j'ai

$$dy = ax^x dx la \ (796).$$

Donc

$$X = a^x la\,;\ \frac{dX}{dx} = a^x l^2 a\,;\ \frac{ddX}{dx^2} = a^x l^3 a\text{, etc},$$

ce qui donne y ou

$$a^x = C + a^x x la - \frac{xx l^2 a}{2} a^x + \frac{x^3 l^3 a}{2.3} a^x - \text{etc.}$$

Soit $x = 0$, on aura

$$C = 1\text{, et } a^x = 1 + xla.a^x - \frac{xx l^2 a}{2} a^x + \text{etc.},$$

divisant par a^x, il viendra

$$1 = a^{-x} + xla - \frac{xx l^2 a}{2} + \text{etc.}$$

Donc

$$a^{-x} = 1 - xla + \frac{x^2 l^2 a}{2} - \text{etc.}$$

et parconséquent, en supposant x positive, ses puissances impaires doivent changer de signe, ce qui rend la série toute positive,

$$a^x = 1 + xla + \frac{xx l^2 a}{2} + \frac{x^3 l^3 a}{2.3} + \text{etc.},$$

comme on le sait d'ailleurs.

876. Soit maintenant y un arc quelconque, x sa tangente, on aura

$$dy = \frac{dx}{1 + xx}\,;$$

mais comme en faisant $X = \frac{1}{1+xx}$, on trouverait une série trop compliquée pour la valeur de l'arc y, on pourra modifier ainsi la méthode précédente.

D'abord il est clair que

$$y = \frac{x}{1+xx} - \int x d\left(\frac{1}{1+xx}\right) = \frac{x}{1+xx} + \int \frac{2x^2 dx}{(1+xx)^2},$$

il est clair ensuite que

$$\int \frac{2x^2 dx}{(1+xx)^2} = \frac{\frac{2}{3}x^3}{(1+xx)^2} + \int \frac{2.4.x^4 dx}{3(1+xx)^3}.$$

De même

$$\int \frac{2.4.x^4 dx}{3(1+xx)^3} = \frac{2.4.x^5}{3.5(1+xx)^3} + \int \frac{2.4.6x^6 dx}{3.5(1+xx)^4}\text{, etc.}$$

Donc

$$\text{arc tang}\, x = \frac{x}{1+xx} + \frac{2x^3}{3(1+xx)^2} + \frac{2.4x^5}{3.5(1+xx)^3} + \frac{2.4.6.x^7}{3.5.7(1+xx)^4} + \text{etc.}$$

Donc, en général,

$$y = \cos y \left(\sin y + \tfrac{2}{3}\sin^3 y + \frac{2.4}{3.5}\sin^5 y + \frac{2.4.6}{3.5.7}\sin^7 y + \text{etc.}\right)$$
$$= \frac{\sin 2y}{2}\left(1 + \tfrac{2}{3}\sin^2 y + \frac{2.4}{3.5}\sin^4 y + \frac{2.4.6}{3.5.7}\sin^6 y + \text{etc.}\right).$$

Si $y = 45°$, on aura

$$\pi = 2\left(1 + \frac{1}{1.3} + \frac{1.2}{1.3.5} + \frac{1.2.3}{1.3.5.7} + \text{etc.}\right).$$

De l'intégration des différentielles logarithmiques et exponentielles.

877. Pour intégrer la différentielle logarithmique $Xdxlx$, en supposant X une fonction quelconque de x, soit $y = lx$, et $dz = Xdx$, on aura

$$\int Xdxlx = \int ydz = yz - \int zdy = lx\int Xdx - \int z\frac{dx}{x}.$$

Donc l'intégrale de la quantité proposée se réduit à celle de Xdx, et de $\frac{dx}{x}\int Xdx$. On pourra donc la trouver par les règles précédentes, si $\int Xdx$ ne contient pas de transcendante.

Exemples. Soit $X = x^n$; on aura

$$\int Xdx = z = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ et } \int z\frac{dx}{x} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Donc

$$\int x^n dxlx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(lx - \frac{1}{n+1}\right);$$

intégrale qui n'est sujette à d'autre exception qu'à celle du cas où $n = -1$. Mais alors on a

$$\int \frac{dx}{x}lx = \int lxdlx = \tfrac{1}{2}l^2x.$$

Soit encore $X = \frac{1}{(1-x)^2}$, on aura

$$\int Xdx = \frac{1}{1-x}, \int \frac{zdx}{x} = \int \frac{dx}{x(1-x)} = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{1-x} = lx - l(1-x).$$

Donc

$$\int \frac{dxlx}{(1-x)^2} = \frac{lx}{1-x} - lx + l(1-x) = \frac{xlx}{1-x} + l(1-x).$$

878. Si X est toujours une fonction de x, et qu'il s'agisse d'in-

tegrer $dXl^n x$, on mettra cette expression sous la forme

$$\int dXl^n x = Xl^n x - n\int \frac{Xdx}{x} l^{n-1}x;$$

et supposant ensuite $\int \frac{Xdx}{x} = X'$, on aura par la même formule

$$\int dX' l^{n-1}x = X' l^{n-1}x - (n-1)\int \frac{X'dx}{x} l^{n-2}x.$$

Si on fait $\int \frac{X'dx}{x} = X''$, on aura

$$\int dX'' l^{n-2}x = X'' l^{n-2}x - (n-2)\int \frac{X''dx}{x} l^{n-3}x, \text{ etc.}$$

Donc

$$\int dXl^n x = Xl^n x - nX' l^{n-1}x + n.n-1.X'' l^{n-2}x$$
$$- n.n-1.n-2.X''' l^{n-3}x + \text{etc.};$$

expression qui ne dépend que de l'intégration de quantités algébriques, et qui n'aura qu'un nombre fini de termes, lorsque n sera entier et positif.

Soit, par exemple, $dX = x^m dx$, on aura

$$X = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \int \frac{Xdx}{x} = X' = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2};$$

$$\int \frac{X'dx}{x} = X'' = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}, X''' = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^4}, \text{ etc.}$$

Donc

$$\int x^m dx l^n x = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(l^n x - \frac{n}{m+1} l^{n-1}x + \frac{n.n-1}{(m+1)^2} l^{n-2}x - \frac{n\,n-1.n-2}{(m+1)^3} l^{n-3}x + \text{etc}\right).$$

Le seul cas qui échappe à la formule générale, est celui où $m = -1$, et alors on a

$$\int \frac{dx}{x} l^n x = \frac{l^{n+1}x}{n+1}.$$

879. Cette formule générale s'applique également au cas où n est négatif. Mais comme on a alors pour intégrale une série infinie, voici un autre moyen d'intégrer.

Proposons-nous la quantité $\frac{Xdx}{(lx)^n}$, qui étant mise sous cette forme, $Xx.\frac{dlx}{(lx)^n}$, donne

$$\int \frac{Xdx}{(lx)^n} = \frac{-Xx}{(n-1)l^{n-1}x} + \frac{1}{n-1}\int \frac{1}{l^{n-1}x} d(Xx).$$

Faisant maintenant

$$d(Xx) = X'dx, dX'x = X''dx, dX''x = X'''dx, \text{ etc.},$$

nous

nous aurons

$$\int\frac{Xdx}{(lx)^n}=\frac{-Xx}{(n-1)l^{n-1}x}-\frac{X'x}{(n-1)(n-2)l^{n-2}x}-\frac{X''x}{(n-1)(n-2)(n-3)l^{n-3}x}-\text{etc.},$$

jusqu'à un terme de la forme $\frac{A}{n-1.n-2.n-3\ldots2.1}\int\frac{Xdx}{lx}$, dont l'intégration, si elle est possible, donnera celle de la formule proposée.

Soit, par exemple, $X=x^m$, nous aurons

$X'=(m+1)x^m$, $X''=(m+1)^2x^m$, $X'''=(m+1)^3x^m$, etc.; donc

$$\int\frac{x^mdx}{l^nx}=\frac{-x^{m+1}}{(n-1)l^nx}\left(lx+\frac{m+1}{n-2}l^2x+\frac{(m+1)^2}{n-2.n-3}l^3x+\frac{(m+1)^3}{n-2.n-3.n-4}l^4x+\text{etc}\right)$$
$$+\frac{(m+1)^{n-2}}{n-1.n-2\ldots.1}\int\frac{x^mdx}{lx};$$

l'intégrale proposée se réduit donc à celle de $\frac{x^mdx}{lx}$. Or si on fait $x^{m+1}=u$, cette quantité deviendra $\frac{du}{lu}$, différentielle qu'on n'a pas encore pu intégrer. C'est pourquoi on ne peut avoir l'intégrale de $\frac{x^mdx}{l^nx}$ que par séries, excepté dans le cas où $m=-1$; car alors on trouve par la série précédente, et sans son secours,

$$\int\frac{dx}{xl^nx}=\frac{1}{n-1}l^{1-n}x.$$

880. Soit maintenant la formule exponentielle a^xXdx qu'il s'agisse d'intégrer. J'observe d'abord que $a^xdxla=d(a^x)$; donc

$$\int a^xdx=\frac{1}{la}a^x,$$

et puisque $\int a^xXdx=X\int a^xdx-\int dX\int a^xdx$, on a

$$\int a^xXdx=\frac{a^xX}{la}-\frac{1}{la}\int a^xdX.$$

Soit $dX=X'dx$, on aura

$$\int a^xdX=\int a^xX'dx=\frac{a^xX'}{la}-\frac{1}{la}\int a^xdX'.$$

Soit $dX'=X''dx$, et on aura

$$\int a^xdX'=\frac{a^xX''}{la}-\frac{1}{la}\int a^xdX'', \text{ etc.}$$

Donc

$$\int a^xXdx=\frac{1}{la}a^xX-\frac{1}{l^2a}a^xX'+\frac{1}{l^3a}a^xX''-\text{etc.},$$

jusqu'à ce qu'on arrive à une intégrale $\int a^xdx'$, qui sera au moins la

plus simple des intégrales transcendantes de son espèce, si elle n'est pas susceptible d'une intégration exacte.

881. Remarquons que si e est le nombre dont le logarithme $=1$, on a

$$\int e^x X dx = e^x X - e^x X^{\text{I}} + e^x X^{\text{II}} - e^x X^{\text{III}} + e^x X^{\text{IV}} - e^x X^{\text{V}} + \text{etc.}$$

Soit, par exemple, $X = x^n$, on aura

$$X^{\text{I}} = nx^{n-1},\ X^{\text{II}} = n.n-1.x^{n-2},\ X^{\text{III}} = n.n-1.n-2.x^{n-3},\ \text{etc.}$$

Donc

$$\int a^x x^n dx = \frac{a^x}{la}\left(x^n - \frac{nx^{n-1}}{la} + \frac{n.n-1}{(la)^2}x^{n-2} - \frac{n.n-1.n-2}{(la)^3}x^{n-3} + \text{etc.}\right),$$

et parconséquent

$$\int e^x x^n dx = e^x\,(x^n - nx^{n-1} + n.n-1.x^{n-2} - n.n-1.n-2.x^{n-3} + \text{etc.}).$$

882. Pour trouver l'intégrale de $\frac{a^x dx}{x}$, comme les règles précédentes deviennent inutiles, je réduis en série, et j'ai

$$\frac{a^x dx}{x} = \frac{dx}{x}\left(1 + xla + \frac{x^2 l^2 a}{2} + \frac{x^3 l^3 a}{2.3} + \text{etc.}\right)$$
$$= \frac{dx}{x} + dxla + \frac{xdx}{2}l^2 a + \text{etc.}$$

Donc

$$\int \frac{a^x dx}{x} = C + lx + xla + \tfrac{1}{2}.\frac{x^2 l^2 a}{2} + \tfrac{1}{3}.\frac{x^3 l^3 a}{2.3} + \text{etc.}$$

et

$$\int \frac{e^x dx}{x} = C + lx + x + \tfrac{1}{2}.\frac{x^2}{2} + \tfrac{1}{3}.\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Soit $e^x = z$, on aura

$$\frac{e^x dx}{x} = \frac{dz}{lz},$$

différentielle d'une quantité transcendante qui est égale à la série infinie

$$C + l.lz + lz + \tfrac{1}{2}\frac{l^2 z}{2} + \tfrac{1}{3}\frac{l^3 z}{2.3} + \text{etc.}$$

Puisqu'on a

$$\int \frac{dz}{lz} = zllz - \int dzllz,$$

il est clair que

$$\int dzllz = zllz - \int \frac{dz}{lz},$$

intégrale qui dépend encore de la quantité transcendante $\int \frac{dz}{lz}$.

883. Lorsque les règles précédentes ne pourront pas s'appliquer

à l'intégration d'une quantité exponentielle, on la réduira en série par la formule

$$a^x = 1 + xla + \frac{x^2 l^2 a}{2} + \frac{x^3 l^3 a}{2.3} + \frac{x^4 l^4 a}{2.3.4} + \text{etc.},$$

et il sera facile d'intégrer.

Soit $dy = x^{mx} dx$; on aura par les séries

$$dy = dx\left(1 + mxlx + \frac{m^2 x^2 l^2 x}{2} + \frac{m^3 x^3 l^3 x}{2.3} + \text{etc.}\right)$$

$$= dx + mx\,dx\,lx + \frac{m^2}{2} x^2 dx\, l^2 x + \text{etc.},$$

dont l'intégrale se trouve par celle de $x^m dx l^n x$ (878), et on a

$$\int x^{mx} dx = x\left(1 - \frac{mx}{2^2} + \frac{m^2 x^2}{3^3} - \frac{m^3 x^3}{4^4} + \text{etc.}\right) + mx^2 lx\left(\frac{1}{2} - \frac{mx}{3^2} + \frac{m^2 x^2}{4^3} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{m^2 x^3 l^2 x}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{mx}{4^2} + \frac{m^2 x^2}{5^3} - \text{etc.}\right) + \text{etc.},$$

qui dans le cas particulier de $x = 1$, se réduit à la série convergente

$$1 - \frac{m}{2^2} + \frac{m^2}{3^3} - \frac{m^3}{4^4} + \text{etc.}$$

Cet exemple suffit pour faire voir comment on peut intégrer ces sortes de quantités par séries.

De l'intégration des Quantités différentielles où il entre des Sinus, des Cosinus, etc.

884. Puisque

$$dx \cos x = d \sin x, \text{ et que } -dx \sin x = d \cos x,$$

il est évident que

$$\int dx \cos x = \sin x, \text{ et que } \int dx \sin x = -\cos x,$$

que

$$\int dy \cos ny = \frac{1}{n} \int ndy \cos ny = \frac{1}{n} \sin ny,$$

et que

$$\int dy \sin ny = -\frac{1}{n} \cos ny.$$

Il est clair aussi que

$$\int dz \cos z\,(\sin z)^n = \int (\sin z)^n\, d \sin z = \frac{1}{n+1}(\sin z)^{n+1},$$

et que

$$\int (dz \sin z) \cos^n z = -\frac{1}{n+1}(\cos z)^{n+1}.$$

De même si on avait à intégrer $dy \sin y \cos ay$, on ferait

$$\sin y \cos ay = \tfrac{1}{2} \sin (a+1) y - \tfrac{1}{2} \sin (a-1) y,$$

et l'intégrale deviendrait

$$-\frac{1}{2(a+1)} \cos (a+1) y + \frac{1}{2(a-1)} \cos (a-1) y.$$

885. Il en serait de même pour $dx \sin x \sin ax$, pour $dx \cos x \cos ax$, etc. On traiterait avec la même facilité $dx \sin x \sin ax \cos bx$, etc., en réduisant ces produits à des sinus ou à des cosinus simples, par le moyen des valeurs de $\sin a \cos b$, $\sin a \sin b$, etc. On pourrait donc intégrer par cette méthode $dx \sin^2 x$, $dx \sin^3 x$, $dx \cos^2 x$, etc.; mais il est plus simple de les intégrer de la manière suivante.

886. La formule

$$dx \sin^n x = dx \sin x \cdot \sin^{n-1} x.$$

On a donc

$$\int dx \sin^n x = \sin^{n-1} x \int dx \sin x - \int [d(\sin^{n-1} x) \cdot \int dx \sin x]$$
$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int dx \sin^{n-2} x \cos^2 x$$
$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int dx \sin^{n-2} x - (n-1) \int dx \sin^n x;$$

et en transposant,

$$\int dx \sin^n x = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int dx \sin^{n-2} x.$$

On a donc aussi

$$\int dx \sin^{n-2} x = -\frac{1}{n-2} \cos x \sin^{n-3} x + \frac{n-3}{n-2} \int dx \sin^{n-4} x;$$

et parconséquent

$$\int dx \sin^n x = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x - \frac{n-1}{n.n-2} \cos x \sin^{n-3} x + \frac{n-1.n-3}{n.n-2} \int dx \sin^{n-4} x$$
$$= -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x - \frac{n-1}{n.n-2} \cos x \sin^{n-3} x - \frac{n-1.n-3}{n.n-2.n-4} \cos x \sin^{n-5} x$$
$$- \frac{n-1.n-3.n-5}{n.n-2.n-4.n-6} \cos x \sin^{n-7} x - \text{etc.} \ldots - \frac{n-1.n-3.\ldots 2}{n.n-2.n-4 \ldots 1} \cos x;$$

formule qui n'a lieu que dans les cas où n est impair, et alors l'intégrale ne dépend que des quantités $\cos x$, $\sin x$. Mais lorsqu'il est pair, au lieu du dernier terme de la série, qui serait de cette forme $-\frac{n-1.n-3 \ldots 1}{n.n-2 \ldots \ldots 0} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$, on aurait

$$+\frac{n-1.n-3 \ldots 1}{2.4 \ldots n-2.n} \int dx \sin^{n-n} x = +\frac{n-1.n-3 \ldots 1}{2.4 \ldots \ldots \ldots n} x.$$

L'intégrale serait donc alors

$$-\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x - \frac{n-1}{n.n-2} \cos x \sin^{n-3} x - \text{etc.} + \frac{n-1.n-3 \ldots 1}{2.4 \ldots \ldots \ldots n} x.$$

Digitized by Google

Exemple. $\int dx \sin^5 x = -\frac{1}{5}\cos x \sin^4 x - \frac{4}{5.3}\cos x \sin^2 x - \frac{4.2}{5.3}\cos x$;

et

$$\int dx \sin^6 x = -\tfrac{1}{6}\sin^5 x \cos x - \frac{5}{6.4}\sin^3 x \cos x - \frac{5.3}{6.4.2}\sin x \cos x + \frac{5.3.1}{2.4.6}$$

887. Faisons $x = 90° - z$, nous aurons

$$dx = -dz \ldots \sin x = \cos z,$$

et

$$\int dz \cos^n z = \frac{1}{n}\sin z \cos^{n-1} z + \frac{n-1}{n.n-2}\sin z \cos^{n-3} z$$

$$+ \frac{n-1.n-3}{n.n-2.n-4}\sin z \cos^{n-5} z + \frac{n-1.n-3.n-5}{n.n-2.n-4.n-6}\sin z \cos^{n-7} z$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{n-1.n-3.n-5\ldots 2}{n\ n-2.n-4\ldots\ldots 1}\sin z,$$

si n est impair; et s'il est pair, le dernier terme $= + \frac{n-1.n-3\ldots 1}{n.n-2\ldots\ldots 2} z$.

Par exemple

$$\int dy \cos^5 y = \tfrac{1}{5}\sin y \cos^4 y + \frac{4}{5.3}\sin y \cos^2 y + \frac{4.2}{5.3.1}\sin y,$$

et

$$\int dy \cos^6 y = \tfrac{1}{6}\sin y \cos^5 y + \frac{5}{6.4}\sin y \cos^3 y + \frac{5.3}{6.4.2}\sin y \cos y + \frac{5.3.1}{6.4.2} y.$$

888. Soit maintenant à intégrer $dy \sin^m y \cos^n y$; puisque $d(\sin^p y \cos^q y) = p \cos^{q+1} y \sin^{p-1} y . dy - q \cos^{q-1} y \sin^{p+1} y . dy$, on a

$$\int dy \sin^{p-1} y \cos^{q+1} y = \frac{1}{p}\sin^p y \cos^q y + \frac{q}{p}\int dy \cos^{q-1} y \sin^{p+1} y.$$

Donc

$$\int dy \sin^m y \cos^n y = \frac{1}{m+1}\sin^{m+1} y \cos^{n-1} y + \frac{n-1}{m+1}\int dy \cos^{n-2} y \sin^{m+2} y.$$

Substituant $1 - \cos^2 y$ à la place de $\sin^2 y$, et transposant, on a

$$\int dy \sin^m y \cos^n y = \frac{1}{m+n}\sin^{m+1} y \cos^{n-1} y + \frac{n-1}{m+n}\int dy \sin^m y \cos^{n-2} y$$

$$= \frac{1}{m+n}\sin^{m+1} y \cos^{n-1} y + \frac{n-1}{m+n.m+n-2}\sin^{m+1} y \cos^{n-3} y$$

$$+ \frac{n-1.n-3.\sin^{m+1} y \cos^{n-5} y}{m+n.m+n-2.m+n-4} + \text{etc.} \ldots + \frac{n-1.n-3\ldots 2 \sin^{m+1} y}{m+n.m+n-2\ldots m+1},$$

si n est impair, ou jusqu'au dernier terme.....

$$+ \frac{n-1.n-3\ldots\ldots\ldots\ldots 1}{m+n.m+n-2\ldots m+2}\int dy \sin^m y, \text{ si } n \text{ est pair.}$$

889. Faisons $y = 90° - z$, nous aurons

$$\int dz \cos^m z \sin^n z = -\frac{1}{m+n} \sin^{n-1} z \cos^{m+1} z - \frac{n-1 . \sin^{n-3} z \cos^{m+1} z}{m+n . m+n-2}$$

$$-\frac{n-1 . n-3 . \cos^{m+1} z \sin^{n-5} z}{m+n . m+n-2 . m+n-4} - \text{etc.} \ldots - \frac{n-1 . n-3 \ldots 2 \cos^{m+1} z}{m+n . m+n-2 \ldots m+1},$$

si n est impair, et jusqu'au terme $+\frac{n-1 . n-3 \ldots 1 \int dz \cos^m z}{m+n . m+n-2 \ldots m+2}$, s'il est pair.

Par exemple, la première formule donne

$$\int dy \cos^3 y \sin^5 y = \tfrac{1}{8} \sin^6 y (\cos^2 y + \tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{8} \sin^6 y (\tfrac{4}{3} - \sin^2 y),$$

et la seconde

$$\int dy \cos^3 y \sin^5 y = -\tfrac{1}{8} \cos^4 y (\sin^4 y + \tfrac{2}{3} \sin^2 y + \tfrac{1}{3}).$$

Il faut donc que ces deux résultats soient égaux, ou tout au moins qu'ils ne diffèrent que d'une quantité constante. Dans le cas présent, cette quantité est $\frac{1}{24}$, en réduisant tout en sinus, et comparant les deux résultats.

890. Considérons maintenant les fractions où il entre des sinus; et comme les plus simples sont $\frac{dy}{\sin y} \ldots \frac{dy}{\cos y} \ldots \frac{dy \cos y}{\sin y} \ldots \frac{dy \sin y}{\cos y}$, commençons par les intégrer.

La première,

$$\frac{dy}{\sin y} = \frac{dy \sin y}{\sin^2 y} = \frac{-d \cos y}{1 - \cos^2 y} = \frac{-\frac{1}{2} d \cos y}{1 + \cos y} - \frac{\frac{1}{2} d \cos y}{1 - \cos y}.$$

Donc

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \tfrac{1}{2} l \frac{1 - \cos y}{1 + \cos y} = \tfrac{1}{2} l \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} y \ (557) = l \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} y.$$

Pour intégrer la seconde, soit $y = 90° - z$, et on aura

$$dy = -dz, \ \sin y = \cos z;$$

donc

$$\int \frac{dz}{\cos z} = -l \operatorname{tang}(45° - \tfrac{1}{2} z) = -l \cot(45° + \tfrac{1}{2} z) = l \operatorname{tang}(45° + \tfrac{1}{2} z).$$

La troisième de ces fractions, $\int \frac{dy \cos y}{\sin y}$, a pour intégrale

$$\int \frac{d \sin y}{\sin y} = l \sin y = \int dy \cot y.$$

La quatrième,

$$\int \frac{dy \sin y}{\cos y} = -l \cos y = l \operatorname{séc} y = \int dy \operatorname{tang} y;$$

de même

$$\int \frac{dy}{\sin y \cos y} = \int \frac{2dy}{\sin 2y} = l \operatorname{tang} y.$$

891. Cela posé, cherchons l'intégrale de la formule $\frac{dy}{\sin^m y}$. Nous avons déjà vu (886) que

$$\int dy \sin^n y = -\frac{1}{n} \cos y \sin^{n-1} y + \frac{n-1}{n} \int dy \sin^{n-2} y;$$

faisons donc $n-2=-m$, ou $n=2-m$, et nous aurons

$$\int \frac{dy}{\sin^{m-2} y} = \frac{1}{m-2} \cos y \sin^{1-m} y + \frac{1-m}{2-m} \int \frac{dy}{\sin^m y};$$

donc

$$\int \frac{dy}{\sin^m y} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{\cos y}{\sin^{m-1} y} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dy}{\sin^{m-2} y}$$

$$= -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{\cos y}{\sin^{m-1} y} - \frac{m-2}{m-1.m-3} \cdot \frac{\cos y}{\sin^{m-3} y} - \frac{m-2.m-4}{m-1.m-3.m-5} \cdot \frac{\cos y}{\sin^{m-5} y} - \text{etc.}$$

jusqu'au terme $+\frac{m-2.m-4\ldots\ldots1}{m-1.m-3\ldots\ldots2} \int \frac{dy}{\sin y}$, c'est-à-dire, $\frac{m-2.m-4\ldots\ldots1}{m-1.m-3\ldots\ldots2}\, l \operatorname{tang} \frac{1}{2} y$, si m est impair, et jusqu'à $\frac{m-2.m-4\ldots\ldots2}{m-1.m-3\ldots\ldots1} \cdot \frac{\cos y}{\sin y}$, si m est pair.

892. Supposons $y = 90° - z$, et la formule précédente donnera

$$\int \frac{dz}{\cos^m z} = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{\sin z}{\cos^{m-1} z} + \frac{m-2}{m-1.m-3} \cdot \frac{\sin z}{\cos^{m-3} z}$$

$$+ \frac{m-2.m-4}{m-1.m-3.m-5} \cdot \frac{\sin z}{\cos^{m-5} z} + \text{etc.}$$

jusqu'au terme $+\frac{m-2.m-4\ldots2}{m-1.m-3\ldots1} \cdot \frac{\sin z}{\cos z}$, si m est pair, et jusqu'au terme $+\frac{m-2.m-4\ldots1}{m-1.m-3\ldots2} \int \frac{dz}{\cos z} = \frac{m-2.m-4\ldots1}{m-1.m-3\ldots2}\, l \operatorname{tang}(45° + \frac{1}{2} z)$, si m est impair. Par exemple,

$$\int \frac{dy}{\cos^7 y} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin y}{\cos^6 y} + \frac{5}{6.4} \cdot \frac{\sin y}{\cos^4 y} + \frac{5.3}{6.4.2} \cdot \frac{\sin y}{\cos^2 y}$$

$$+ \frac{5.3.1}{6.4.2}\, l \operatorname{tang}(45° + \tfrac{1}{2} y).$$

893. Il est donc facile d'intégrer la formule $\frac{dy \cos^m y}{\sin^n y}$: car si m est un nombre impair $2k+1$, on a

$$\frac{dy \cos^{2k+1} y}{\sin^n y} = \frac{d(\sin y)}{\sin^n y} (1 - \sin^2 y)^k,$$

qui est évidemment intégrable, quel que soit n. Si m est un nombre pair $2k$, alors

$$\frac{dy\cos^{2k}y}{\sin^n y}=\frac{dy\,(1-\sin^2 y)^k}{\sin^n y},$$

expression qui étant développée, s'intégrera facilement par la formule $\int\frac{dy}{\sin^m y}$.

894. Il en serait de même pour $\frac{dy\sin^m y}{\cos^n y}$, et la formule $\frac{dy}{\sin^m y\cos^n y}$ s'intégrerait par les mêmes principes; ensorte qu'il est aisé d'intégrer les différentielles où il entre des sinus et des cosinus, lorsqu'elles sont susceptibles d'intégration.

De l'intégration des Différentielles à plusieurs variables.

895. Soit $Pdx+Qdy$ une différentielle à deux variables, dans laquelle P et Q sont des fonctions quelconques de x et de y. Si T est son intégrale, on aura $dT=Pdx+Qdy$. Donc si on ne prend la différentielle de T qu'en faisant varier y, on aura $dT=Qdy$, et si on ne prend la différentielle de T qu'en faisant varier x, on aura $dT=Pdx$.

Marquant donc par d^yT la différentielle de T prise en faisant varier y seul, et par d^xT sa différentielle en ne faisant varier que x, on aura $d^yT=Qdy$, $d^xT=Pdx$. Donc $d^x(d^yT)=dyd^xQ$, $d^y(d^xT)=dxd^yP$. Or il est clair que $d^xd^yT=d^yd^xT$. Donc

$$dyd^xQ=dxd^yP,\ \text{ou}\ \frac{d^xQ}{dx}=\frac{d^yP}{dy};$$

c'est-à-dire, que *si la différentielle* Pdx + Qdy *peut être intégrée, la différentielle de* Q *prise en faisant varier* x *seul et divisant par* dx, *doit être égale à la différentielle de* P *prise en faisant varier* y *seul et divisant par* dy.

896. Cette condition ayant lieu, il sera facile d'intégrer. Car puisque $d^xT=Pdx$, si on marque par $\int^x$ les intégrales prises en ne considérant que x comme variable, on aura $T=\int^x Pdx+$ une constante qui peut être une fonction Y de y, comme il est évident. Ainsi T ou $\int(Pdx+Qdy)=\int^x(Pdx)+Y$. On a de même $T=\int(Pdx+Qdy)=\int^y(Qdy)+$ une fonction X de x. Donc $\int^y(Qdy)+X=\int^x(Pdx)+Y$, ou $\int^y Qdy-\int^x Pdx=Y-X$. On fera donc dans la quantité qu'on aura pour la valeur de $\int^y(Qdy)-\int^x(Pdx)$, $x=0$, et on aura Y. Si on fait $y=0$, on aura la valeur de $-X$, et par là l'intégrale de $Pdx+Qdy$ sera déterminée.

Soit, par exemple, la quantité

$$(3z^2 + 2bzy - 3y^2)\,dz + (bz^2 - 6zy + 3cy^2)\,dy,$$

qui est intégrable, parceque

$$\frac{d^y(3z^2 + 2bzy - 3yy)}{dy} = 2bz - 6y = \frac{d^z(bz^2 - 6zy + 3cy^2)}{dz}.$$

On aura

$$\int^z (\mathrm{P}dz) = z^3 + byzz - 3y^2 z,\ \int^y (\mathrm{Q}dy) = bz^2 y - 3zy^2 + cy^3.$$

Parconséquent

$$\mathrm{Y} - \mathrm{X} = cy^3 - z^3;$$

faisant $z = 0$, on a $\mathrm{Y} = cy^3$, et si on suppose $y = 0$, on aura $\mathrm{X} = z^3$. Donc l'intégrale de la différentielle proposée est $z^3 + bz^2 y - 3zy^2 + cy^3 + \mathrm{C}$.

897. On pourrait trouver la quantité Y sans avoir besoin de $\int^y \mathrm{Q}dy$. Car puisque $\int(\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy) = \int^x \mathrm{P}dx + \mathrm{Y}$, il est clair que si on différentie $\int^x(\mathrm{P}dx)$ en faisant varier y seul, ensorte que le résultat soit $\mathrm{P}'dy$; on doit avoir

$$\mathrm{Q}dy = \mathrm{P}'dy + d\mathrm{Y};\ \text{donc}\ \mathrm{Y} = \int(\mathrm{Q} - \mathrm{P}')\,dy.$$

Ainsi dans l'exemple précédent, $\int^z \mathrm{P}dz = z^3 + bz^2 y - 3zy^2$, dont la différentielle prise en faisant varier y seul donne

$$\mathrm{P}'dy = (bz^2 - 6zy)\,dy.\ \text{Donc}\ \mathrm{Y} = \int(\mathrm{Q} - \mathrm{P}')\,dy = \int 3cy^2 dy = cy^3.$$

898. Si on a une différentielle à trois variables $\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz$, en appelant son intégrale T, on aura

$$d^x\mathrm{T} = \mathrm{P}dx,\ d^y\mathrm{T} = \mathrm{Q}dy,\ d^z\mathrm{T} = \mathrm{R}dz.$$

Donc pour que la différentielle proposée soit complète, ou puisse être intégrée, il faut qu'on ait

$$\frac{d^y\mathrm{P}}{dy} = \frac{d^x\mathrm{Q}}{dx},\ \frac{d^z\mathrm{P}}{dz} = \frac{d^x\mathrm{R}}{dx},\ \frac{d^z\mathrm{Q}}{dz} = \frac{d^y\mathrm{R}}{dy}.$$

Ces trois conditions ayant lieu, l'intégrale sera $\int^x \mathrm{P}dx + \mathrm{V}$, V étant une fonction des deux autres variables y et z.

899. Pour la déterminer, on différentiera $\int^x \mathrm{P}dx$, en faisant varier y et z, et on aura une quantité de cette forme, $\mathrm{P}'dy + \mathrm{P}''dz$; il faudra donc qu'on ait

$$d\mathrm{V} + \mathrm{P}'dy + \mathrm{P}''dz = \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz,$$

et parconséquent

$$\mathrm{V} = \int[(\mathrm{Q} - \mathrm{P}')\,dy + (\mathrm{R} - \mathrm{P}'')\,dz],$$

intégrale où il n'entrera que deux variables, et qu'on aura par la méthode précédente. Il est clair qu'on pourrait trouver l'intégrale par le moyen de $\int^y \mathrm{Q}dy$, ou par $\int^z \mathrm{R}dz$, de la même manière que par $\int^x \mathrm{P}dx$.

Soit, par exemple, la quantité

$$(2xy^2 + 4bz^2x^3)\,dx + \left[\frac{y}{\sqrt{(yy+zz)}} + 3y^2 + 2yx^2\right]dy$$
$$+ \left[4z^3 + 2bx^4z + \frac{z}{\sqrt{(yy+zz)}}\right]dz$$

qui a les trois conditions nécessaires pour être intégrable; on aura

$$\int^x P dx = y^2x^2 + bz^2x^4,$$

dont la différentielle, prise en faisant varier y et z, donne

$$P' = 2yx^2,\ P'' = 2bzx^4.$$

Donc

$$dV = \left[\frac{y}{\sqrt{(yy+zz)}} + 3y^2\right]dy + \left[4z^3 + \frac{z}{\sqrt{(yy+zz)}}\right]dz$$
$$= 4z^3dz + 3y^2dy + \frac{ydy + zdz}{\sqrt{(yy+zz)}},$$

dont l'intégrale s'apperçoit tout de suite, sans le secours de la méthode précedente, et on a

$$V = z^4 + y^3 + \sqrt{(y^2+z^2)}.$$

Donc celle de la différentielle proposée est

$$z^4 + y^3 + \sqrt{(yy+zz)} + y^2x^2 + bz^2x^4 + C.$$

Il n'est pas difficile à présent de trouver les conditions que doivent avoir les différentielles à un plus grand nombre de variables, et d'intégrer lorsque ces conditions ont lieu.

900. Cela posé, voyons comment on intègre les différences secondes. Soit d'abord la différentielle du second ordre $Pddx + Qdx^2$, dans laquelle P et Q sont des fonctions quelconques de la variable x. Si on considère dx comme une variable y, la différentielle proposée sera $Pdy + Qydx$. Or pour qu'elle soit intégrable, il faut que $\frac{d^xP}{dx} = \frac{d^yQy}{dy}$; mais il n'entre que des x dans P, il n'y a point de y dans Q. Donc

$$\frac{dP}{dx} = \frac{Qdy}{dy} = Q, \text{ ou } dP = Qdx;$$

condition nécessaire pour qu'une différentielle du second ordre $Pddx + Qdx^2$ soit intégrable. Si cette condition a lieu, on a

$$\int(Pddx + Qdx^2) = \int(Pddx + dxdP) = \int^y Pdy = Py = Pdx.$$

Exemple. La différentielle $mx^{m-1}ddx + m.m-1.x^{m-2}dx^2$ est intégrable, parceque $dP = m.m-1.x^{m-2}dx = Qdx$; et l'intégrale est $mx^{m-1}dx$, qui étant intégrée de nouveau donne $x^m + C$.

901. Si dx a été supposée constante, la différentielle est Qdx^2, dont l'intégrale (à cause de $P = \int Qdx$) est $dx\int Qdx$ + la constante Cdx.

Par exemple,

$$\int dx^2 (1 - xx) = dx \int (dx - xxdx) = dx (x - \tfrac{1}{3} x^3) + Cdx,$$

et en intégrant de nouveau, on a

$$Cx + C' + \tfrac{1}{2} xx - \tfrac{1}{12} x^4.$$

902. Soit une différentielle générale du second ordre $Pddx + Qdx^2$; si on la différentie, on aura

$$Pd^3x + (dP + 2Qdx)\, ddx + dQdx^2.$$

Donc réciproquement une différentielle générale du troisième ordre $Rd^3x + Sdxddx + Tdx^3$ sera intégrable, ou réductible à une différentielle du second ordre, si $\frac{S}{2} - \frac{dR}{2dx} = \int Tdx$; alors l'intégrale sera $Rddx + dx^2 \int Tdx$. Par exemple, $xxd^3x + 2x^3dxddx + (3xx-1)dx^3$, a la condition nécessaire pour être intégrable, et son intégrale est $xxddx + dx^2 (x^3 - x)$.

903. Si dx est constante, alors il est clair que, sans aucune condition,

$$\int Tdx^3 = dx^2 \int Tdx + Cdx^2,$$

l'intégrale de cette différentielle est

$$dx \int (dx \int Tdx) + Cxdx + C'dx;$$

enfin l'intégrale de celle-ci est

$$\int dx \int dx \int Tdx + \frac{Cxx}{2} + C'x + C''.$$

C'est ainsi que

$$\int x^m dx^3 = \frac{x^{m+3}}{m+1 . m+2 . m+3} + \frac{1}{2} Cx^2 + C'x + C''.$$

On trouverait de la même manière les intégrales différentielles plus élevées, et les conditions de leurs coefficiens.

904. Considérons maintenant les différentielles du second ordre à deux variables, représentées généralement par

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2.$$

Pour trouver les conditions des coefficiens P, Q, R, etc. je prends la différentielle de $Adx + Bdy$, dans laquelle A et B sont des fonctions quelconques de x et de y, et j'ai

$$Addx + Bddy + dAdx + dBdy. \text{ Or } dA = \frac{d^xA}{dx} . dx + \frac{d^yA}{dy} . dy;$$

on a donc

$$Addx + Bddy + \frac{d^xA}{dx} . dx^2 + \left(\frac{d^yA}{dy} + \frac{d^xB}{dx}\right) dxdy + \frac{d^yB}{dy} . dy^2;$$

d'où il suit que la différentielle proposée est intégrable toutes les fois que $R = \frac{d^xP}{dx}$, que $S = \frac{d^yP}{dy} + \frac{d^xQ}{dx}$, et que $T = \frac{d^yQ}{dy}$.

FIG. 905. Ces conditions ayant lieu, l'intégrale sera $Pdx + Qdy$, et si dx a été supposée constante, l'intégrale de $Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2$ sera $Qdy + dx\int^x Rdx + Cdx$, (à cause de $P = \int^x Rdx$), et les conditions de cette nouvelle différentielle seront

$$T = \frac{d^y Q}{dy}, \; S = \frac{d^x Q}{dx} + \frac{d^y \int^x Rdx}{dy}.$$

Par exemple, $6x^2dxdy + 6xydx^2 + x^3ddy$ dans laquelle dx est constante, a les conditions précédentes, et son intégrale est $x^3dy + 3x^2ydx + Cdx$, qui en intégrant de nouveau, donne $x^3y + Cx + C'$. On trouverait de la même manière les conditions pour un plus grand nombre de variables.

Applications du calcul intégral.

Les applications du calcul intégral s'étendent à toutes les parties des Mathématiques; mais pour nous borner à celles qui sont purement géométriques, et qui servent de fondement aux autres, nous déterminerons les formules des quadratures et des rectifications des courbes, les solidités des corps, celles des solides de révolution, ainsi que leurs surfaces, et nous finirons par quelques usages de la méthode inverse des tangentes.

De la quadrature des courbes.

198. 906. Soit la courbe AM, son axe AP, PM l'ordonnée au point M; pour trouver la quadrature de l'espace AMP, je mène une autre ordonnée mp, et la ligne Mr parallèle à Pp; alors j'ai la surface de l'espace MmpP = MP × Pp + Mmr : imaginons maintenant que le point m s'approche du point M, le triangle Mmr diminuera de plus en plus, mais ne pourra devenir zéro que lorsque le point m tombera sur le point M; alors MmpP s'évanouira et sera la différentielle de l'espace AMP; Pp sera dx, et on aura

$$d\,(\mathrm{AMP}) = ydx,$$

et parconséquent

$$\mathrm{AMP} = \int ydx + \mathrm{C} = (873)\,\mathrm{C} + xy - \frac{xxdy}{2dx} + \frac{x^3ddy}{2.3.dx^2} - \frac{x^4d^3y}{2.3.4dx^3} + \text{etc.}$$

Donc l'espace

$$\mathrm{AQM} = \int xdy = \mathrm{C} + xy - \frac{yydx}{2dy} + \frac{y^3d^2x}{2.3.dy^2} - \text{etc.}$$

199. 907. EXEMPLE I. Soit un quart de cercle décrit du centre A et du rayon a, on aura

$$y = \sqrt{(aa - xx)},$$

et l'espace FIG.

$$\text{AQMP} = \int dx \sqrt{(aa - xx)} + \text{C} = \text{C} + ax - \frac{x^3}{2.3a} - \frac{1.x^5}{2.4.5a^3}$$

$$- \frac{1.3x^7}{2.4.6.7a^5} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{x^9}{9a^7} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} \cdot \frac{x^{11}}{11a^9} - \text{etc.}$$

Faisons $x = 0$, nous aurons AQMP $= 0$, et parconséquent $\text{C} = 0$. Donc

$$\text{AQMP} = ax - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3a} - \frac{1}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5a^3} - \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7a^5} - \text{etc. } (712).$$

EXEMPLE II. Dans l'ellipse,

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)}.$$

Donc

$$\int y dx = \frac{b}{a} \left(ax - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3a} - \frac{1}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5a^3} - \text{etc.} \right),$$

comme nous l'avons déjà trouvé (714).

EXEMPLE III. Dans la parabole, 198.

$$y dx = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx, \text{ et } \int y dx = \tfrac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3} xy,$$

ou l'espace APM est les deux tiers du rectangle circonscrit (715). L'équation aux paraboles de tous les degrés est

$$y^m = x^n a^{m-n};$$

donc

$$mly = nlx + (m - n) la;$$

donc $\frac{mdy}{y} = \frac{ndx}{x}$, ou $m : n :: ydx : xdy :: \int ydx : \int xdy :: \text{AMP} : \text{AMQ}$.

Parconséquent l'espace AMP est au rectangle circonscrit..... APMQ $:: m : m + n$.

EXEMPLE IV. Dans l'hyperbole équilatère, 200.

$$xy = aa, \text{ et } ydx = \frac{aadx}{x}.$$

Donc

$$\int ydx = aalx + \text{C}.$$

Si on veut compter les espaces depuis l'origine A, lorsque $x = 0$, l'espace sera $= 0$. Donc $\text{C} = -aalo$, et l'espace Q'APMN $= aalx - aalo = \infty$.

Si $x = \text{AD}$, alors

$$\text{Q'ADBN} = aala - aalo;$$

donc

$$\text{BDPM} = aalx - aala = aal \frac{x}{a},$$

comme on le savait déjà.

FIG. 201. EXEMPLE V. Dans la cissoïde,

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{ax - xx}}, \text{ et } ydx = x^{\frac{3}{2}}dx\,(a-x)^{-\frac{1}{2}};$$

donc $\int ydx$ ou l'espace

$$\text{AKMPA} = \int x^{\frac{3}{2}}dx\,(a-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or $\int dx\,(ax - xx)^{\frac{1}{2}}$ = le demi-segment AONP, et si on se propose de ramener $\int x^{\frac{1}{2}}dx\,(a-x)^{\frac{1}{2}}$ à $\int x^{\frac{3}{2}}dx\,(a-x)^{-\frac{1}{2}}$, on trouvera que la réduction est possible, et que l'on a (860),

$$\int x^{\frac{1}{2}}dx\,(a-x)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{3}\int x^{\frac{3}{2}}dx(a-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\int x^{\frac{3}{2}}dx\,(a-x)^{-\frac{1}{2}} = 3\int dx\,(ax-xx)^{\frac{1}{2}} - 2x\,(ax-xx)^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$\text{APMKA} = 3\text{APNOA} - 4\text{ANP} = 3\text{AONA} - \text{ANP}.$$

Donc l'espace infiniment long MKABQ est triple du demi-cercle générateur ANB.

202. EXEMPLE VI. Dans la logarithmique,

$$ydx = mdy, \text{ et } \int ydx, \text{ ou ABPM} = my + \text{C}.$$

Mais lorsque $y = 1 = \text{AB}$, l'espace ABMP devient nul. Donc $\text{C} = -m$, et $\text{ABMP} = m\,(y-1)$ = le rectangle OIQM. Si on fait $y = 0$, on aura l'espace infiniment long $\text{BXYA} = -m$ = le rectangle PQIT.

203. EXEMPLE VII. Soit une courbe BM qui ait pour équation $y = x^x$, on aura (883) l'espace

$$\text{ABMP} = \int x^x dx = x\left(1 - \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{3^3} - \frac{x^3}{4^4} + \text{etc.}\right)$$

$$+ xxlx\left(\tfrac{1}{2} - \frac{x}{3^2} + \frac{xx}{4^3} - \text{etc.}\right) + \frac{x^3 l^2 x}{2}\left(\tfrac{1}{3} - \frac{x}{4^2} + \frac{x^2}{5^3} - \text{etc.}\right) + \text{etc.};$$

et lorsque $x = \text{AP} = \text{PM} = 1$, on a l'espace

$$\text{ABMP} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \text{etc.} = 0{,}78343051071 2.$$

204. EXEMPLE VIII. Soit la courbe des sinus AMA'M', etc. dont l'équation est $y = \sin x$, on aura

$$\text{APM} = \int dx \sin x = \text{C} - \cos x.$$

Faisons $x = 0$, nous aurons

$$\text{C} = 1, \text{ et APM} = 1 - \cos x.$$

Soit $x = 180° = \pi$, on aura $\text{AMA'A} = 2$ = le double du quarré

du rayon. Si on suppose $x = 2\pi = AA''$, on aura l'espace FIG.

$$AMA'A + A'M'A''A' = 0;$$

ce qui est évident, puisque l'un est positif et l'autre négatif. En général si $x = 2k\pi$, l'espace sera zéro, et si $x = (2k+1)\pi$, l'espace sera $= 2$.

Si on met l'origine des x au point A, milieu de A'A', on aura 205.
$y = \cos x$. Donc l'espace ABMP $= \sin x$, l'espace ABA'A $= 1$, et A'MBA'A' $= 0$, ou $= 2$, si on ne fait pas attention à ses deux parties, l'une positive, l'autre négative.

908. Si les ordonnées partent d'un point fixe C, voici comment 206.
on peut trouver la quadrature de la courbe. On mènera les deux rayons CM, Cm, et on décrira du centre C et du rayon CM l'arc Mr; alors le triangle CM$m = \frac{Mr \times CM}{2} + Mmr$. Mais lorsque le point m est infiniment proche de M, l'espace Mmr s'évanouit, et il reste

$$d\,(COMC) = \frac{Mr \times CM}{2}.$$

Soit donc M$r = dx$, CM $= y$, on aura

$$COMC = \tfrac{1}{2} \int y dx + C.$$

Si on nomme φ l'angle que fait CM avec une ligne fixe partant du point C, ou l'arc qui mesure cet angle dans un cercle dont le rayon est 1, on aura

$$Mr = y d\varphi, \text{ et } COMC = \tfrac{1}{2} \int y y d\varphi + C.$$

909. Exemple I. Soit la conchoïde AM, son pôle P, PM $= y$, 207.
QM $= a$, PB $= b$, et l'angle APM $= \varphi$: on aura

$$\cos\varphi : b :: 1 : PQ = \frac{b}{\cos\varphi}; \text{ et } y = \frac{b}{\cos\varphi} \pm a.$$

Donc l'espace

$$APM = \tfrac{1}{2} \int \frac{b^2 d\varphi}{\cos^2\varphi} \pm ab \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \int \frac{a^2 d\varphi}{2}$$
$$= \frac{b^2}{2} \operatorname{tang}\varphi \pm abl \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) + \frac{a^2\varphi}{2}$$

sans constante. Donc

$$\pm APM \mp PBQ, \text{ ou } ABQM = abl \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) \pm \frac{a^2\varphi}{2};$$

et

$$AAMM = 2abl \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Exemple II. Dans la cissoïde, si on fait AM $= y$, MAB $= \varphi$, 201.
AQ $= \frac{a}{\cos\varphi}$, AO $=$ QM $= a\cos\varphi$, et $y = \frac{a}{\cos\varphi} - a\cos\varphi = \frac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$;

FIG. donc

$$\text{AKMOA} = \tfrac{1}{2}\int\frac{a^2 d\varphi}{\cos^2\varphi} - \int aad\varphi + \tfrac{1}{2}\int aad\varphi\cos^2\varphi = \tfrac{1}{2}aa\,\text{tang}\,\varphi - aa\varphi$$
$$+ \tfrac{1}{2}aa\left(\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi\right) = \tfrac{1}{2}aa\,\text{tang}\,\varphi + \tfrac{1}{8}aa\sin 2\varphi - \tfrac{3}{4}a^2\varphi.$$

Donc

$$\text{AKMPA} = \tfrac{3}{4}a^2\varphi - \tfrac{1}{2}a^2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{16}a^2\sin 4\varphi,$$

et l'espace infiniment long

$$\text{MKABQ} = \tfrac{3}{4}a^2\varphi = 3\text{AONB}.$$

206. EXEMPLE III. Dans la spirale d'Archimède,

$$\text{AGFBN} = x,\ \text{AGFBA} = c,\ \text{CM} = y,\ \text{CA} = a,\ \text{M}r = \frac{ydx}{a};$$

$$d(\text{COMC}) = \frac{y^2dx}{2a},\ x = \frac{cy}{a},\ dx = \frac{cdy}{a},\ \text{COMC} = \frac{c}{2aa}\cdot\frac{y^3}{3}$$

sans constante. Donc l'espace

$$\text{COMAC} = \frac{ac}{2}\cdot\frac{1}{3} = \text{le tiers de tout le cercle.}$$

Remarquez qu'on ne doit pas étendre l'intégrale $\frac{1}{2}\int yyd\varphi$ au-delà de $\varphi = 360°$: car passé 360°, les triangles élémentaires $\frac{1}{2}\int yyd\varphi$ contiennent ceux qu'on a déjà sommés.

Du reste il serait aisé de suppléer à ce défaut en calculant les trapèzes élémentaires compris entre deux spires voisines. Le même inconvénient aurait lieu pour la formule ordinaire $\int ydx$, si plusieurs ordonnées répondaient à la même abscisse.

208. EXEMPLE IV. Dans la spirale hyperbolique,

$$a : -dx :: y : \text{M}r = -\frac{ydx}{a};\ \text{donc COMC} = \tfrac{1}{2}\int\frac{-yydx}{a}.$$

Or

$$xy = ab,\ \text{donc}\ \frac{-yydx}{a} = bdy,$$

et l'espace compris entre la courbe et deux ordonnées $= \frac{1}{2}by + \text{C}$.

De la rectification des Courbes.

209. 910. Si on imagine le point m infiniment proche de M, Mm sera la différentielle de l'arc AM, et on aura

$$d\text{AM} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Parconséquent

$$\text{AM} = \int\sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \text{C};$$

formule qui a lieu soit que les ordonnées soient parallèles, soit qu'elles partent d'un point fixe.

911.

911. EXEMPLE I. Dans le cercle FIG. 199.

$$y = \sqrt{(aa - xx)} \ldots dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{aa - xx};$$

et

$$QM = \int \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3aa} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5a^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7a^6} + \text{etc.};$$

donc l'arc

$$MB = y + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3aa} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{y^5}{5a^4} + \text{etc.},$$

comme nous l'avons déjà trouvé (567).

EXEMPLE II. Dans la parabole, 198.

$$AM = \int dy \sqrt{\left(1 + \frac{4yy}{pp}\right)} = \int \frac{2dy}{p} \sqrt{(\tfrac{1}{4} pp + yy)}.$$

Or nous avons trouvé (870)

$$\int dx \sqrt{xx + aa} = C + \tfrac{1}{2} x \sqrt{(xx + aa)} + \tfrac{1}{2} aal(x + \sqrt{xx + aa}).$$

Donc

$$AM = C + \frac{y}{p} \sqrt{(yy + \tfrac{1}{4} pp)} + \tfrac{1}{4} pl[y + \sqrt{(yy + \tfrac{1}{4} pp)}];$$

faisons $y = 0$, nous aurons

$$C = -\tfrac{1}{4} pl \tfrac{1}{2} p.$$

Donc

$$AM = \frac{y}{p} \sqrt{(yy + \tfrac{1}{4} pp)} + \tfrac{1}{4} pl \left(\frac{y + \sqrt{yy + \tfrac{1}{4} pp}}{\tfrac{1}{2} p}\right).$$

912. On peut remarquer que si du centre A et du demi-grand axe $BA = \tfrac{1}{2} p$, on décrit une hyperbole équilatère BN′, l'espace ABN′Q 209.
sera.

$$\int dy \sqrt{(yy + \tfrac{1}{4} pp)}. \text{ Donc } AM \times \tfrac{1}{2} p = ABN'Q;$$

d'où il suit que la rectification de la parabole dépend de la quadrature de l'hyperbole, et réciproquement.

EXEMPLE III. Dans l'ellipse, si on suppose le demi-grand axe $= 1$, 210.
on aura

$$y = b \sqrt{(1 - xx)},$$

et en faisant $\sqrt{(1 - bb)}$, ou la demi-distance des foyers $= c$, on a

$$BM = \int \frac{dx \sqrt{(1 - ccxx)}}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

intégrale qu'on ne peut avoir par les règles précédentes. Il faut donc réduire en séries; mais pour simplifier, nous ne réduirons

FIG. que $\sqrt{(1-ccxx)}$; alors nous aurons

$$BM=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\left(1-\tfrac{1}{2}ccxx-\frac{1}{2.4}c^4x^4-\frac{1.3}{2.4.6}c^6x^6-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}c^8x^8-\text{etc.}\right)$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}-\tfrac{1}{2}cc\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}}-\tfrac{1}{2.4}c^4\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-xx)}}-\tfrac{1.3}{2.4.6}c^6\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-xx)}}-\text{etc.}$$

Or

$$(858)\ \int x^{2i}dx\,(1-xx)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{x^{2i-1}(1-xx)^{\frac{1}{2}}}{2i}-\frac{(2i-1)x^{2i-3}(1-xx)^{\frac{1}{2}}}{2i.2i-2}-\text{etc.}.$$

$$-\frac{(2i-1)(2i-3)\ldots3}{2i.2i-2\ldots2}x(1-xx)^{\frac{1}{2}}+\frac{1.3\ldots5\ldots(2i-1)}{2.4.6.8\ldots2i}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}.$$

Donc

$$BM=\left(1-\frac{c^2}{2^2}-\frac{3c^4}{2^2.4^2}-\frac{3^2.5c^6}{2^2.4^2.6^2}-\frac{3^2.5^2.7c^8}{2^2.4^2.6^2.8^2}-\text{etc.}\right)$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}+c^2x(1-xx)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2^2}+\frac{3c^2}{2^2.4^2}+\frac{3^2.5c^4}{2^2.4^2.6^2}+\text{etc.}\right]$$

$$+c^4x^3(1-xx)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2.4^2}+\frac{3.5c^2}{2.4^2.6^2}+\frac{3.5^2.7c^4}{2.4^2.6^2.8^2}+\text{etc.}\right].$$

Or

$$DN=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}},$$

on connaît donc toutes les quantités qui entrent dans cette suite dont il est facile de reconnaître la loi.

Soit $x=1$, on aura

$$AMB=\left(1-\frac{c^2}{2^2}-\frac{3c^4}{2^2.4^2}-\frac{3^2.5c^6}{2^2.4^2.6^2}-\text{etc.}\right)AND.$$

Donc la périphérie de l'ellipse est à celle du cercle circonscrit $::1-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{c^2}{a^2}-\frac{1.1^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{3c^4}{a^4}-\frac{1.1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{5c^6}{a^6}-\text{etc.}:1$, (en supposant a le demi-grand axe). Cette suite sera très-convergente, lorsque les foyers seront peu éloignés. Par exemple, si $c=\frac{1}{10}a$, la circonférence de l'ellipse sera à celle du cercle circonscrit $::0{,}99749529286126 1:1$.

913. La rectification de l'hyperbole se trouve en suivant à peu près la même méthode, et on peut voir dans les Mémoires de Berlin, an. 1746 et suiv., la manière de ramener à la rectification de ces deux courbes, les intégrales d'un grand nombre d'autres différentielles.

EXEMPLE IV. L'équation à la seconde parabole est

$$y^3=ax^2.$$

Donc

$$\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\int dy\sqrt{\left(1+\frac{9y}{9a}\right)}=\tfrac{8}{27}a\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}+C;$$

faisant $y = 0$, on a

$$C = -\tfrac{8}{27}a,$$ FIG.

et un arc quelconque de cette courbe compté depuis l'origine

$$= \tfrac{8}{27}a\left[\left(1 + \frac{9y}{9a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

EXEMPLE V. Dans la cycloïde, 211.

$dy = dx\sqrt{\left(\frac{a-x}{x}\right)}$. Donc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{\frac{a}{x}}$:

intégrant, on a

$$AM = 2\sqrt{ax} = 2AN\ (817).$$

EXEMPLE VI. Dans la logarithmique,

$ydx = ady$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dy}{y}\sqrt{(yy + aa)}$, soit $\sqrt{(yy + aa)} = z$,

on aura

$yy = zz - aa$, $\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{zz - aa}$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dz + \frac{aadz}{zz - aa}$;

dont l'intégrale est

$z + \frac{a}{2}l\frac{z-a}{z+a}$, ou $\sqrt{(aa+yy)} - al\sqrt{\left[\frac{a+\sqrt{(aa+yy)}}{y}\right]} + C$,

expression d'un arc quelconque de logarithmique dans laquelle C est facile à déterminer.

EXEMPLE VII. Dans la spirale d'Archimède, si on fait AGFBN $= x$, 206.
CM $= y$, on aura

$$Mr = \frac{ydx}{a},\ Mm = d(COM) = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{y^2dx^2}{a^2}\right)}.$$

Or

$$x = \frac{cy}{a}.\ \text{Donc COM} = \int\frac{c}{a^2}dy\left(yy + \frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Décrivons une parabole CN′ dont le paramètre $= \frac{2a^2}{c}$, nous aurons, en faisant CQ = CM, et menant l'ordonnée QN′,

$$CN' = \int\frac{c}{a^2}dy\sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2} + yy\right)}.$$

Donc

$$CN' = COM.$$

D'où l'on peut conclure qu'il règne une certaine analogie entre la spirale d'Archimède et la parabole.

EXEMPLE VIII. Dans la spirale hyperbolique, 208.

$$\text{l'arc COM} = \int\frac{dy}{y}\sqrt{(bb + yy)}.$$

910. Donc si on décrit une logarithmique NK dont la soutangente $= b =$ celle de la spirale, on aura MOC $=$ l'arc infini NK, en prenant l'ordonnée NR $=$ CQ $=$ CM. Mais si on veut avoir l'expression d'un arc de spirale ou de logarithmique compris entre les deux ordonnées y, y', on trouvera

$$\sqrt{(bb+yy)} - \sqrt{(bb+y'y')} + bl\frac{y(b+\sqrt{bb+yy})}{y'(b+\sqrt{bb+y'y'})}.$$

911. Exemple IX. Dans la spirale logarithmique,

$$\cos Mmr\,(c) : mr\,(dy) :: 1 : Mm = \frac{dy}{c}. \text{ Donc ADM} = \frac{y}{c} = \text{MT}.$$

De la mesure des solidités.

914. Un solide étant proposé à mesurer, on l'imaginera décomposé en une infinité de petites tranches parallèles entre elles. Nommant donc t la surface d'une de ces tranches, dx son épaisseur ou une portion infiniment petite d'une ligne perpendiculaire à cette tranche, $\int(tdx) + C$ sera la solidité du solide proposé; il ne s'agira plus que d'avoir t en x.

915. Par exemple, soit B la base du solide, H sa hauteur ou la distance de cette base à son sommet; si on suppose que les surfaces de ces tranches soient proportionnelles à une puissance m de leur distance x au sommet, on aura

$$H^m : B :: x^m : = \frac{Bx^m}{H^m}.$$

Donc la solidité d'une portion du solide sera $C + \frac{Bx^{m+1}}{(m+1)H^m}$, ou simplement $\frac{Bx^{m+1}}{(m+1)H^m}$, si cette portion commence au sommet. Donc le solide entier $= \frac{BH}{m+1}$. Ainsi dans les pyramides cette solidité $= \frac{1}{3}$ BH parceque $m = 2$.

916. Si une courbe quelconque AM tourne autour de son axe AP, elle engendrera un solide de révolution dont chaque coupe perpendiculaire à l'axe sera un cercle qui aura pour expression πyy, en faisant PM $= y$, et $\pi = 3,141$, etc. Donc un solide quelconque de révolution $= C + \int \pi yydx$.

Exemple I. Dans la sphère, $yy = 2ax - xx$. Donc la solidité d'un segment sphérique (535) $= \pi xx\,(a - \frac{1}{3}x)$, et la sphère $= \frac{2}{3}.2a^3\pi =$ les deux tiers du cylindre circonscrit.

Exemple II. Dans l'ellipse, $yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$. Donc le solide engendré par sa révolution autour du grand axe est à la sphère circonscrite $:: bb : aa$, ou $=$ les deux tiers du cylindre qui lui est circonscrit.

917. On nomme *Ellipsoïde alongé* celui que nous venons de considérer, et *Ellipsoïde aplati* celui qui est formé par la révolution de l'ellipse autour de son petit axe. Or il est aisé de trouver que ce dernier solide est aussi les deux tiers du cylindre qui lui est circonscrit. Donc l'ellipsoïde alongé est à l'ellipsoïde aplati :: $abb : aab :: b : a$. FIG.

EXEMPLE III. Si une parabole d'un ordre quelconque dont l'équation est $y^m = x^n a^{m-n}$ tourne autour de son axe, elle engendrera un solide qui aura pour expression

$$\int \pi y^2 dx = \frac{m}{m+2n} \pi x y^2,$$

ou qui sera au cylindre circonscrit :: $m : m + 2n$; ainsi le paraboloïde ordinaire dans lequel $m = 2$, $n = 1$, est la moitié du cylindre circonscrit.

EXEMPLE IV. De même, si l'hyperbole dont l'équation est $y^m x^n = a^{m+n}$ tourne autour de l'asymptote CP, en prenant CD = AD = a, le solide décrit par le trapèze ADMP aura pour expression 212.

$$\frac{m}{2n-m} \pi (a^3 - xy^2),$$

et parconséquent le solide décrit par l'espace infiniment long OADX est au cylindre décrit par ACDE :: $m : 2n - m$, et = ce cylindre dans l'hyperbole ordinaire.

Des surfaces courbes des solides de révolution.

918. La différentielle de la surface décrite par la courbe AM = le petit cône tronqué décrit par l'élément Mm. Donc cette surface courbe 213.

$$= \int Mm \text{ circ } PM = 2\pi \int y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C = 2\pi \int n dx + C,$$

en appelant n la normale MN.

EXEMPLE I. Dans la sphère, $n = a$. Donc la surface d'une calotte sphérique quelconque $= 2a\pi x$, et celle de la sphère $= 4a^2\pi = 4$ grands cercles.

EXEMPLE II. La surface du paraboloïde est, à cause de $n = \sqrt{(yy + \frac{1}{4}pp)}$,

$$\frac{2\pi}{p} \int 2ydy\,(yy + \tfrac{1}{4}pp)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{4\pi}{3p}(y^2 + \tfrac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Soit $y = 0$, on aura

$$C = -\frac{4\pi}{3p} \cdot \tfrac{1}{8}p^3,$$

et la surface du solide $= \frac{\pi}{6p}[(pp + 4yy)^{\frac{3}{2}} - p^3]$.

FIG. 214. EXEMPLE III. Dans l'ellipse,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}.$$

Donc la surface décrite par la révolution de l'arc AM autour de l'axe a, sera exprimée par

$$\frac{2b\pi}{a}\int - dx\sqrt{\left[aa - (aa - bb)\frac{xx}{aa}\right]};$$

et comme a est l'axe de révolution, il désignera le demi-grand axe dans l'ellipsoïde alongé, et la moitié du petit dans l'ellipsoïde aplati. Dans le premier cas, soit $aa - bb = mm$, on aura

$$\frac{2b\pi m}{aa}\int - dx\sqrt{\left(\frac{a^4}{m^2} - x^2\right)}.$$

Donc si du rayon $CD = \frac{a^2}{m}$ on décrit un arc de cercle DBN, on aura pour l'expression de la surface décrite par la révolution de AM autour de AP,

$$\frac{2b\pi m}{aa} \times \text{ABNP}.$$

Dans le second cas, en faisant $bb - aa = mm$, on aura

$$\frac{2b\pi m}{aa}\int dx\sqrt{\left(\frac{a^4}{m^2} + x^2\right)} = \frac{b\pi mx}{aa}\sqrt{\left(xx + \frac{a^4}{m^2}\right)}$$
$$+ \frac{aab\pi}{m}\, l\,\frac{m}{aa}\left[x + \sqrt{\left(\frac{a^4}{m^2} + x^2\right)}\right]$$

= la surface décrite par la révolution de AM autour de CE. On doit remarquer qu'ici $CE = a$, $CA = b$, $CQ = x$, $QM = y$.

215. EXEMPLE IV. Dans l'hyperbole,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(xx - aa)}.$$

Donc si cette courbe tourne autour de l'axe AP, la surface décrite par l'arc AM sera, en faisant $aa + bb = mm$, et déterminant la constante

$$\frac{2b\pi m}{aa}\int dx\sqrt{\left(xx - \frac{a^4}{m^2}\right)} = \frac{b\pi mx}{aa}\sqrt{\left(xx - \frac{a^4}{m^2}\right)} - bb\pi - \frac{a^2b\pi}{m}\, l\,\frac{mx + \sqrt{(m^2 - a^4)}}{a(m + b)}.$$

Et si elle tourne autour du second axe CQ, alors

$$y = \text{MQ} = \frac{a}{b}\sqrt{(bb + xx)}.$$

Donc la surface décrite par l'arc AM

$$= \frac{a\pi mx}{bb}\sqrt{\left(xx + \frac{b^4}{m^2}\right)} + \frac{a\pi bb}{m}\, l\left[\frac{mx}{bb} + \sqrt{\left(1 + \frac{m^2x^2}{b^4}\right)}\right].$$

De la Méthode inverse des Tangentes, et des Equations différentielles.

919. On appelle *Méthode inverse des tangentes*, celle qui apprend à trouver l'équation d'une courbe, dans laquelle on connaît une propriété quelconque des tangentes.

920. Cherchons, par exemple, la courbe dans laquelle la sous-normale est constante ou $= a$. Puisque nous savons d'ailleurs que l'expression générale de cette ligne est $\frac{ydy}{dx}$, nous aurons

$$\frac{ydy}{dx} = a, \; ydy = adx,$$

et en intégrant, pour exprimer que la propriété donnée convient à tous les points de la courbe, on a

$$yy = 2a(x + c),$$

équation à la parabole qui résout le problême proposé.

921. La méthode inverse des tangentes se réduit toujours à la solution d'une équation différentielle; ainsi, comme nous n'avons pas encore parlé de ces sortes d'équations, il est à propos d'en dire quelque chose avant d'aller plus loin.

On appelle équations différentielles du premier ordre, celles où il n'entre que des différences premières. Les équations différentielles du second ordre sont celles où il entre des différences secondes, sans différentielles d'un ordre plus élevé, et ainsi de suite.

922. Soient donc en général P et Q deux fonctions quelconques des variables x et y, $Pdx + Qdy = 0$ représentera généralement toute équation différentielle du premier ordre de deux variables x et y, et il est évident qu'elle sera intégrable, 1°. lorsque P sera une fonction de x ou de y seul, et qu'il en sera de même de Q; 2°. lorsqu'on aura $\frac{d^y P}{dy} = \frac{d^x Q}{dx}$.

923. Mais lorsque ces conditions n'ont pas lieu, on tâche de *séparer l'équation*, c'est-à-dire, de la partager en deux membres qui ne renferment l'un et l'autre qu'une seule variable avec sa différentielle. Il s'en faut bien qu'on ait des méthodes générales pour faire cette séparation dans tous les cas. En voici cependant quelques-uns où elle réussit.

924. Si $P = XY$, et $Q = X'Y'$, X et X' étant des fonctions de x, Y et Y' des fonctions de y, on aura

$$\frac{Xdx}{X'} = -\frac{Y'dy}{Y},$$

équation séparée et réduite à l'intégration de différentielles à une seule variable.

925. Si P et Q sont des fonctions homogènes de x et de y, c'est-à-dire, s'il y a dans tous leurs termes le même nombre de dimensions de x et de y; alors, en faisant $\frac{x}{y} = z$, on voit aisément que $\frac{Q}{P}$ sera une fonction Z de z. Ainsi, on aura

$$dx + Zdy = 0, \text{ ou } zdy + ydz + Zdy = 0,$$

et en séparant, on trouvera

$$\frac{dz}{Z+z} = -\frac{dy}{y}.$$

Par exemple, $(ax + by)\,dx = (mx + ny)\,dy$ devient, en faisant $\frac{x}{y} = z$,

$$-\frac{dy}{y} = \frac{(az+b)\,dz}{az^2 + (b-m)z - n};$$

équation facile à intégrer.

926. Soit maintenant l'équation

$$(ax + by + c)\,dx + (mx + ny + p)\,dy = 0,$$

on fera $ax + by + c = u$, $mx + ny + p = z$, et on aura

$$x = \frac{nu - bz + bp - cn}{an - mb},\ y = \frac{az - mu + mc - ap}{an - bm};$$

substituant, on a

$$(nu - mz)\,du + (az - bu)\,dz = 0,$$

dont l'intégrale est facile à trouver par ce qui précède.

Soit encore

$$axdy + bydx + x^m y^n (fxdy + gydx) = 0$$
$$= \frac{ady}{y} + \frac{bdx}{x} + x^m y^n \left(\frac{fdy}{y} + \frac{gdx}{x}\right).$$

Si on fait $y^a x^b = z$, $y^f x^g = t$, on aura

$$\frac{ady}{y} + \frac{bdx}{x} = \frac{dz}{z},\ \frac{fdy}{y} + \frac{gdx}{x} = \frac{dt}{t} \ldots$$
$$y^{ap} x^{bp} = z^p \ldots y^{fq} x^{gq} = t^q \ldots y^{ap-fq} x^{bp-gq} = z^p t^{-q}.$$

Soit $ap - fq = n$, $bp - gq = m$, on aura

$$p = \frac{ng - mf}{ag - bf},\ q = \frac{bn - am}{ag - bf},$$

et en substituant,

$$\frac{dz}{z} + \frac{dt}{t} z^p t^{-q} = 0, \text{ ou } z^{-p-1}dz + t^{-q-1}dt = 0,$$

intégrant

$$qz^{-p} + pt^{-q} = C,$$

ou

$$(bn-am)(y^a x^b)^{\frac{mf-ng}{ag-bf}}+(ng-mf)(y^f x^g)^{\frac{am-bn}{ag-bf}}=(ag-bf)\,C=C'.$$

927. Soit à présent

$$dy+Pydx=aQdx,$$

P et Q étant des fonctions de x, on fera, selon la méthode de Bernoulli, $y=Xz$, X étant une autre fonction de x, alors

$$Xdz+zdX+PXzdx=aQdx.$$

Supposons $zdX+PXzdx=0$, nous aurons

$$\frac{dX}{X}=-Pdx,\ lX=-\int Pdx,\ X=e^{-\int Pdx},$$

et parconséquent

$$aQdx=e^{-\int Pdx}dz.$$

Donc

$$z=a\int(e^{\int Pdx}Qdx)\ldots ye^{\int Pdx}=a\int(e^{\int Pdx}Qdx)+C.$$

Par exemple, l'équation $dy+ydx=ax^m dx$ donne

$$y=ae^{-x}(C+\int e^x x^m dx)=aCe^{-x}+a(x^m-mx^{m-1}+m.m-1.x^{m-2}-\text{etc}).$$

928. On intégrera par la même méthode l'équation

$$Xy^m dy+X'y^{m+1}dx=X''y^n dx,$$

en divisant par Xy^n, et faisant $y^{m-n+1}=z$.

Il y a peu d'autres cas où la séparation générale d'une équation soit possible. Voyons maintenant quelques applications de ces principes à la méthode inverse des tangentes.

Problême I. Trouver la courbe dont la soutangente $\frac{ydx}{dy}=\frac{m}{n}x$: on aura donc en séparant $\frac{ndx}{x}=\frac{mdy}{y}$, et en intégrant

$$nlx=mly+(n-m)\,lc,$$

'où l'on tire

$$y^m=x^n c^{m-n},$$

équation cherchée.

Problême II. Quelle est la courbe dont la soutangente $\frac{ydx}{dy}=\frac{aa+xx}{x}$? on aura d'abord

$$\frac{dy}{y}=\frac{xdx}{aa+xx};$$

puis

$$yy=\frac{b^2}{a^2}(aa+xx),$$

équation à l'hyperbole.

216. PROBLÊME III. Quelle est la courbe dans laquelle l'espace APM $= \frac{m}{n}$ AMQ ? On a donc

$$\frac{m}{n}\int xdy = \int ydx\,,\ \frac{mdy}{y} = \frac{ndx}{x}\,,\ y^m = x^n a^{m-n}.$$

217. PROBLÊME IV. Trouver la courbe BM dont l'espace ABMP = l'arc BM multiplié par une constante a, ou telle que $\int ydx = a\int \sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Donc

$$dx = \frac{ady}{\sqrt{(yy-aa)}}\,,\ \text{et}\ \frac{x}{a} = l\frac{y+\sqrt{(yy-aa)}}{c}$$

est l'équation cherchée.

218. PROBLÊME V. Trouver la courbe AM dans laquelle le rayon osculateur MC $= \frac{m}{n}$ MN.

Si on suppose dx constante, on aura

$$\frac{m}{n}y = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}\,,\ \text{ou}\ \frac{m}{n}yddy + dx^2 + dy^2 = 0.$$

Pour intégrer, soit $dx = pdy$, on aura

$$ddy = -\frac{dpdy}{p}\,,\ \text{et}\ \frac{n}{m}\cdot\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p(p^2+1)}:$$

Donc

$$\frac{n}{m}l\frac{y}{c} = l\frac{p}{\sqrt{(p^2+1)}}\ldots p = \frac{\pm y^{\frac{n}{m}}}{\sqrt{(c^{\frac{2n}{m}}-y^{\frac{2n}{m}})}}\,,\ \text{et}\ dx = \frac{\pm y^{\frac{n}{m}}dy}{\sqrt{(c^{\frac{2n}{m}}-y^{\frac{2n}{m}})}}:$$

c'est l'équation différentielle du premier ordre de la courbe cherchée.

Si $m = n$, on a

$$dx = \pm ydy\,(cc-yy)^{-\frac{1}{2}},\ \text{et}\ x = c' \pm \sqrt{(cc-yy)}\,,$$

équation au cercle. Si $m = 2n$, on a

$$dx = \frac{\pm dy\sqrt{y}}{\sqrt{(c-y)}}\,,$$

équation à la cycloïde.

219. PROBLÊME VI. Trouver une courbe BM, telle qu'en menant par l'origine A une droite AO, qui fasse avec l'axe un angle de 45°, on ait toujours cette proportion : l'ordonnée PM est à la soutangente PT :: une ligne donnée a : OM.

On voit par l'énoncé de ce problème que

$$dy : dx :: a : y-x\,,\ \text{et}\ adx = (y-x)\,dy.$$

Soit $y - x = z$, on aura

$$\frac{dy}{a} = \frac{dz}{a-z}\,,\ \frac{y}{a} = l\frac{C}{a-z}\,,\ \text{et}\ x = y - a + Ce^{-\frac{y}{a}}.$$

Digitized by Google

On aurait pu trouver immédiatement cette intégrale, en comparant 219.
l'équation $dx + \frac{x}{a}dy = \frac{ydy}{a}$ avec celles des numéros 926 et 927. La plus petite ordonnée BD se trouve en faisant $\frac{dy}{dx} = \infty$, et alors on a

$$BD = AD = al\frac{C}{a},$$

l'espace $DBMP = xy + ax - \frac{1}{2}yy + aal\frac{a}{C} - \frac{1}{2}aal^2\frac{a}{C}$.

PROBLÊME VII. Trouver la courbe EM qui fasse partout avec l'ordonnée PM un angle EMP proportionnel à l'abscisse AP. 220.

On aura donc

$$EMP = \frac{x}{m},$$

m étant constante, et

$$\text{tang } EMP = \text{tang } \frac{x}{m} = \frac{dx}{dy};$$

parconséquent

$$\frac{dy}{m} = \frac{dx}{m}\cot\frac{x}{m} = \frac{\frac{dx}{m}\cos\frac{x}{m}}{\sin\frac{x}{m}}.$$

Donc

$$y = C + m\log\sin\frac{x}{m};$$

équation qui fait voir que la courbe rencontre la ligne des abscisses en des points E, F, E′, F′, etc., tels que $\log\sin\frac{x}{m} = -\frac{C}{m}$; et que parconséquent $x = m$ multiplié par tous les arcs dont le sinus $= e^{-\frac{C}{m}}$: or le nombre de ces arcs est infini, car si le premier est a, et si l'arc de 180° est c, ceux qui auront le même sinus formeront la suite, a, $c-a$, $2c+a$, $3c-a$, $4c+a$, $5c-a$, etc. : ainsi les distances où la courbe rencontrera la ligne des abscisses, seront représentées par ma, $m(c-a)$, $m(2c+a)$, $m(3c-a)$, etc.

On prendra donc $AE = ma$, $AF = mc - ma$, $AE' = 2mc + ma$, $AF' = 3mc - ma$, etc.; et on aura les valeurs positives de x. On trouverait de même ses valeurs négatives, c'est-à-dire, les abscisses comptées vers la gauche de AS, et on verrait que les intervalles EF, E′F′, etc. sont égaux.

Cherchons maintenant en quel point l'ordonnée de cette courbe est un *maximum*. Pour cela, soit $\frac{dy}{dx} = 0$, on aura

$$\cot\frac{x}{m} = 0, \text{ et parconséquent } \sin\frac{x}{m} = 1.$$

216. Or les valeurs qui satisfont dans le sens positif à cette équation, sont

$$\frac{x}{m} = \frac{1}{2}c,\ \frac{x}{m} = \frac{5}{2}c,\ \frac{x}{m} = \frac{9}{2}c,\ \frac{x}{m} = \frac{13}{2}c, \text{ etc.}$$

Et puisque $\sin\frac{x}{m}$ est égal à 1 dans ce cas, on a $y = C$; donc aux points les plus élevés C, C′, etc. les ordonnées sont égales entr'elles et à la constante.

Pour trouver les asymptotes, on supposera $y = \infty$, ce qui donnera

$$\sin\frac{x}{m} = 0,$$

équation qui aura lieu, soit que $\frac{x}{m} = 0$, soit que $\frac{x}{m} = \pm c$, ou $\pm 2c$, ou $\pm 3c$, etc. Alors x aura une des valeurs suivantes, 0, $\pm cm$, $\pm 2cm$, $\pm 3cm$ à l'infini. La courbe doit donc avoir une infinité d'asymptotes perpendiculaires à l'axe. La première passe par l'origine des abscisses, c'est AS; la seconde passe à la distance $AD = cm$; la troisième, à une distance $AD' = 2AD = 2cm$, etc. Il en est de même dans le sens négatif.

221. PROBLÊME VIII. Entre toutes les courbes isopérimètres qui passent par les points B et D, trouver celle qui rend l'aire ABDE un *maximum*, en supposant la ligne AE donnée de position.

Si on considère les trois élémens consécutifs MN, NS, SV, il faudra qu'entre tous les isopérimètres qui passent par les points M et V, MNSV soit propre à rendre l'aire MPTVM *maximum*. Supposons donc les dy constantes, et nommons $PM = a$, $NQ = b$, $SR = c$, $Nr = Sn = Vs = m$, $Mr = u$, $Nn = t$ $Ss = z$, on aura, 1°. à cause des points M et V dont la distance est constante,

$$du + dt + dz = 0;$$

2°. à cause de l'arc MNSV dont la longueur est constante aussi,

$$\sqrt{(u^2 + m^2)} + \sqrt{(t^2 + m^2)} + \sqrt{(z^2 + m^2)} = \text{à une constante};$$

et parconséquent

$$\frac{udu}{\sqrt{(u^2 + m^2)}} + \frac{tdt}{\sqrt{(t^2 + m^2)}} + \frac{zdz}{\sqrt{(z^2 + m^2)}} = 0.$$

3°. l'espace MPTV étant un *maximum*, on a

$$adu + bdt + cdz = 0.$$

Eliminant dz et dt au moyen de ces trois équations, et ayant égard à ce que $b - c = -m$, et que $a - c = -2m$, on a

$$-\frac{u}{MN} + \frac{2t}{NS} - \frac{z}{SV} = 0, \text{ ou } \frac{Nn}{NS} - \frac{Mr}{MN} + \left(\frac{Nn}{NS} - \frac{Ss}{SV}\right) = 0,$$

Digitized by Google

Or il suit des principes du calcul différentiel que

$$-\frac{Mr}{MN}+\frac{Nn}{NS}=d\frac{Mr}{MN},$$

et que

$$\left(\frac{Ss}{SV}-\frac{Nn}{NS}\right)-\left(\frac{Nn}{NS}-\frac{Mr}{MN}\right)=d\left(-\frac{Mr}{MN}+\frac{Nn}{NS}\right).$$

Donc

$$dd\left(\frac{Mr}{MN}\right)=0.$$

Exprimant cette équation à la manière accoutumée, c'est-à-dire, faisant $Mr=dx$, $MN=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, on a

$$dd\left(\frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}\right)=0.$$

Donc

$$d\frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}=\frac{dy}{C},\text{ et }\frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}=\frac{y+C'}{C}.$$

Donc

$$\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}=\frac{C^2}{(y+C')^2}=1+\frac{dy^2}{dx^2},\text{ et }\pm\frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(\frac{C^2}{(y+C')^2}-1\right)};$$

donc

$$dx=\frac{\pm dy\,(y+C')}{\sqrt{[C^2-(y+C')^2]}},$$

et en intégrant

$$x=C''\pm\sqrt{[C^2-(y+C')^2]};$$

équation au cercle. Donc le cercle est la courbe qui, sous le même périmètre, renferme le plus de surface.

929. Pour déterminer les constantes C'', C', C, ou pour décrire le cercle cherché, on aura ces trois conditions : 1°. lorsque $x=0$, $y=AB$; 2°. lorsque $x=AE$, $y=DE$; 3°. on cherchera par l'équation précédente la longueur de l'arc BMD, et comme cette longueur est supposée connue, on aura la troisième condition nécessaire pour déterminer les constantes C'', C', C.

Digitized by Google

Résultats des Solutions de quelques Problêmes énoncés dans le cours de l'Ouvrage.

Pages.		
3	A	Soixante-quinze.
Ibid.	B	Huit cent quatre-vingt-treize.
Ibid.	C	Mille cent onze.
Ibid.	D	Soixante-sept mille cinq cent neuf.
Ibid.	E	Dix millions deux cent mille sept cent un.
Ibid.	F	302.
Ibid.	G	8001.
Ibid.	H	15016.
Ibid.	I	50001000.
Ibid.	K	22004000079.
5	L	24619.
Ibid.	M	181164.
Ibid.	N	11167080.
8	O	2000.
Ibid.	P	145.
Ibid.	Q	1111.
Ibid.	R	429.
Ibid.	S	73616.
12	T	172338076521 6.
Ibid.	U	4943221371825660.
Ibid.	X	12193263111263526 9.
24	Y	$999\frac{2443}{2568}$.
Ibid.	Z	$387\frac{21998}{99887}$.
Ibid.	A′	$1024\frac{112735}{683679}$.
32	B′	$\frac{7}{16}$.
Ibid.	C′	$\frac{13}{21}$.
Ibid.	D′	$\frac{3}{8}$.
Ibid.	E′	irréductible.
34	F′	$\frac{1}{3}$.
Ibid.	G′	$\frac{2}{3}$.
Ibid.	H′	1.
36	I′	$\frac{1}{2}$.
Ibid.	K′	4.
Ibid.	L′	1.
Ibid.	M′	19.
37	N′	Un dixième.
Ibid.	O′	Trois unités quarante-deux centièmes.
Ibid.	P′	Trois cent cinquante-quatre unités soixante-trois dix-millièmes.
Ibid.	Q′	Huit unités sept cent mille deux cent un millionièmes.
38	R′	0,0003.
Ibid.	S′	1000,04.
Ibid.	T′	9 000002.
Ibid.	U′	0,00013000.
52	X′	$63^{\#}\,8^{s}$.
Ibid.	Y′	$371^{\#}\,9^{s}\,8^{d}$.
Ibid.	Z′	$1915^{\#}\,2^{s}\,10\frac{18}{25}$.
59	A″	$5x - 34xy$.
Ibid.	B″	$\frac{3}{7}\cdot\frac{a}{b} - \frac{77}{20}\cdot a - u^2$.
Ibid.	C″	$295\alpha\beta + \varphi$.
64	D″	$2xy^3 - \frac{16}{5}x^2yz - 5uy^2z^3 + 8uxz^4$.
Ibid.	E″	$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2$.
Ibid.	F″	$\alpha^3\beta^2 + \beta^5$.
92	D″	853,6 etc.
Ibid.	E″	33333.
Ibid.	F″	30000,00045 — etc.
99	G″	2,828427124747.

Pages 228 *à* 230.

H″

I. Soit A le courier de Paris, C celui de Fontainebleau, le rapport de leurs vîtesses respectives $:: m : n$, la distance de Paris à Fontainebleau $= d$, la distance de Paris au lieu de rencontre sera

$x = \frac{md}{m+n}$. Faisant dans cette formule $d = 14$, $m = 3$, $n = 4$, on trouvera $x = 6$.

II. Si on appelle x le nombre des pas que le lévrier doit faire avant d'atteindre le lièvre, 1°. on trouvera $x = \frac{mnp}{mp - (m+a)q}$; 2°. le lévrier n'atteindra le lièvre que dans le cas où..... $mp > (m+a)q$.

III. Si on nomme x l'argent de B, y celui de C, et a le gain de ce dernier, on trouvera $x = 9$; parconséquent B aura 6 de reste; mais la seconde partie du problême est indéterminée, et en donnant à a une valeur arbitraire, l'argent du second sera $y = 4a\sqrt{\frac{a}{3}}$.

IV. La montre marquait 5 heures $27\frac{3}{11}$ minutes.

V. Le temps demandé $T''' = \frac{E'''}{\frac{E}{T} + \frac{E'}{T'} + \frac{E''}{T''}}$.

VI. Les parties qui composent le mélange seront $x = \frac{c(m-b)}{a-b}$; et $y = \frac{c(a-m)}{a-b}$.

VII. La règle de double fausse position ne résout exactement que les équations du premier degré, et dans les applications qu'on en fait ordinairement, on ne considère qu'une seule inconnue; il est donc nécessaire, lorsqu'il y en a plusieurs, que ces inconnues aient entre elles et celle que l'on considère, des rapports immédiats et bien déterminés, afin que l'on puisse déduire facilement leurs valeurs d'après les différentes suppositions qu'on fera pour la valeur de celle que l'on considère. Cela posé, tout problême du premier degré sera censé n'avoir qu'une seule inconnue; on pourra donc exprimer toutes ses conditions par une équation de cette forme $Ax = B$; A et B étant des quantités que les conditions du problême feraient trouver si on en avait besoin, et parconséquent connues. Cela posé, on fera pour x deux suppositions S, S'; il en résultera deux erreurs e, e', et l'équation $Ax = B$ se changera en ces deux autres $AS = B + e$; $AS' = B + e'$; multipliant la première par e', et la seconde par e, les produits seront $Ae'S = Be' + ee'$, $AeS' = Be + e'e$. Soustrayant la première équation de la seconde, on trouvera pour reste $A(eS' - e'S) = B(e - e')$, et parconséquent $\frac{eS' - e'S}{e - e'} = \frac{B}{A} = x$, équation dans laquelle on reconnaît la règle de double fausse position.

VIII. La somme a été placée au denier 13,463, ou à 7,428 pour $\frac{0}{0}$.

IX. $$\frac{a^2 - x^2}{a + bx - x^2} = a - bx + \frac{b^2 + a - 1}{a} \cdot x^2 - \frac{b^3 + (2a-1)b}{a^2} \cdot x^3 + \frac{b^4 + (3a-1)b^2 + a^2 - a}{a^3} \cdot x^4 - \text{etc.}$$

X. On trouvera $y = \frac{8}{3}x - \frac{1120}{81} \cdot x^2 + \frac{1111808}{10935} \cdot x^3 -$ etc.

XI. Soit a le nombre des habitans pour une époque quelconque, t le nombre d'années écoulées durant la population, b leur nombre à la fin de ce temps, l'accroissement annuel $= \frac{1}{x}$, on trouvera $a = \frac{bx^t}{(x+1)^t} \ldots b = \frac{a(x+1)^t}{x^t} \ldots t = \frac{Lb - La}{L(x+1) - Lx} \ldots$ $L\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{Lb - La}{t}$.

XII. Le plus grand des deux nombres est 32, et le plus petit est 5.

XIII. Le plus petit nombre

$$= q\left[\sqrt[3]{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right)}\right],$$

qui étant ôté de a donnera le plus grand nombre pour reste.

XIV. Ce nombre est 923.

XV. Les quatre racines sont imaginaires, et se trouveront aisément en résolvant les deux facteurs du second degré $x^2 + 2x + 3$, $x^2 - x + 1$, dont l'équation proposée a été composée.

XVI. La garnison était de 700 hommes.

XVII. Le voiturier avait tiré $39\frac{1}{2}$ bouteilles environ.

XVIII. On trouvera, 1°. $\sqrt{(14 + 6\sqrt{5})} = 3 + \sqrt{5}$; 2°. et 3°. impossibles; 4°. $\sqrt{10\sqrt{-1}} = (1 + \sqrt{-1})\sqrt{5}$.

XIX. On trouvera, 1°. $\sqrt[3]{(22 + 10\sqrt{7})} = 1 + \sqrt{7}$; 2°. impossible.

XX. On trouvera $x = 14{,}9540686\,1$, les deux autres sont imaginaires.

XXI. Les quatre racines sont $x = 3{,}208245 \ldots x = 3{,}472092 \ldots$ $x = 1{,}284723 \ldots x = 0{,}034940$.

XXII. On trouvera $y = 4{,}8278$.

XXIII. On pourra combiner de 43 manières différentes.

XXIV. Le nombre 301 satisfait aux conditions.

XXV. Deux manières	Café à 50^s	4...	11
	Café à 38	20...	7
	Café à 24	40...	46

XXVI. Quatre solutions....	Maîtres	1...	1...	2...	3
	Domestiques	2...	5...	3...	1
	Chevaux	8...	4...	4...	4

XXVII. Problême impossible.

XXVIII. 153 solutions qui commencent ainsi.....	*in-folio*	1...	2...	3...	153
	in-4°	457...	454...	451...	1
	in-12	542...	544...	546...	846

XXIX. En 1582.

XXX. En l'année 1680.

FIN.

NOTES ET ADDITIONS.

Note première, n° 25, page 9.

1°. On peut raisonner de la manière suivante pour prouver qu'en général a et b étant des nombres entiers, $a \times b = b \times a$.

Soit $a = b + c$, ou $b = a - c$, $b \times a$ n'est rien autre chose que $a - c$ pris d'abord un nombre b de fois plus b pris un nombre c de fois, ce qui s'exprime ainsi : $b \times a = a \times b - c \times b + b \times c$. Ainsi $a \times b = b \times a$, si $b \times c = c \times b$. J'appellerai produits réciproques, ces sortes de produits formés des mêmes facteurs pris dans un ordre renversé.

Soit $b = c + d$, ou $c = b + d$, suivant que la différence entre a et b est plus petite ou plus grande que b, on prouvera par un raisonnement semblable, que $b \times c = c \times b$, si $c \times d = d \times c$, ou si $b \times d = d \times b$. On voit par là que trois grandeurs f, g, h, dont l'une est la différence des deux autres, étant données, l'égalité entre les produits réciproques des deux plus grandes dépend de l'égalité entre les produits réciproques des deux plus petites. En continuant d'opérer et de raisonner de la même manière, il est clair qu'on doit trouver à la fin un résultat ou de la forme $l = m + 1$, ou de celle-ci : $l = m + m$; et par conséquent l'égalité, qu'il s'agissait de démontrer, dépend de l'égalité de produits, qui se présentent sous la forme $m \times 1$ et $1 \times m$; ou sous la forme $m \times m$ et $m \times m$. Or sous ces deux formes les produits sont évidemment égaux. Donc $a \times b = b \times a$.

On arrive à un résultat tel que $l = m + m$, toutes les fois qu'on trouve deux nombres dont la différence est égale au plus petit.

2°. Lorsqu'un produit se compose de trois facteurs a, b, c, il est facile de prouver qu'on peut les prendre dans l'ordre qu'on voudra, sans changer la valeur du produit. Je représente, pour plus de simplicité, par ac le produit de a multiplié par c. Or, par la nature même de la multiplication, si l'on rend l'un ou l'autre facteur d'un produit un certain nombre de fois b plus grand, c'est comme si l'on rendait le produit le même nombre de fois plus grand. Ainsi $ab.c$ (*) et $a.cb = ac.b$; mais $cb = bc$; donc

$$a.bc = ab.c = a.cb = ac.b, \quad \text{de même}$$
$$b.ac = ba.c = b.ca = bc.a$$
$$c.ab = ca.b = c.ba = cb.a ;$$

d'où l'on conclura, en vertu de ce qui vient d'être dit, que la valeur d'un produit composé de trois facteurs, est indépendante de l'ordre qu'on suit dans la multiplication.

(*) $ab.c$ signifie qu'on multiplie le produit ab par c. Ainsi des autres.

3°. Par un raisonnement semblable et en vertu des mêmes principes, on prouvera l'égalité de tous les produits, qu'on peut former avec quatre facteurs a,b,c,d. D'abord on reconnaîtra sans peine l'égalité des 18 produits dans lesquels la lettre a, seule ou suivie d'une ou deux autres lettres, est prise pour multiplicande; il en sera de même des autres produits où les lettres b,c,d seront employées d'une manière semblable; il ne restera donc plus qu'à chercher dans chaque groupe des 18 produits où les lettres b,c,d sont placées au premier rang, un seul produit qui soit égal à un de ceux où la lettre a occupe la première place. Cette recherche ne présente aucune difficulté; et il sera facile de trouver le produit dont il s'agit.

Nous venons de dire que dans chaque groupe la même lettre pouvait être écrite 18 fois au premier rang pour former autant de multiplicandes, ce qui donne en tout 72 arrangemens distincts propres à former les multiplicandes des produits égaux, qui peuvent résulter de la multiplication des quatre lettres a,b,c,d, combinées à cet effet de toutes les manières possibles.

Pour plus de généralité, prenons un nombre m de facteurs $a,b,c,d,e\ldots$, et ne considérons d'abord que la lettre a, comme devant occuper la première place. Il est clair qu'elle peut être prise pour multiplicande autant de fois qu'on peut former d'arrangemens différens avec les $m-1$ autres lettres. Or ce nombre d'arrangemens est exprimé par $1.2.3\ldots m-1$. Donc le nombre de produits où la lettre a seule est multiplicande, est exprimé par $1.2.3\ldots m-1$. Mais le nombre des produits où la lettre a est suivie d'une, ou de deux, ou de trois.... etc., jusqu'à $m-1$ lettres est le même que celui où cette lettre a est prise seule pour multiplicande. Il faudra donc multiplier par $m-1$, le nombre $1.2.3\ldots m-1$ que nous venons de trouver. D'ailleurs chaque lettre peut occuper la première place, et comme il y en a un nombre m, il s'ensuit que le nombre d'arrangemens distincts propres à former tous les multiplicandes possibles avec un nombre m de facteurs, est représenté par $1.2.3\ldots m-1.m-1.m$.

On pourra vérifier ce résultat sur les produits qui doivent se composer de quatre facteurs a, b, c, d. Au reste, il est visible que le mode de démonstration que nous avons employé, s'étend à un nombre quelconque de facteurs.

Note deuxième, n°. 58, page 30.

1°. Si $A=mB$, il est évident que B est le plus grand commun diviseur de A et de B; car il n'y a pas de nombre plus grand que B, qui puisse le diviser.

2°. Si $A=mB+C$, et $B=m'C$ alors C est le plus grand commun diviseur de A et de B; car si A et B pouvaient avoir un plus grand commun diviseur, à cause de $A=mm'C+C$, ce plus grand commun diviseur divisant la partie $mm'C$ de la valeur de A,

devrait aussi diviser l'autre partie C; ce qui est impossible. Donc C, etc.

3°. Si $B = m'C + D$, et $C = m''D$; par la même raison D sera le plus grand commun diviseur de B et de C, et par conséquent de B et de $A = mB + C$.

4°. Si $C = m''D + E$, et $D = m'''E$, E sera le plus grand commun diviseur de C et de D, et par conséquent de $B = m'C + D$, et de $A = mB + C$. En continuant d'opérer et de raisonner ainsi, on voit que le premier reste des divisions successives, qui divise exactement le reste précédent, est le plus grand commun diviseur des deux nombres proposés A et B.

Note troisième, n° 95, page 47.

Les fractions exactement réductibles en décimales, sont celles dont les dénominateurs n'ont pas d'autres facteurs que des puissances de 2 et de 5, parce que les nombres 10, 100, 1000, etc. par lesquels on multiplie tous les numérateurs, sont seulement divisibles par ces puissances.

Note quatrième, n° 183, page 98.

Un nombre entier N qui n'est pas une puissance parfaite d'un degré m, par exemple, ne peut avoir pour racine du même degré un entier joint à une fraction; car supposons que le nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ soit cette racine, a et b étant premiers entre eux. Il faudrait qu'on eût $\frac{a^m}{b^m} = N$. Donc, b^m serait contenu exactement dans a^m; à plus forte raison b serait contenu exactement dans a^m. Mais $\frac{a^m}{b} = \frac{a}{b} a^{m-1}$. Donc puisque a et b n'ont aucun diviseur commun, il faudrait que b fût contenu exactement dans a^{m-1}. On prouverait de la même manière que b devrait être contenu exactement dans a^{m-2}, a^{m-3}, et enfin dans a; ce qui est contre la supposition.

Note cinquième, n° 264, page 155.

Une très-simple formule algébrique met en évidence le procédé de l'auteur. Car soit x la partie du mélange la plns chère, et dont je représente le prix par a; soit ensuite y la partie du mélange au plus bas prix b, et m le prix moyen, il faudrait satisfaire à l'équation

$$ax + by = m(x + y);$$

ou

$$x(a - m) = y(m - b).$$

D'où l'on tirera $\frac{x}{y} = \frac{m - b}{a - m}$.

On voit par là qu'on résoudra la question, en prenant pour x et pour y des quantités égales ou proportionnelles à $m-b$ et à $a-m$.

Si le mélange devait être composé de trois sortes de marchandises x, y, z, dont les prix fussent respectivement a, b, c, et que le prix moyen fût représenté par m, m étant $< a$, et $< b$; mais $> c$, on aurait à satisfaire à l'équation

$$ax+by+cz=m(x+y+z)$$

ou

$$x(a-m)+y(b-m)=z(m-c)$$

ou, en faisant $x=y$; ce qui est permis, puisque la question est évidemment indéterminée,

$$x(a-m+b-m)=z(m-c),$$

d'où $\frac{x}{z}=\frac{m-c}{a-m+b-m}$; résultat qui donne pour x et pour z, les quantités $m-c$, $a-m+b-m$, ou des quantités proportionnelles à celles-ci.

La même chose aura lieu, quelle que soit la composition du mélange. Soient r, s, t, v, u, x, y, z les parties du mélange, et leurs prix respectifs a, b, c, d, e, f, g, h.

Je représenterai, comme auparavant, par m le prix moyen, que je supposerai $< a, b, c, d$, mais $> e, f, g, h$. J'aurai à satisfaire à l'équation

$$\begin{aligned} &ar+bs+ct+dv+eu+fx+gy+hz \\ &=m(r+s+t+v+u+x+y+z). \end{aligned}$$

Ou à celle-ci

$$\begin{aligned} &r(a-m)+s(b-m)+t(c-m)+v(d-m) \\ &=u(m-e)+x(m-f)+y(m-g)+z(m-h). \end{aligned}$$

En faisant $r=s=t=v$, et $u=x=y=z$, on aura

$$\frac{r}{u}=\frac{m-e+m-f+m-g+m-h}{a-m+b-m+c-m+d-m};$$

ce qui détermine les valeurs qu'on peut donner alors à r et à u.

Note sixième, n° 299, page 183.

Observons avant tout, que si a est la base logarithmique qui donne $a^{l(1+x)}=1+x$; il est impossible, au moins tant qu'on supposera une valeur réelle à $l(1+x)$, de satisfaire à cette équation de plusieurs manières; d'où il suit que le développement de $l(1+x)$ ne peut contenir de puissances fractionnaires de x, puisqu'alors $l(1+x)$ pourrait avoir plusieurs valeurs. Il est également impossible que le développement dont il s'agit renferme des puissances néga-

tives; car en faisant $x=0$, on trouverait pour $l1$ une quantité infinie, ce qui est absurde. Soit donc

$$l(1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\text{etc.};$$

les coefficiens représentant des nombres indépendans de la valeur de x. Je ne mets point de terme constant dans la série, parce qu'en faisant $x=0$, on doit avoir $l1=0$. En suivant la marche de l'Auteur, la détermination des coefficiens peut être rendue très-prompte, et la loi qu'ils observent, saisie très-facilement. Il suffit de diviser par m les deux membres de l'équation qui résulte de la substitution des valeurs de z, z^2, z^3 etc. et de l'écrire sous cette forme.

$$Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{etc.}=\left\{\begin{array}{l} Ax+\frac{m-1}{2}Ax^2+\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}Ax^3+\text{etc.} \\ +mB\left(x+\frac{m-1}{2}.x^2+\ldots\right)^2 \\ +m^2C\left(x+\frac{m-1}{2}x^2+\ldots\right)^3 \\ +m^3D\left(x+\frac{m-1}{2}x^2+\ldots\right)^4 \\ +\text{etc.} \end{array}\right.$$

Cela fait, j'observe que la valeur des coefficiens A,B,C,D, etc. est aussi tout-à-fait indépendante de la valeur de m, qu'on peut faire varier à volonté, et de plus, que ces coefficiens doivent être égaux à ceux qui leur correspondent dans le second nombre. Chacun d'eux doit donc être égalé nécessairement au nombre constant, qui multiplie la puissance correspondante; d'où l'on conclut sur-le-champ, que

$$A=A;\ B=-\frac{1}{2}A;\ C=\frac{1}{3}A;\ D=-\frac{1}{4}A;\ \text{etc.}$$

et que par conséquent

$$l(1+x)=A\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6+\ldots\right)$$

série qu'on est le maître de continuer tant qu'on voudra. La quantité A est une indéterminée, qui dépend de la base a, comme le fait voir l'équation $a^{l(1+x)}=1+x$; mais qui est constante, tant que la base a reste la même.

Note septième, n° 313, page 190.

Un nombre m de lettres étant donné, et connaissant le nombre P de produits différens de $n-1$ lettres, qu'on peut faire avec $m-1$ lettres, il s'agit de savoir quel est le nombre de lettres contenues dans la somme des produits de n lettres formées avec m

lettres. Chaque lettre devant entrer évidemment de la même manière dans la composition de ces produits, il suffit de trouver combien de fois l'une d'elles, la lettre a, par exemple, doit y entrer. Or il est visible que cette lettre doit être écrite seulement dans les produits de $n-1$ lettres, qui ne la renferment pas. Mais par la supposition, ce nombre est P. Donc la lettre a doit être écrite un nombre P de fois. Comme chacune des autres lettres doit être écrite le même nombre de fois, et qu'il y a en tout m lettres, il s'ensuit que le nombre total de lettres renfermées dans la somme des produits de n lettres qu'on peut former avec m lettres, $=mP$; mais le nombre de produits différens de n lettres est évidemment la n^e partie du nombre des lettres. Donc le nombre de ces produits $=\frac{mP}{n}$. Ainsi, par le moyen de cette formule, on est en état de calculer successivement tous les coefficiens du développement du binome. Il suffit pour cela de connaître le coefficient du second terme. Or ce coefficient est la somme de tous les seconds termes des binomes, et donne m termes différens d'une lettre; mais si m lettres donnent un nombre m de quantités différentes, $m-1$ lettres en donneront aussi $m-1$. Donc si on fait $P=m-1$, et $n=2$, afin d'avoir le nombre de produits différens de deux lettres, il viendra $\frac{m.m-1}{2}$ pour le coefficient du troisième terme du développement du binome; de même, si m lettres donnent un nombre $m.\frac{m-1}{2}$ prodnits différens de deux lettres, $m-1$ lettres en donneront $\frac{m-1}{2}.m-2$. Donc, en faisant $P=\frac{m-1}{2}.(m-2)$ et $n=3$, on aura $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$ pour le nombre des produits différens de trois lettres formés avec m lettres, ou pour le coefficient du quatrième terme. A présent la loi est manifeste, et on voit clairement que le coefficient du $n+1^e$. terme $=m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\ldots\ldots\frac{m-(n-1)}{n}$.

Note huitième, n°s 315, 316, page 193.

Ce serait peut-être ici le lieu de donner la démonstration du binome pour les cas où l'exposant n'est pas un nombre entier positif, et celle de la règle de Descartes relative à la détermination du nombre de racines positives et négatives que renferme une équation, lorsqu'elles sont toutes réelles. Mais comme ce sujet ne fait pas partie essentielle des élémens, nous nous abstenons de le traiter ici. Ceux qui voudront connaître les démonstrations dont je viens de parler,

pourront consulter les notes qui accompagnent la traduction française de l'Introduction à l'Analyse infinitésimale d'Euler (*).

Note neuvième, nos 335 et suiv., page 208.

Lorsqu'on cherche la racine cubique de $p+\sqrt{y}$, représentée par $(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{z}$, on a les deux équations suivantes pour déterminer x et y.

$$(x^2-y)=\frac{\sqrt[3]{(p^2-q)z}}{z}=a.$$

$$4x^3-3ax-\frac{p}{z}=0.$$

La seconde équation donne trois valeurs pour x, auxquelles répondent trois valeurs pour y; mais il faudra avoir l'attention de donner à $\sqrt{y}$ le signe qui lui convient; il doit être tel qu'il satisfasse dans tous les cas à l'équation $(3x^2+y)\sqrt{y}=\frac{\sqrt{q}}{z}$, ou $(3x^2+y)\sqrt{y}=\sqrt{q}$, lorsque $z=1$. C'est pour cela que dans l'application de la méthode à la recherche des racines cubiques de $10+6\sqrt{3}$, on a fait $\sqrt{-\frac{3}{2}\sqrt{-1}}=\frac{1}{2}\sqrt{-3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, et non pas $=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$; et $\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{-1}}=-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, et non pas $=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$; Par la même raison pour les racines cubiques de $-10+9\sqrt{-3}$, on doit faire $\sqrt{-\frac{27}{4}}=-\frac{3}{2}\sqrt{-3}$, au lieu de $+\frac{3}{2}\sqrt{-3}$, tandis qu'on doit prendre dans le même exemple $+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ pour $\sqrt{-\frac{3}{4}}$.

Dans l'exemple suivant, où il est question de trouver les trois racines cubiques de $-11-2\sqrt{-1}$, il faudra faire

$$\sqrt{-\frac{7}{4}-\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}\sqrt{-3}-\sqrt{-1}, \text{ et}$$

$$\sqrt{-\frac{7}{4}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{-3}-\sqrt{-1}.$$

(*) Cette traduction se trouve chez le même Libraire.

Les acines cubiques de $35 + 18\sqrt{-3}$ sont

$$-1-2\sqrt{-3}, \text{ et non } -1+2\sqrt{-3},$$

$$\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3},$$

$$-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-3}.$$

Enfin ayant trouvé pour les trois racines cubiques de $2+\frac{31}{3}\sqrt{-\frac{5}{3}}$, les trois quantités :

$$-2+\sqrt{-\frac{5}{3}},\ 1+\frac{1}{2}\sqrt{5}+\sqrt{\left(-\frac{41}{12}+\sqrt{5}\right)}, \text{ et}$$

$$1-\frac{1}{2}\sqrt{5}+\sqrt{\left(-\frac{41}{12}-\sqrt{5}\right)}.$$

Si on cherche les racines carrées de $-\frac{41}{12}+\sqrt{5}$ et de $-\frac{41}{12}-\sqrt{5}$; on trouvera

$$\sqrt{-\frac{41}{12}+\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{5}{3}}-\sqrt{-3}, \text{ et } \sqrt{-3}-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{5}{3}};$$

$$\sqrt{-\frac{41}{12}-\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{5}{3}}+\sqrt{-3}, \text{ et } -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{5}{3}}-\sqrt{-3};$$

mais pour satisfaire à l'équation $(3x^2+y)\sqrt{y}=\sqrt{q}$, on ne pourra pas prendre indifféremment l'une ou l'autre de ces racines, il faudra faire

$$\sqrt{-\frac{41}{12}+\sqrt{5}}=\sqrt{-3}-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{5}{3}};$$

$$\sqrt{-\frac{41}{12}-\sqrt{5}}=-\sqrt{-3}-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{5}{3}};$$

Les autres racines $\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{5}{3}}-\sqrt{-3}$, et $\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{5}{3}}+\sqrt{-3}$ ne satisfaisant pas à l'équation $(3x^2+y)\sqrt{y}=\sqrt{q}$, doivent naturellement être rejetées.

Note dixième, *n°* 338, *page* 209.

L'équation en z étant du 6e degré, donne pour z et par suite pour y, six valeurs différentes. Ne semblerait-il pas, d'après cela, qu'on dût trouver plus de trois valeurs pour $x=y+z$? Il est donc

à propos de faire voir que les valeurs de z et de y doivent être accouplées de manière qu'il n'en résulte pour x que trois valeurs distinctes.

Soit pour abréger $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}=m$,

et $$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}=n.$$

Puisque, $z^3=-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$,

on aura 1° $z^3=m^3$, ce qui donne pour z ces trois valeurs :

$$z=m, z=m\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right), z=m\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right).$$

2°. $z^3=n^3$, d'où résultent ces trois valeurs :

$$z=n, z=n\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right); z=n\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right).$$

D'ailleurs, à cause de $y^3+z^3=-q$, si on met à la place de z^3 sa valeur $-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$, on en conclura $y^3=n^3$, et $y^3=m^3$; ainsi lorsque

$$z^3=m^3, y^3=n^3;$$

et lorsque

$$z^3=n^3, y^3=m^3;$$

d'ailleurs il faut satisfaire à l'équation $y^2=-\frac{1}{3}p$; donc les valeurs de z et de y doivent être accouplées de la manière suivante :

$z=m$,	$y=n$
$z=m\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$,	$y=n\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$
$z=m\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$,	$y=n\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$
$z=n$,	$y=m$,
$z=n\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$,	$y=m\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$
$z=n\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$,	$y=m\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$

Donc ces six combinaisons ne donneront pour $x=y+z$, que trois valeurs différentes.

Note onzième, n° 342, page 213.

Les quatre valeurs trouvées pour x sont

$$x = \frac{1}{2}z \pm \sqrt{-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2z}},$$

$$x = -\frac{1}{2}z \pm \sqrt{-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2z}}.$$

J'observe d'abord qu'on obtient les mêmes résultats pour x, soit qu'on prenne z positivement, soit qu'on le prenne négativement. Ainsi, pour s'assurer que les six valeurs de z que donne la réduite, conduisent toujours au même résultat, il suffit de prouver que les racines positives de la réduite donnent les mêmes valeurs pour x. Or on a vu, pag. 214, qu'en supposant une des valeurs de $z = 2a$, et qu'en désignant par b et par c ce que deviennent alors les radicaux, les quatre valeurs de x seraient représentées par

$$\begin{aligned} x &= a \pm b \\ x &= -a \pm c, \end{aligned}$$

qu'ainsi l'équation proposée aurait pour facteurs, $x - a \mp b$, et $x + a \mp c$, ce qui donnerait les deux équations identiques

$$x^4 + px^2 + qx + r = \left.\begin{matrix} x^4 - 2a^2 \\ -\ b^2 \\ -\ c^2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x^2 - 2a(c^2 - b^2)x + \ a^4 \\ -a^2b^2 \\ -a^2c^2 \\ +b^2c^2 \end{matrix} \Bigg\} = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} p &= -(2a^2 + b^2 + c^2) \\ q &= -2a(b^2 - c^2) \\ r &= a^4 - a^2(b^2 + c^2) + b^2c^2, \end{aligned}$$

qu'en substituant ces valeurs dans la réduite, elle deviendrait

$$\left.\begin{matrix} z^6 - 4a^2 \\ -\ 2b^2 \\ -\ 2c^2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} z^4 + 8a^2b^2 \\ +\ 8a^2c^2 \\ +\ b^4 \\ -\ 2b^2c^2 \\ +\ c^4 \end{matrix} \Bigg| \begin{matrix} z^2 - 4a^2b^4 \\ -\ 4a^2c^4 \\ +\ 8a^2b^2c^2 \end{matrix} \Bigg\} = 0;$$

qu'enfin les trois facteurs de cette équation sont $z^2 - 4a^2$, $z^2 - (b+c)^2$, $z^2 - (b-c)^2$. Donc la réduite aura pour racines positives $z = 2a$, $z = b + c$, $z = b - c$. Si l'on substitue ces deux dernières valeurs de z dans les formules

$$x = \frac{1}{2}z \pm \sqrt{-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2z}},$$

$$x = -\frac{1}{2}z \pm \sqrt{-\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2z}},$$

ou plutôt dans les deux suivantes, qui résultent de la substitution des valeurs de p et de q en a, b, c;

$$x = \frac{1}{2}z \pm \sqrt{-\frac{1}{4}z^2 + \frac{b^2+c^2}{2} + a^2 + a.\frac{b^2-c^2}{z}}$$

$$x = -\frac{1}{2}z \pm \sqrt{-\frac{1}{4}z^2 + \frac{b^2+c^2}{2} + a^2 - a.\frac{b^2-c^2}{z}};$$

on trouvera pour x les mêmes valeurs qu'auparavant; savoir :

$$x = a \pm b$$
$$x = -a \pm c.$$

Ainsi, lorsqu'on a une équation du quatrième degré à résoudre, après avoir formé la réduite, on cherchera la racine la plus simple qu'elle puisse avoir, et si on substitue sa valeur dans les deux formules générales qui doivent donner les racines de l'équation proposée, on sera sûr d'avoir obtenu la solution la plus facile et la plus expéditive.

ADDITIONS.

Composition des équations.

Une équation quelconque $x^m - Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots \mp Rx \pm S = 0$, dans laquelle m est un nombre entier positif, et que pour abréger, je représente par $X = 0$, étant donnée, si a est un nombre qui, mis à la place de x, satisfait à l'équation, le polynome X est divisible par $x - a$; car on aura par la supposition $a^m - Pa^{m-1} + \ldots \mp Ra \pm S = 0$; et, substituant dans l'équation proposée, la valeur de S tirée de cette dernière,

$$x^m - a^m - P(x^{m-1} - a^{m-1}) + Q(x^{m-2} - a^{m-2}) - \ldots \mp R(x-a) = 0.$$

Or tout binome de la forme $x^n - a^n$, dans lequel n est un nombre entier, est divisible par $x - a$. En effet, $\frac{x^n - a^n}{x-a} = \frac{x^{n-1}.\frac{x}{a} - a^{n-1}}{\frac{x}{a} - 1}$.

Mais cette dernière expression est évidemment la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier terme est x^{n-1}, la raison $\frac{x}{a}$ et le dernier terme a^{n-1}. Donc le quotient est $x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1}$. Ainsi $X = (x-a)\,Q$; Q étant le quotient de X divisé par $x - a$. De même, si $x = b$ satisfait à $Q = 0$, on aura $Q = (x-b)\,Q'$ et par conséquent $X = (x-a)\,(x-b)\,Q'$. On pourra continuer le même raisonnement et suivre le même procédé jusqu'à ce qu'on trouve un quotient qui ne renferme plus que la première puissance de x; d'où il suit que l'équation proposée $X = 0$, pourra être mise sous la forme $X = (x-a)\,(x-b)\,(x-c) \ldots (x-l)$, le nombre des facteurs étant égal à m.

Digitized by Google

Il est visible que le nombre de facteurs doit être nécessairement égal à m, pour que leur produit donne un polynome du degré m. De plus, il est impossible de concevoir le polynome X décomposé en un nombre m de facteurs, qui diffèrent des premiers en totalité ou en partie. Car supposons pour un moment que X ait un autre facteur $x-p$, on aura donc $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots.(x-l(=(x-p)X'$; le premier membre est divisible par $x-a$, le second le sera donc aussi par la même quantité; or, par hypothèse, $x-p$ diffère de $x-a$, donc X' est divisible par $x-a$, et par conséquent $(x-b)(x-c)\ldots.(x-l)=(x-p)X''$, X'' étant le quotient de X' divisé par $x-a$; et comme on suppose pareillement $x-p$ différent de $x-b$, il faudra qu'on ait $(x-c)\ldots(x-l)=(x-p)X'''$, X''' étant $=\frac{X''}{x-b}$. En continuant le même procédé, il est visible qu'on trouverait à la fin $x-l=x-p$; d'où $p=l$. Donc, etc.

Il suit de ce qui précède, que le terme positif ou négatif, qui doit être ajouté à x pour former un des facteurs de $x^m-Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots\mp Rx\pm S$, est nécessairement un des diviseurs du dernier terme S; et c'est sur cette propriété que sont fondées les méthodes qu'on propose ordinairement pour trouver les diviseurs commensurables d'une équation. Cette recherche peut être abrégée et facilitée par les remarques suivantes.

1°. Toute équation dans laquelle les coefficiens de tous les termes sont des nombres entiers, ne peut avoir pour racine une fraction ou un nombre fractionnaire. En effet, prenons une équation d'un degré déterminé, par exemple, l'équation $x^3-px^2+qx-r=0$; si une fraction quelconque, telle que $\frac{a}{b}$, et que je suppose irréductible, pouvait satisfaire à l'équation, il faudrait que $\frac{a^3}{b^3}-p.\frac{a^2}{b^2}+q.\frac{a}{b}-r$ fût égal à zéro, ce qui est impossible; car en multipliant tous les termes par b^2, il viendrait $\frac{a^3}{b}-pa^2+qab-rb^2=0$, ou $\frac{a^3}{b}=pa^2-qab+rb^2$. Or le second membre est évidemment un entier; donc $\frac{a^3}{b}$ devrait aussi être un nombre entier; ce qui n'est pas. Il est visible que la même démonstration s'applique à une équation d'un degré quelconque, dont les coefficiens sont des nombres entiers. Donc 1°. il est inutile d'essayer des nombres fractionnaires, pour former les diviseurs commensurables d'une équation.

2°. La considération seule des signes qui affectent les termes d'une équation donnée, met en droit d'exclure les nombres qui sont au-dessus ou au-dessous de certaines limites qu'on assigne aux valeurs de ses racines; car il est clair qu'on tenterait envain de satisfaire à l'équation en prenant des nombres plus grands ou plus petits que ces limites.

Digitized by Google

Recherche des limites des nombres, qui peuvent satisfaire à une équation donnée.

Soit $X=0$, une équation du degré m et dont le premier terme x^m soit positif. Sachant que les puissances semblables des nombres croissent d'autant plus, que les nombres eux-mêmes deviennent plus grands, on conçoit d'avance qu'il est possible d'attribuer à x une valeur telle, que x^m surpasse un nombre donné, quelque grand qu'il soit, et par conséquent la somme de tous les autres termes de l'équation. Or il est évident que sitôt que l'on connaît un nombre qui, mis à la place de x, rend le premier terme plus grand que la somme de tous les autres, il est inutile d'essayer un nombre plus grand pour satisfaire à l'équation. Afin de resserrer, suivant les circonstances, la limite dont il s'agit, je supposerai que $-Nx^{m-n}$ soit le premier terme négatif, et que $-S$ soit le plus grand des coefficiens négatifs. De plus je choisirai le cas le plus défavorable, c'est-à-dire, celui où tous les termes seront négatifs depuis $-Nx^{m-n}$ jusqu'au dernier terme inclusivement, et auraient le même coefficient $-S$. Il est clair que la condition exigée sera remplie, si l'on fait $x^m > S\left(\frac{x^{m-n+1}-1}{x-1}\right)$; cette formule exprimant la somme de tous les termes négatifs, qui alors formeraient une progression géométrique; et à plus forte raison si on fait $x^m > S.\frac{x^{m-n+1}}{x-1}$, ou $x^{n-1} > \frac{S}{x-1}$. Faisons $x-1=k$, ou $x=k+1$, nous devons avoir $(k+1)^{n-1} > \frac{S}{k}$, or cette condition ne peut manquer d'être remplie, si $k^{n-1} > \frac{S}{k}$, ou $k^n > S$, ou $k > \sqrt[n]{S}$, et en remettant $x-1$ au lieu de k, si $x-1 > \sqrt[n]{S}$. ou enfin, si $x > 1 + \sqrt[n]{S}$.

Si tous les termes, excepté le premier, étaient négatifs, on aurait alors $n=1$, et la formule deviendrait $x > 1 + S$.

Après avoir assigné la limite supérieure des racines positives, celle des racines négatives se trouvera facilement de la même manière. On n'aura qu'à transformer l'équation proposée en une autre dont les racines aient un signe contraire, en écrivant $-x$ au lieu de x dans cette équation, et rendant le premier terme positif, s'il est nécessaire. Si $-Px^{m-p}$ est le premier terme négatif, et $-Q$ le plus grand coefficient négatif de cette dernière équation, la limite de la plus grande racine négative sera $1+\sqrt[p]{Q}$.

Quant aux limites des plus petites racines, pour les obtenir on transformera l'équation proposée en fesant $x=\frac{1}{y}$; car alors les plus

grandes racines de l'équation en y seront les plus petites de l'équation en x.

Manière d'avoir les racines approchées des racines réelles des équations.

I.

Si deux valeurs différentes mises à la place de l'inconnue dans une équation, donnent deux résultats de signe contraire ; si, par exemple, en faisant $x=p$, la somme des termes devient $+R$, et si, en faisant $x=q$, elle devient $-R'$, il y a nécessairement entre p et q au moins un nombre quelconque réel, qui rend l'équation $=0$; et par conséquent cette équation aura au moins une racine réelle, dont la valeur tombera entre p et q.

Soit en général l'équation proposée $P-N=0$, P étant la somme des termes positifs, et N celle des termes négatifs, et supposons d'abord $p>q$. Si en faisant $x=p$, on a $P-N>0$, et en faisant $x=q$, on a $P-N<0$, il s'ensuit que P, qui était d'abord $>N$, est devenu $<N$. Mais puisque les quantités P et N ne contiennent que des puissances entières et positives, il est évident qu'elles diminuent l'une et l'autre, à mesure que x diminue, et que celui-ci décroissant par des degrés insensibles jusqu'à ce qu'il soit devenu $=q$, P et N décroissent pareillement par des degrés insensibles, de manière pourtant que P décroîtra plus rapidement que Q, puisque de plus grand qu'il était auparavant, il est devenu plus petit que Q. Il y a donc un nombre entre p et q qui rendra $P-N=0$; et ce nombre sera une racine de l'équation proposée. Si en faisant $x=p$, on avait eu $P-N<0$, et en faisant $x=q$, on avait eu $P-N>0$; on aurait prouvé de même qu'en augmentant insensiblement les valeurs substituées à x, on ferait passer aussi successivement P et Q par tous les degrés possibles d'accroissement; et que l'accroissement de P serait plus rapide que celui de N, d'où il s'ensuit qu'il y aurait une valeur de x entre p et q, laquelle rendrait $P-N=0$. Donc etc.

Nous avons supposé tacitement que les nombres p et q étaient tous deux positifs ; mais si l'un de ces nombres ou tous les deux étaient négatifs, la proposition ne serait pas moins vraie. Car si dans l'équation proposée que je représente par $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots=0$, on fait $x=y-s$, on aura la transformée $(y-s-a)(y-s-c)(y-s-c)\ldots=0$. Donc substituer dans celle-ci $p+s$ et $q+s$ au lieu de y, ce qui donne les résultats $(p-a)(p-b)(p-c)$ ou $(q-a)(q-b)(q-c)$, revient à substituer dans la première p et q au lieu de x; donc si on suppose que cette dernière substitution donne des résultats de signe contraire, la première donnera pareillement des résultats de signe différent. Mais la quantité s étant arbitraire, peut être telle que $p+s$ et $q+s$ soient à la fois deux quantités positives, et alors l'application du raisonnement que nous venons de faire a lieu naturellement; donc l'équation en y aura nécessairement une racine comprise entre $p+s$ et $q+s$, et à cause de $x=y-s$, l'équation en x en aura une aussi entre p et q.

Digitized by Google

II.

Quel que soit le nombre n de racines réelles $a, b, c\ldots$ que renferme une équation $X=0$, que je suppose du degré m, il est toujours possible d'obtenir par des substitutions convenables autant de changemens de signe dans les résultats, qu'il y a de racines réelles et inégales; car si on suppose les racines $a, b, c, \ldots$ rangées par ordre de grandeur, en commençant par la plus petite, l'équation $X=0$, pourra être mis sous la forme $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots X'=0$, X' étant un facteur en x du degré $m-n$. Je fais d'abord abstraction du facteur X'; et je considère premièrement le cas où n est un nombre pair. Il est clair que si l'on fait $x=\alpha$, α étant $< a$, le produit de tous les facteurs simples réels sera positif, que si on fait $x=\beta$, β étant $> a$ et $< b$, le produit sera négatif; que si on fait $x > b$ et $< c$, le produit redeviendra positif, ainsi de suite; de sorte que la succession des signes dans les résultats, commencera par $+$ et finira par $-$; au contraire, si le nombre n de facteurs simples est impair, la succession des signes commencera par $-$ et finira par $+$. La proposition énoncée ci-dessus sera démontrée, si le facteur X' ne peut devenir négatif, quelque valeur qu'on donne à x. Or il est impossible que X' devienne négatif; car comme on peut toujours prendre x assez grand pour que le premier terme surpasse la somme de tous les autres, il y aurait donc deux nombres qui, substitués à x dans $X'=0$, donneraient des résultats de signe contraire. Donc X aurait encore au moins un facteur réel, et par conséquent $X=(x-a)(x-b)\ x-c)\ldots$ $X'=0$ aurait plus de n racines réelles; ce qui est contre l'hypothèse.

Si l'équation se composait seulement de racines égales ou de racines imaginaires, ou des deux à la fois, les substitutions successives qu'on pourrait faire ne donneraient jamais de résultats de signe contraire. Cela devient manifeste par la considération seule de l'équation $(x-a)^2\ (x-b)^4 X'=0$, dans laquelle X' ne comprend que des racines imaginaires. C'est ce qui avait été déjà remarqué dans le corps de l'ouvrage, page 221.

Il suit des propositions précédentes que toute équation dont le dernier terme est négatif, et le premier positif, a nécessairement une racine positive; car on obtient deux résultats de signe contraire en faisant $x=0$, et $x=k$, k étant un nombre assez grand pour rendre positive la somme de tous les termes.

On voit donc par là, 1°. que toute équation impaire dont le dernier terme est négatif, a toujours une racine réelle positive.

2°. Que toute équation d'un degré impair dont le dernier terme est positif, a nécessairement une racine négative; car en écrivant $-x$ au lieu de x, et changeant ensuite les signes de tous les termes de l'équation résultante, afin que le premier terme soit positif, on obtiendra une nouvelle équation, dont le dernier terme sera néga-

tif, et qui aura une racine positive. Donc la proposée aura une racine négative.

3°. Que toute équation paire dont le dernier terme est négatif, renferme deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative; car, d'après ce qui précède, elle aura d'abord une racine positive, et si on change x en $-x$ pour rendre positives les racines qui étaient négatives, les signes du premier et du dernier terme restent les mêmes; donc, par la même raison qu'auparavant, cette nouvelle équation aura une racine réelle positive, et par conséquent la proposée une racine réelle négative.

Après avoir fait sentir l'influence des racines égales sur les résultats des substitutions faites dans une équation, occupons-nous à présent des moyens de les reconnaître dans une équation qui en contient.

Recherche des racines égales.

Soit m le nombre des racines distinctes a, b, c, d, e.... d'une équation représentée par

$$(L)\quad x^m - Px^{m-1} + Qx^{m-2} - Rx^{m-3} \ldots \mp Tx \pm U = 0.$$

P est, comme on sait, la somme des racines prises séparément; Q la somme des produits distincts, qu'on peut faire avec toutes les racines prises deux à deux; R la somme des produits distincts qu'on peut former avec toutes les racines prises trois à trois; ainsi de suite : de sorte que T exprime le nombre des produits distincts qu'on peut former avec toutes les racines, chaque produit étant composé de $m-1$ racines, et U exprime le produit de toutes les racines $abcde$....; d'où il s'ensuit que T représente la somme de tous les quotiens qu'on peut obtenir en divisant le dernier terme U, ou le produit $abcde$.... successivement par chacune des racines a, b, c, d, e.... Ainsi cette somme ou $T = bcde \ldots + acde \ldots + abde \ldots + abce +$ etc., a manquant dans le premier produit, b dans le second, c dans le troisième, ainsi de suite jusqu'à la dernière racine, qui manquera dans le dernier produit.

Cela posé, faisons $z = x - a$, $z = x - b$, $z = x - c$, etc., l'équation qui aura pour racines ces différens binomes, sera évidemment

$$(z - \overline{x - a})\ (z - \overline{x - b})\ (z - \overline{x - c}) \ldots\ldots = 0;$$

dont le développement prendra la forme

$$z^m - P'z^{m-1} + Q'z^{m-2} \ldots\ldots \mp T'z \pm U' = 0.$$

Or U' étant le produit de tous les binomes $x - a$, $x - b$, $x - c$....; il est évident qu'on aura

$$U' = (x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d)\,(x-e) \ldots\ldots \quad \text{ou}$$
$$U' = x^m - Px^{m-1} + Qx^{m-2} - \ldots\ldots \mp Tx \pm U;$$

et

et par conséquent, d'après la remarque faite ci-dessus, on trouvera

$$T'=\left\{\begin{array}{l} \quad (x-b)\ (x-c)\ (x-d)\ (x-e)\ldots\ldots \\ +(x-a)\ (x-c)\ (x-d)\ (x-e)\ldots\ldots \\ +(x-a)\ (x-b)\ (x-d)\ (x-e)\ldots\ldots \\ +(x-a)\ (x-b)\ (x-c)\ (x-e)\ldots\ldots \\ +\text{etc.} \end{array}\right\}(M)$$

On observera que le premier produit renferme tous les facteurs, excepté le premier $x-a$; que le second produit renferme tous les facteurs, excepté le second $x-b$; que le troisième renferme tous les facteurs, excepté le troisième $x-c$; que le quatrième, etc.

Donc si on développe chacun des termes de la fonction (M), et si on fait la somme des quantités qui résultent de ces opérations, en ordonnant par rapport aux puissances de x, on aura pour le premier terme de la série, mx^{m-1}, et pour le coefficient du second terme $-(m-1)P$; car si aucune des racines a,b,c, etc. ne manquait, le coefficient $-P$ devrait être répété m fois; mais puisqu'il manque une de ces racines dans chacun des produits partiels de la fonction (M), on devra écrire $(m-1)P$ au lieu de mP, et par conséquent le second terme du développement sera $-(m-1)Px^{m-2}$. Passons au coefficient du troisième terme; il serait mQ, si aucune des racines $a,b,c,d\ldots$ ne manquait dans les produits partiels de la fonction (M), mais puisque a manque dans le premier produit, et b dans le second, le produit ab manquera deux fois. Il en sera de même des autres produits de deux lettres. Donc le produit mQ devra être diminué de $2Q$; ce qui donnera $(m-2)Qx^{m-3}$ pour le troisième terme. Par un raisonnement semblable, on prouvera que le quatrième terme du développement total sera $-(m-3)Rx^{m-4}$; ainsi des termes suivans. Le développement de la fonction sera donc représenté par

$$mx^{m-1}-(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}-(m-3)Rx^{m-4}+\ldots\ (N)$$

J'appellerai cette dernière fonction (N) la dérivée de la fonction primitive $x^m-Px^{m-1}+Qx^{m-2}-\ldots\mp Tx\pm U$, parce qu'elle dérive de celle-ci, en multipliant chaque terme par l'exposant de x, et diminuant ce même exposant d'une unité.

Supposons à présent que l'équation proposée contienne un nombre n de racines égales à a, un nombre p de racines égales à b, etc., et seulement une racine égale à f, à g, à h, etc.; il est évident que le dernier terme de l'équation en z se change alors en $(x-a)^n\ (x-b)^p\ldots(x-f)\ (x-g)\ (x-h)\ldots$, et par conséquent la fonction (M) ou T' devient

$$T'=\left\{\begin{array}{l} \quad n(x-a)^{n-1}\ (x-b)^p\ldots\ (x-f)\ (x-g)\ (x-h)\ldots \\ +p(x-a)^n\ \ (x-b)^{p-1}\ldots\ (x-f)\ (x-g)\ (x-h)\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\ (x-a)^n\ \ (x-b)^p\ldots\ (x-g)\ (x-h)\ldots\ldots\ldots \\ +\ (x-a)^n\ \ (x-b)^p\ldots\ (x-f)\ (x-h)\ldots\ldots\ldots \\ +\ (x-a)^n\ \ (x-b)^p\ldots\ (x-f)\ (x-g)\ldots\ldots\ldots \\ +\ \text{etc.} \end{array}\right\}(O)$$

La dérivée (N) devient donc égale à la fonction (O). Mais cette dernière fonction renferme manifestement toutes les racines égales de la proposée, élevées à un degré moindre d'une unité. Donc la dérivée (N) doit contenir aussi de la même manière les racines égales de la proposée. Donc si on trouve le plus grand commun diviseur de la fonction primitive et de la dérivée, on sera sûr qu'il contiendra les mêmes racines égales de la proposée, mais élevées à une puissance moindre d'une unité; ainsi, par exemple, si le plus grand commun diviseur était $(x-a)^2\ (x-b)$, on serait assuré que l'équation primitive aurait trois racines égales à a et deux racines égales à b.

On voit par là, que si le plus grand commun diviseur se présentait sous la forme d'un produit, on pourrait juger à la simple inspection du degré de multiplicité des racines égales; mais le calcul ne l'offre pas sous cette forme. On pourra remédier à cet inconvénient, en traitant le commun diviseur comme la proposée, ce qui abaissera le degré de multiplicité des racines égales, et on continuera ce procédé tant qu'il sera nécessaire; ou bien on divisera la fonction primitive par le plus grand commun diviseur qu'on aura trouvé, et il viendra un quotient qui contiendra toutes les racines différentes de l'équation, tant celles qui sont inégales, que celles qui sont égales; mais celles-ci ne seront plus qu'à la première puissance. On cherchera ensuite le plus grand commun diviseur, entre le précédent et le premier quotient; ce dernier diviseur contiendra évidemment les premières puissances des racines égales, et le quotient qui proviendra de la division du premier quotient par ce dernier diviseur sera le produit des racines inégales.

Après ce qui vient d'être exposé, la détermination du degré de multiplicité des racines égales, ne présente plus de difficulté réelle.

De l'Élimination.

Lorsque le nombre des équations données est le même que celui des inconnues, l'élimination, comme on sait, fournit les moyens d'arriver à une équation particulière qui ne renferme plus qu'une seule de ces inconnues; mais avant de présenter une méthode qui conduise à ce résultat, nous chercherons d'abord à quel degré peut monter l'équation finale, au moins pour le cas où l'on aurait seulement deux équations et deux inconnues. Nous avons besoin pour cela d'établir quelques propositions dont la connaissance peut servir ailleurs, et dont la démonstration trouve ici naturellement sa place.

L'équation (M) de l'article précédent étant divisée par l'équation (L) ou par $(x-a)\ (x-b)\ (x-c)\ (x-d)$..... donne évidemment pour quotient,

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\frac{1}{x-d}+\text{etc.},$$

ou, en développant ces fractions suivant les puissances négatives de x,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^3}{x^4}+\frac{a^4}{x^5}+\text{etc.} \\ +\frac{1}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{b^2}{x^3}+\frac{b^3}{x^4}+\frac{b^4}{x^5}+\text{etc.} \\ +\frac{1}{x}+\frac{c}{x^2}+\frac{c^2}{x^3}+\frac{c^3}{x^4}+\frac{c^4}{x^5}+\text{etc.} \\ +\frac{1}{x}+\frac{d}{x^2}+\frac{d^2}{x^3}+\frac{d^3}{x^4}+\frac{d^4}{x^5}+\text{etc.} \\ +\text{etc.} \end{array}\right.$$

Donc aussi $\frac{(N)}{(L)}$ ou

$$\frac{mx^{m-1}-(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}-\text{etc.}}{x^m-Px^{m-1}+Q^{m-2}-Rx^{m-3}+\text{etc.}}$$

$$=\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^3}{x^4}+\frac{a^4}{x^5}+\ldots\ldots \\ +\frac{1}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{b^2}{x^3}+\frac{b^3}{x^4}+\frac{b^4}{x^5}+\ldots\ldots \\ +\frac{1}{x}+\frac{c}{x^2}+\frac{c^2}{x^3}+\frac{c^3}{x^4}+\frac{c^4}{x^5}+\ldots\ldots \\ +\text{etc.} \end{array}\right.$$

et par conséquent,

$$mx^{m-1}-(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}-\text{etc.}$$

$$=(x^m-Px^{m-1}+Qx^{m-2}-Rx^{m-3}+\text{etc.})\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^3}{x^4}+\ldots\ldots \\ \frac{1}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{b^2}{x^3}+\frac{b^3}{x^4}+\ldots\ldots \\ \frac{1}{x}+\frac{c}{x^2}+\frac{c^2}{x^3}+\frac{c^3}{x^4}+\ldots\ldots \\ +\text{etc.} \end{array}\right\}$$

d'où l'on conclura, en faisant les multiplications indiquées, égalant les coefficiens qui se correspondent, et désignant par S^1, S^2, S^3, S^4.....S^m la somme des puissances successives de toutes les racines de l'équation proposée,

$$\begin{array}{l} S^1 = P \\ S^2 = PS^1 - 2Q \\ S^3 = PS^2 - QS^1 + 3R \\ S^4 = PS^3 - QS^2 + RS^1 - 4S \\ \text{etc.} \end{array}$$

et en général,

$$S^m = PS^{m-1} - QS^{m-2} + RS^{m-3} - S.S^{m-4} + \ldots\ldots$$

On voit par là que la somme des puissances semblables des racines d'une équation donnée, est une fonction rationnelle des coefficiens de cette même équation.

La somme des puissances semblables des racines $a, b, c, d\ldots\ldots$ est du nombre des expressions algébriques connues sous le nom de *fonctions invariables* ou *symétriques*, parce qu'en mettant l'une des lettres à la place d'une autre, et réciproquement, par exemple, a à la place de b, ou de c, ou etc., et, en même temps b, ou c, ou etc. à la place de a, la fonction ne change pas.

Il en est de même des produits dans lesquels les lettres $a, b, c, d\ldots\ldots$ entrent d'une manière semblable, ainsi que les exposans qui les affectent, quel que soit d'ailleurs le nombre des facteurs de chaque produit. Telles sont les expressions suivantes :

$$a^m b^{m'} + b^m a^{m'} + a^m c^{m'} + c^m a^{m'} + \ldots + b^m c^{m'} + c^m b^{m'} + \ldots\ldots + \text{etc.}$$

$$a^m b^{m'} c^{m''} + a^m c^{m'} b^{m''} + a^{m'} b^m c^{m''} + a^{m'} c^m b^{m''} + a^{m''} b^m c^{m'} + a^{m''} c^m b^{m'}$$
$$+ a^m b^{m'} d^{m''} + \ldots\ldots + b^m c^{m'} d^{m''} + \ldots\ldots + \text{etc.}$$

$$a^m b^{m'} c^{m''} d^{m''} + \text{etc.}$$

et les autres qu'on peut former semblablement en prenant un plus grand nombre de facteurs.

Il est clair que ces sortes d'expressions ne varient pas lorsqu'on met réciproquement à la place l'une de l'autre les lettres dont se compose chaque produit. Ce sont par conséquent autant de fonctions symétriques ou invariables, et dont on peut aussi assigner la valeur en fonctions rationnelles des coefficiens de l'équation, qui a pour racines $a, b, c, d\ldots\ldots$

En effet, désignons par $S.a^m b^{m'}$ la somme des produits qu'on peut former avec les puissances m et m' des racines $a, b, c\ldots\ldots$ prises deux à deux ; par $S.a^m b^{m'} c^{m''}$ celle des produits qu'on peut former avec les puissances m, m', m'' des mêmes racines combinées trois à trois, ainsi de suite ; en multipliant $S.a^m = a^m + b^m + c^m + \text{etc.}$ par $S.a^{m'} = a^{m'} + b^{m'} + c^{m'} + \text{etc.}$, on aura pour produit

$S.a^{m+m'} + S.a^m b^{m'}$. Donc $S.a^m b^{m'} = S.a^m \times S.a^{m'} - S.a^{m+m'}$;

fonction rationnelle des coefficiens $P, Q\ldots\ldots$ de l'équation qui a pour racines a, b, c, d, etc.

De même si on multiplie $S.a^m b^{m'}$ par $S.a^{m''}$, il viendra au produit

$$S.a^{m+m''} b^{m'} + S.a^{m'+m''} b^m + S.a^m b^{m'} c^{m''};$$

d'où

$$S.a^m b^{m'} c^{m''} = S.a^m b^{m'} \times S.a^{m''} - S.a^{m+m''} b^{m'} - S.a^{m'+m''} b^m,$$

fonction rationnelle des coefficiens de l'équation proposée.

On voit à présent ce qu'il y aurait à faire pour trouver la somme

des produits formés par les puissances m, m', m'', m''' des mêmes racines a, b, c, d, e, etc. combinées quatre à quatre, ainsi de suite ; et on ne peut plus douter que ces formules ne soient des fonctions rationnelles des coefficiens de l'équation dont il s'agit

Cela posé, cherchons à quel degré peut monter l'équation finale qui résulte de l'élimination d'une des inconnues qui entrent dans deux équations d'un degré quelconque.

Soient donc proposées les deux équations

$$x^m - Px^{m-1} + Qx^{m-2} - Rx^{m-3} + \ldots\ldots \pm Y = 0;$$
$$[n] + [n-1]x + [n-2]x^2 + [n-3]x^3 + \ldots\ldots + [n-n]x^n = 0.$$

Ici P exprime un facteur en y du premier degré au plus, et par conséquent de la forme $\alpha + \beta y$; Q un facteur du second degré au plus, et de la forme $\alpha + \beta y + \gamma y^2$. Les coefficiens des termes suivans seront aussi des fonctions de y qui ne peuvent croître successivement que d'un degré jusqu'au dernier terme Y, qui ne renfermera que y, et qui sera au plus du degré m. Dans la seconde équation $[n]$, $[n-1]$, $[n-2]$, $[n-3]$.....$[n-n]$ expriment des fonctions de y, qui décroissent au moins d'un degré depuis n jusqu'à $n-n$; ainsi $[n-n]$ est une quantité constante indépendante de x et de y. Si a, b, c, d..... sont supposés les fonctions de y qui représentent les m racines de la première équation; en les substituant dans la seconde, on aura m équations telles que

$$[n] + [n-1]a + [n-2]a^2 + [n-3]a^3 \ldots + [n-n]a^n = 0;$$
$$[n] + [n-1]b + [n-2]b^2 + [n-3]b^3 \ldots + [n-n]b^n = 0;$$
$$[n] + [n-1]c + [n-2]c^2 + [n-3]c^3 \ldots + [n-n]c^n = 0;$$
$$[n] + [n-1]d + \text{etc.}$$
etc.

Or l'équation finale doit satisfaire à ces m équations; elle se composera donc de leur produit. Mais ce produit renfermera visiblement autant de produits partiels qu'on pourra former de combinaisons différentes, en prenant seulement un terme dans chacune des équations; et comme les racines a, b, c, d..... doivent se combiner entre elles de la même manière, il en résultera nécessairement des fonctions symétriques de ces racines, lesquelles par conséquent pourront, comme nous venons de le voir, être exprimées par des fonctions rationnelles des coefficiens P, Q, R, S, etc. de l'équation proposée. Mais d'après la notation que nous avons adoptée, chaque terme de la seconde équation se composant de deux facteurs, l'un représenté par n diminué d'un certain nombre entier, et l'autre exprimé par x élevé à une puissance désignée par le même nombre, il s'ensuit que dans chaque produit partiel, qui contient comme facteurs plusieurs puissances égales ou inégales des racines a, b, c, etc., quel qu'en soit le nombre, la somme des exposans de ces facteurs est toujours égale à celle des nombres, qui, dans le même produit, sont retranchés de n. Cette remarque

jointe à la considération des valeurs qu'on obtient pour $S.a^m$, $S.a^m b^{m'}$, $S.a^m b^{m'} c^{m''}$, etc. en fonctions rationnelles des coefficiens P, Q, R... de la première équation, suffit pour faire connaître à quel degré peut s'élever chacun des produits partiels, et par conséquent le produit total lui-même; et avec un peu d'attention, on sera bientôt convaincu que ce degré ne peut surpasser le produit mn des deux plus hautes dimensions des équations données.

S'il arrivait qu'on trouvât pour résultat une équation supérieure au degré mn, ce serait une preuve incontestable que la méthode employée aurait introduit un ou plusieurs facteurs inutiles, qu'il faudrait rejeter comme étrangers à la question. Mais si l'équation finale se trouvait seulement du degré mn, ou même d'un degré inférieur, on aurait tort d'en conclure sans autre examen que l'opération n'a pas introduit de facteurs inutiles, car il est possible que l'équation finale ne doive pas monter au degré marqué par le produit mn des deux plus hautes dimensions des équations proposées.

Cela posé, passons à l'élimination d'une des inconnues. Je ne présenterai point les différens procédés qu'on peut suivre pour atteindre le but qu'on se propose en cette occasion; je me contenterai d'exposer la méthode qui est fondée sur la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynomes, et je l'accompagnerai de quelques réflexions qui m'ont paru assez importantes pour trouver place ici.

Reprenons les deux équations générales que nous venons de considérer. J'observe que si elles peuvent être toutes deux satisfaites lorsqu'on met dans chacune d'elles une même valeur pour x, et une même valeur pour y, par exemple, 4 pour x et 5 pour y, ces deux équations, après la substitution de la valeur 5 de y, auraient une racine commune $x=4$, et que par conséquent elles deviendraient divisibles l'une et l'autre par $x-4$, ou même par une puissance de $x-4$, si en posant $y=5$, on pouvait satisfaire aux deux équations en faisant plusieurs fois $x=4$; mais si la même valeur 5, mise à la place de y, doit donner pour x plusieurs valeurs différentes, qui satisfassent aux équations proposées, celles-ci devront avoir un facteur commun d'un degré supérieur au premier, lequel se composera des différentes valeurs de x, correspondantes à la même valeur de y. Si donc on avait mis dans les deux équations à la place de y, sa valeur numérique, il est constant que par la méthode ordinaire du plus grand commun diviseur, on trouverait à la fin de l'opération un quotient exact; et il faudrait égaler à zéro le diviseur qui l'aurait donné pour en tirer la valeur ou les valeurs de x correspondantes à celle de y. Mais on conçoit que la présence de y s'oppose à ce qu'on arrive toujours à un pareil résultat. Au lieu d'obtenir un quotient exact, on doit trouver à la fin, généralement parlant, un reste en y; et ce reste sera tel, que si on y remplaçait y par sa valeur numérique, il deviendrait nul. Il faudra donc réciproquement,

Digitized by Google

après l'avoir trouvé, l'égaler à zéro pour en déduire les valeurs de y qui, concurremment avec les valeurs correspondantes de x, doivent satisfaire aux deux équations.

Si la dernière division se faisait exactement, alors les deux équations auraient pour facteur une même fonction de x et de y. Ainsi, en représentant l'une par $M.N=0$, l'autre serait exprimée par $M'.N=0$. Il est évident qu'en faisant $N=0$, on pourra satisfaire aux deux équations d'une infinité de manières, N étant par la supposition, une fonction de x et de y; mais si on négligeait le facteur commun N, on aurait à satisfaire aux deux équations $M=0$, $M'=0$; ce qui rentre dans le cas général.

Si l'on trouvait un reste qui, au lieu d'être une fonction de y, ne contînt que des constantes, cela indiquerait qu'il y aurait impossibilité de satisfaire à la fois aux deux équations proposées, en mettant dans l'une et dans l'autre une même valeur pour y et une même valeur pour x; car ce résultat est incompatible avec l'existence d'un commun diviseur, qui exige que le dernier reste soit égal à zéro.

Lorsque des deux équations proposées, l'une est d'un degré quelconque, et que l'autre est seulement du premier degré, l'élimination de x se fait sur-le-champ en mettant dans la première la valeur de x tirée de la seconde. Dans ce cas, chaque racine de l'équation en y donnera une valeur correspondante pour x, et autant que cette équation aura de racines réelles, autant on doit trouver pour x de valeurs réelles qui satisferont aux deux équations. C'est une conséquence naturelle de ce que la valeur de x dépend d'une équation du premier degré. Si la seconde équation est d'un degré supérieur au premier, et si en cherchant le plus grand commun diviseur, on arrive par la suite des opérations à un reste, qui ne contienne x qu'à la première puissance, en égalant ce reste à zéro, ainsi que le suivant, qui sera seulement une fonction de y, comme l'exigent les circonstances de la question actuelle; les racines réelles de l'équation finale en y doivent en général donner encore pour x autant de valeurs réelles; mais on aurait tort d'en conclure que les valeurs de x, correspondantes aux valeurs imaginaires de y, fussent toujours imaginaires. En effet, quoique le commun diviseur soit supposé ne contenir x qu'au premier degré, il faut voir si les y qu'il renferme ne sont pas combinés de manière à donner pour x une valeur réelle. Au surplus ces valeurs correspondantes de x et de y, soit réelles, soit imaginaires, doivent satisfaire en même temps aux deux équations, pourvu que l'équation finale ne renferme pas de facteurs inutiles.

Si le dernier reste diviseur, c'est-à-dire celui qui donne immédiatement pour quotient l'équation finale, est d'un degré pair, il est possible qu'aux valeurs réelles de y répondent des valeurs imaginaires de x, par la raison que les racines d'une équation de degré pair peuvent être toutes imaginaires. Par exemple, si les deux équations proposées ne renfermaient que des puissances paires de x, il est

certain qu'on arriverait à l'équation finale en y, sans avoir passé par une division, dont le diviseur contînt x seulement à la première puissance. Dans ce cas il n'y a aucun doute que les valeurs de x, dépendant d'une équation de degré pair, peuvent être toutes imaginaires, même lorsque l'équation finale aurait des racines réelles.

Ce qui vient d'être exposé doit mettre à portée de discuter les cas où le dernier reste diviseur serait du troisième degré, et en général d'un degré plus élevé.

On serait porté à croire que toutes les fois que, par la suite des opérations on parvient à un reste diviseur qui contient x seulement à la première puissance, les racines réelles de l'équation en y devraient toujours donner pour les valeurs correspondantes de x, des quantités réelles. La conclusion serait vraie, si ce reste diviseur n'était pas décomposable en facteurs; mais s'il avait un facteur de la forme $ax+B$, B étant une fonction de y et de constantes, en divisant par ce facteur, il viendrait au quotient une fonction de y, qui, égalée à zéro, pourrait donner des valeurs réelles pour y, auxquelles répondraient des valeurs imaginaires pour x. Ce cas peut être assimilé à celui où l'inconnue x étant élevée à des puissances paires, ne pourrait être exprimée par une fonction rationnelle de y; mais si on fait le facteur $ax+B=0$, et si on met dans B les valeurs réelles que pourra donner pour y l'équation finale, les valeurs de x, qui en résulteront, ne pourront manquer d'être réelles, et les valeurs correspondantes de x et de y, trouvées de cette manière, satisferont aux deux équations primitives. Pour rendre cela sensible, considérons les deux équations

$$x^3-3ax^2+2a^2x-6ay^2=0,$$
$$x^2-2ay=0.$$

En divisant la première équation par la seconde, on aura pour reste

$$(2a^2+2ay)\,x-6ay^2-6a^2y;$$

lequel donnera, après les préparations ordinaires, pour équation finale,

$$9y^2-2ay=0.$$

J'observe que le dernier reste diviseur égalé à zéro, peut être ramené à la forme

$$(y+a)\,(x-3y)=0.$$

Si on néglige le facteur $y+a$, et qu'on fasse seulement $x-3y=0$; les deux équations

$$9y^2-2ay=0$$
$$x-3y=0,$$

donneront pour valeurs correspondantes de y et de x:

$$y=0,\quad x=0;$$
$$y=\frac{2}{9}a,\quad x=\frac{2}{3}a;$$

lesquelles, substituées dans les équations proposées, les rendront l'une et l'autre égales à zéro. Mais si, sans avoir égard à l'équation finale $9y^2-2ay=0$, on fait le facteur $y+a=0$, on en conclura $y=-a$. Cette valeur substituée dans $x^2-2ay=0$, donne $x^2+2a^2=0$; d'où $x=\pm a\sqrt{-2}$; ainsi les valeurs correspondantes à $y=-a$ sont les deux quantités imaginaires $\pm a\sqrt{-2}$, et ces valeurs de x et de y satisfont aux équations proposées. Cependant la valeur $-a$ de y n'est point renfermée dans l'équation finale $9y^2-2ay=0$. Qu'en conclure? Qu'il est possible, dans certains cas, de trouver des valeurs de x et de y, qui satisfassent aux équations primitives, indépendamment des valeurs qu'on peut déduire de l'équation finale, trouvée en suivant à la lettre la méthode prescrite, pour la détermination du plus grand commun diviseur de deux polynomes.

Il peut donc arriver que l'application de la méthode du plus grand commun diviseur, suivie strictement, fasse quelquefois disparaître dans l'équation finale un facteur utile à la solution; mais s'il est possible que l'élimination, comme nous venons de le voir, fasse disparaître un facteur utile, il est incontestable aussi qu'elle introduit le plus souvent des facteurs étrangers à la question, et que même le nombre et la nature de ces facteurs varient suivant la méthode qu'on a employée.

Prenons pour exemple les deux équations

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$
$$Ax^2+Bx+C=0.$$

Si on cherche l'équation finale par la méthode ordinaire du plus grand commun diviseur, cette équation renfermera le facteur inutile A^2; et si, après avoir multiplié successivement la première équation par A et par C, et la seconde par a et par d, on retranche les produits l'un de l'autre pour avoir des valeurs de x, et si on égale ces deux valeurs, on trouvera l'équation finale avec le facteur superflu C.

Les exemples que nous venons d'apporter montrent la nécessité d'avoir égard aux diviseurs que l'élimination peut introduire ou faire disparaître dans l'équation finale, et de ne pas s'en tenir strictement à la méthode enseignée ordinairement pour trouver le plus grand commun diviseur de deux polynomes. La nature de cet ouvrage ne nous permet pas d'approfondir davantage cette matière. Ceux qui voudront plus de détails, pourront consulter un mémoire de M. Bret, professeur de mathématiques transcendantes au Lycée de Grenoble, imprimé dans le 15e cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique. Nous finirons par une remarque dont on peut quelquefois faire usage pour abréger les calculs. Lorsque dans la suite des opérations on est parvenu à trouver un reste où l'inconnue x n'est plus qu'au premier degré, en égalant ce reste à zéro, pour en tirer la valeur de x et en la substituant dans l'une ou l'autre des

équations primitives, on aura une équation en y, qui sera celle qu'on se proposait de trouver. Prenons pour exemple les deux équations

$$Ax^2+Bx+C=0$$
$$A'x^2+B'x+C'=0;$$

en suivant les procédés ordinaires, on aura

pour 1er dividende.. $AA'x^2+BA'x+CA'$.
Pour 1er reste..... $(A'B-AB')x+A'C-AC'$; ou
$Px+Q$,

en représentant $A'B-AB'$ par P, et $A'C-AC'$ par Q;

pour 2e dividende... $A'Px^2+B'Px+C'P$;
pour 3e dividende... $P(B'P-A'Q)x+P^2C'$;
et pour 3e reste..... $P^2C'-B'PQ+A'Q^2$.

Si en s'arrêtant au reste $(A'B-AB')x+A'C'-AC'$, on l'eût égalé à zéro, et qu'on eût tiré de cette équation la valeur de x pour la mettre dans les proposées, on eût trouvé deux équations identiques avec l'équation finale.

Remarquons encore à cette occasion que les équations qui doivent servir à résoudre la question actuelle, sont

$$(1)\quad P^2C'-B'PQ+A'Q^2=0$$
$$(2)\quad Px+Q=0.$$

Or si A' et C' ont un facteur commun en y, en égalant ce facteur à zéro, l'équation (1) sera satisfaite, et l'autre (2) donnera $x=0$; en substituant, on satisfera à la seconde des équations proposées, mais non à la première, à moins que C ne renferme aussi le même facteur. Cette observation vient à l'appui des remarques que nous avons faites ci-dessus, et tend à les confirmer.

Pour ne pas donner trop d'étendue à ces Additions, nous les terminerons ici, et pour les autres questions, nous renvoyons le lecteur au Complément d'Algèbre de M. Lacroix, et à la Résolution numérique des Equations, par M. Lagrange.

Note onzième, n° 749, page 387.

L'équation la plus générale de la ligne droite peut être mise sous la forme

$$y=ax+b,$$

a étant la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'axe des abscisses, et b exprimant la partie de l'axe des ordonnées comprise entre l'origine et le point de rencontre de la droite avec cet axe. Cette distance se trouve en faisant $x=0$, et si on voulait avoir la distance de l'origine au point de rencontre de la droite avec l'axe des abscisses, on ferait $y=0$; d'où $x=-\frac{b}{a}$.

Digitized by Google

La tangente a augmente en même temps que l'angle, mais dans un plus grand rapport, de manière que a devient infini lorsque l'angle est droit; passé ce terme, a devient négatif : cela est connu par la Trigonométrie.

On peut à cette occasion se proposer plusieurs problèmes, dont on sera bien aise de trouver ici la solution.

I.

Mener une parallèle à une droite représentée par l'équation

$$y = ax + b.$$

L'équation de toute autre droite est de la même forme

$$y = a'x + b' :$$

et pour exprimer que celle-ci est parallèle à la première, il suffira de faire $a' = a$; et si a, b, b' sont donnés, il sera facile d'avoir les points de rencontre de ces droites, soit avec l'axe des ordonnées, soit avec l'axe des abscisses.

II.

Faire passer une droite par un point dont les coordonnées x' et y' sont données.

L'équation générale $y = ax + b$, devra être satisfaite en mettant y' et x', à la place de y et de x; d'où $y' = ax' + b$, et retranchant la seconde de la première, il viendra :

$$y - y' = a\,(x - x').$$

III.

Trouver l'angle d'intersection de deux droites.

On observera que α et α' étant les angles que forment les droites avec l'axe des x, l'angle cherché $= \alpha - \alpha'$, et par conséquent sa tangente $= \frac{a - a'}{1 + aa'}$.

Si les droites sont perpendiculaires l'une à l'autre, l'angle cherché est droit, sa cotangente est égale à zéro, et par conséquent $\frac{1 + aa'}{a - a'} = 0$; ou $aa' + 1 = 0$; équation de condition pour que deux droites soient perpendiculaires l'une à l'autre.

IV.

Les équations de deux droites étant données, trouver leurs points d'intersection, si elles doivent se rencontrer.

Soient $\left\{\begin{matrix} y = ax + b \\ y' = a'x + b' \end{matrix}\right\}$ leurs équations, il est clair que pour les

les points d'intersection, les y et les x doivent être les mêmes; donc $ax+b=a'x+b'$; d'où $x=\frac{b'-b}{a-a'}$; et $y=\frac{ab'-a'b}{a-a'}$. Si $a=a'$, les droites sont parallèles, et si en même temps $b=b'$, les deux lignes n'en font plus qu'une.

V.

Mener par un point dont les coordonnées sont x' et y', une droite perpendiculaire à une autre droite représentée par l'équation $y=ax+b$. D'après ce qui précède, il est évident que l'équation de la perpendiculaire sera $y-y'=-\frac{1}{a}(x-x')$. Pour les points d'intersection, que je suppose répondre aux coordonnées x'' et y'', on aura

$$y''=ax''+b$$
$$y''-y'=-\frac{1}{a}(x''-x'),$$

équations par le moyen desquelles il sera aisé d'avoir les valeurs de x'' et de y''. La distance des points qui ont pour coordonnées x',y', et x'',y'' sera égale à $\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}$.

On trouve facilement par ce qui précède, qu'une droite qui passe par deux points dont les coordonnées sont x',y'; x'',y'', donne pour expression de la tangente de l'angle qu'elle forme avec l'axe des x,

$$a=\frac{y'-y''}{x'-x''}.$$

Cette remarque fournit un moyen assez élégant de trouver l'équation de la droite, qui touche une section conique en un point dont les coordonnées sont x' et y'. Nous prendrons l'ellipse dont l'équation est $y^2=\frac{n^2}{m^2}(m^2-x^2)$.

L'équation générale de la tangente en question, est

$$(y-y')=a(x-x').$$

Supposons d'abord que la droite qui passe par le point dont les coordonnées sont x' et y', rencontrent l'ellipse en un autre point dont les coordonnées soient x'' et y''. Nous venons de voir que la tangente de l'angle que cette droite forme avec l'axe des abscisses a pour expression

$$a=\frac{y'-y''}{x'-x''}.$$

indépendamment de la nature de la courbe rencontrée par la droite. Pour exprimer à présent que les points de rencontre appartiennent à

l'ellipse, il faudra satisfaire aux deux équations

$$y'^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x'^2)$$

$$y''^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x''^2);$$

d'où l'on tirera $\quad y'^2 - y''^2 = -\frac{n^2}{m^2}(x'^2 - x''^2),$

ou $\quad (y' - y'')(y' + y'') = -\frac{n^2}{m^2}(x' - x'')(x' + x'');$

et par conséquent $\quad \frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{n^2}{m^2} \cdot \frac{x' + x''}{y' + y''}.$

Substituant dans la valeur de a, il viendra $-\frac{n^2}{m^2} \cdot \frac{x' + x''}{y' + y''}$; pour exprimer ensuite que les deux points d'intersection se réunissent en un seul dont les coordonnées sont x' et y', il faudra faire $x'' = x'$ et $y'' = y'$; d'où

$$a = -\frac{n^2}{m^2} \cdot \frac{x'}{y'}.$$

C'est là l'expression de la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des x la droite qui touche la courbe au point dont les coordonnées sont x' et y'. Substituant enfin dans l'équation générale de la tangente, nous aurons

$$y - y' = -\frac{n^2}{m^2} \frac{x'}{y'}(x - x').$$

Faisant disparaître les dénominateurs, et mettant à la place de y'^2 sa valeur tirée de l'équation de la courbe, nous obtiendrons pour dernier résultat

$$m^2yy' + n^2xx' = m^2n^2:$$

On voit ce qu'il y aura à faire pour les autres sections coniques.

Les bornes de cet Ouvrage ne nous permettent pas de considérer la ligne droite dans l'espace, et encore moins de parler ici de l'équation du plan; nous espérons nous en occuper dans une autre circonstance, et donner plus de développement tant à ce que renferme la suite de l'Ouvrage, qu'aux questions que nous avons déjà traitées.

Explication sommaire du nouveau système des poids et mesures.

La mesure fondamentale adoptée dans ce nouveau système, et qui sert à la détermination de toutes les autres, est le *mètre*. Le mètre est la longueur de la dix-millionième partie du quart du méridien

qui passe par Paris : il équivaut à 3^{pieds} 0^{p} $11^{l},296$. Ainsi il est facile d'avoir le rapport de la toise au mètre. Pour rendre tous les calculs du nouveau système uniformes, et les adapter au calcul décimal, on a fait de l'unité, qui doit servir de terme de comparaison dans chaque espèce de mesure, des multiples de dix en dix fois plus grands, et des sous-multiples de dix en dix fois plus petits. On a désigné ces multiples et ces sous-multiples par le même mot que l'unité à laquelle ils se rapportent, en le faisant précéder des mots *déca*, *hecto*, *kilo*, *myria*.... pour les premiers, et des mots *déci*, *centi*, *milli*..... pour les derniers. Ainsi par *décamètre*, on doit entendre dix mètres; par *hectomètre*, dix décamètres ou cent mètres; par *kilomètre*, dix hectomètres, ou cent décamètres, ou mille mètres, ainsi de suite. De même un *décimètre* sera la dixième partie d'un mètre; un *centimètre*, la dixième partie d'un décimètre, ou la centième partie d'un mètre, etc.

L'unité de volume se nomme *stère:* c'est un mètre cube qui sert pour les bois de chauffage.

L'unité de capacité se nomme *litre :* cette mesure équivaut à un décimètre cube.

L'unité de poids est le *gramme :* le gramme équivaut au poids d'un centimètre cube d'eau pure ou d'eau distillée qu'on a ramenée à son *maximum* de densité.

L'*are* remplace l'arpent : c'est une superficie égale au *décamètre* carré, ou à cent mètres carrés.

On sait que le *franc* est l'unité monétaire, et qu'il vaut dix *décimes* ou cent *centimes*.

Fin des Notes et des Additions.

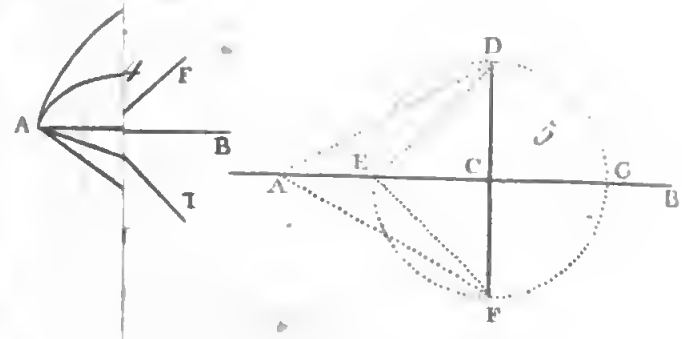
608491

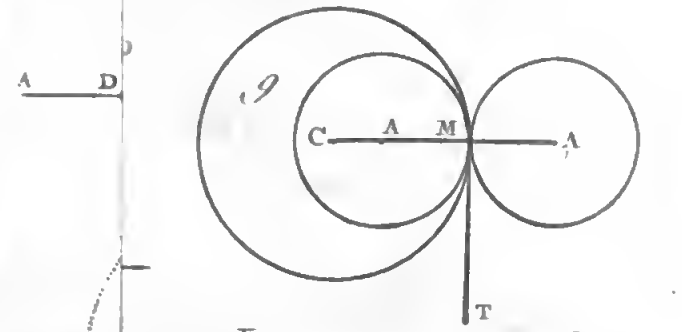
Digitized by Google

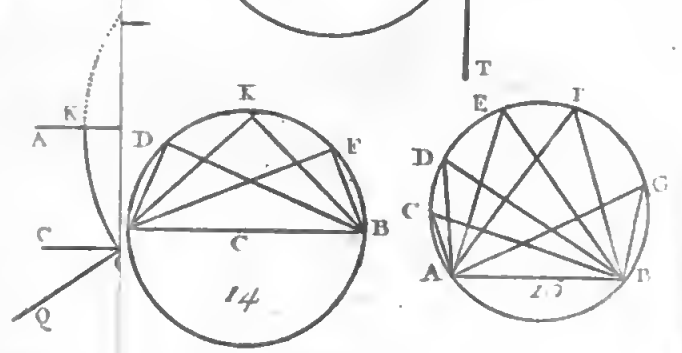
Pl 1

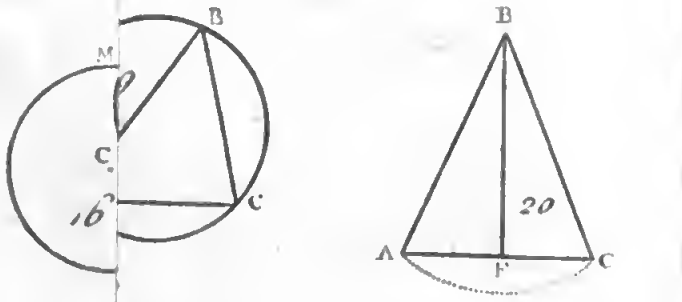
Fig 1

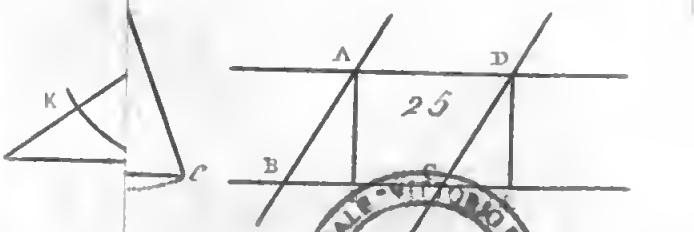
Fig 1









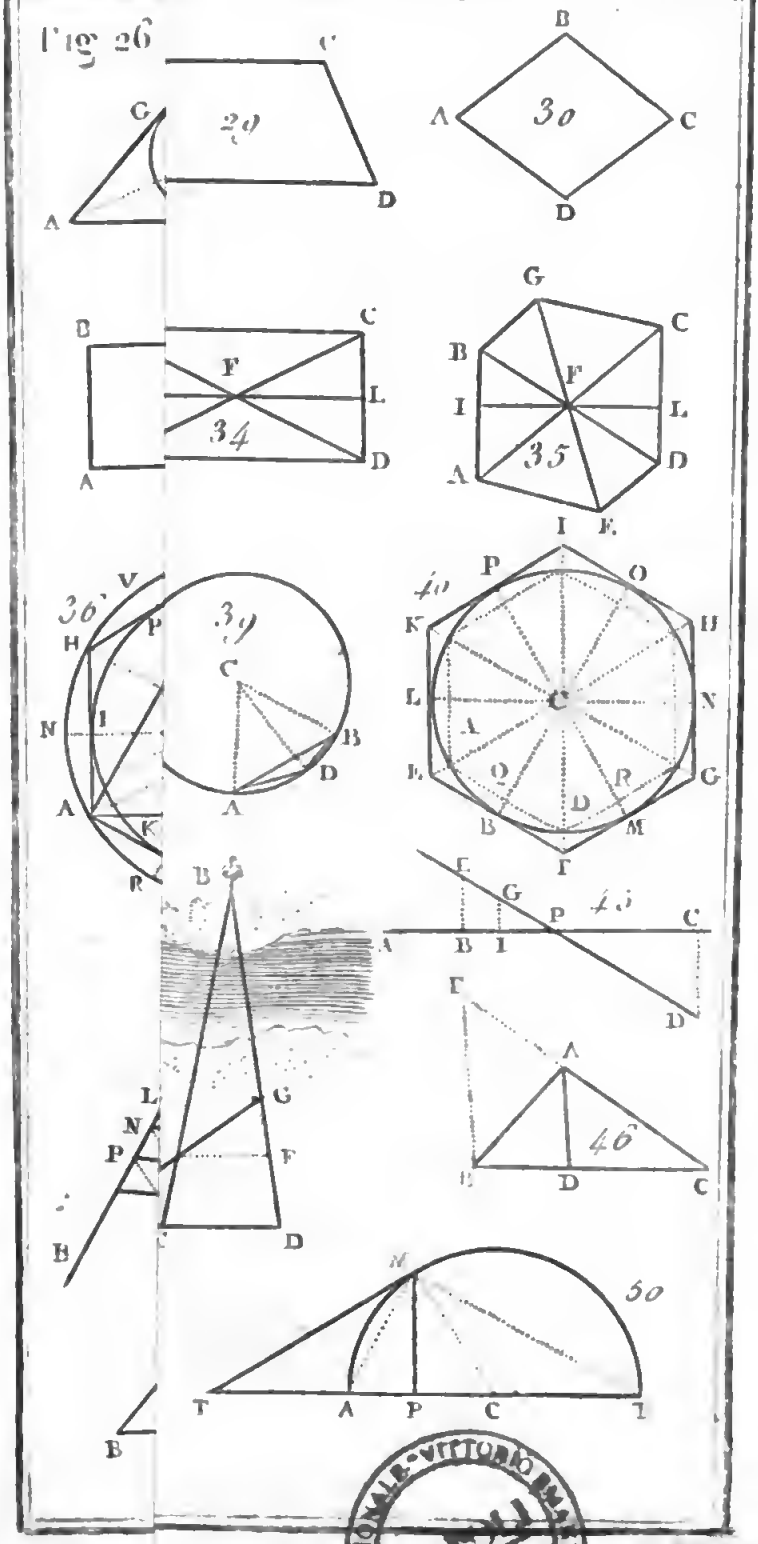


BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

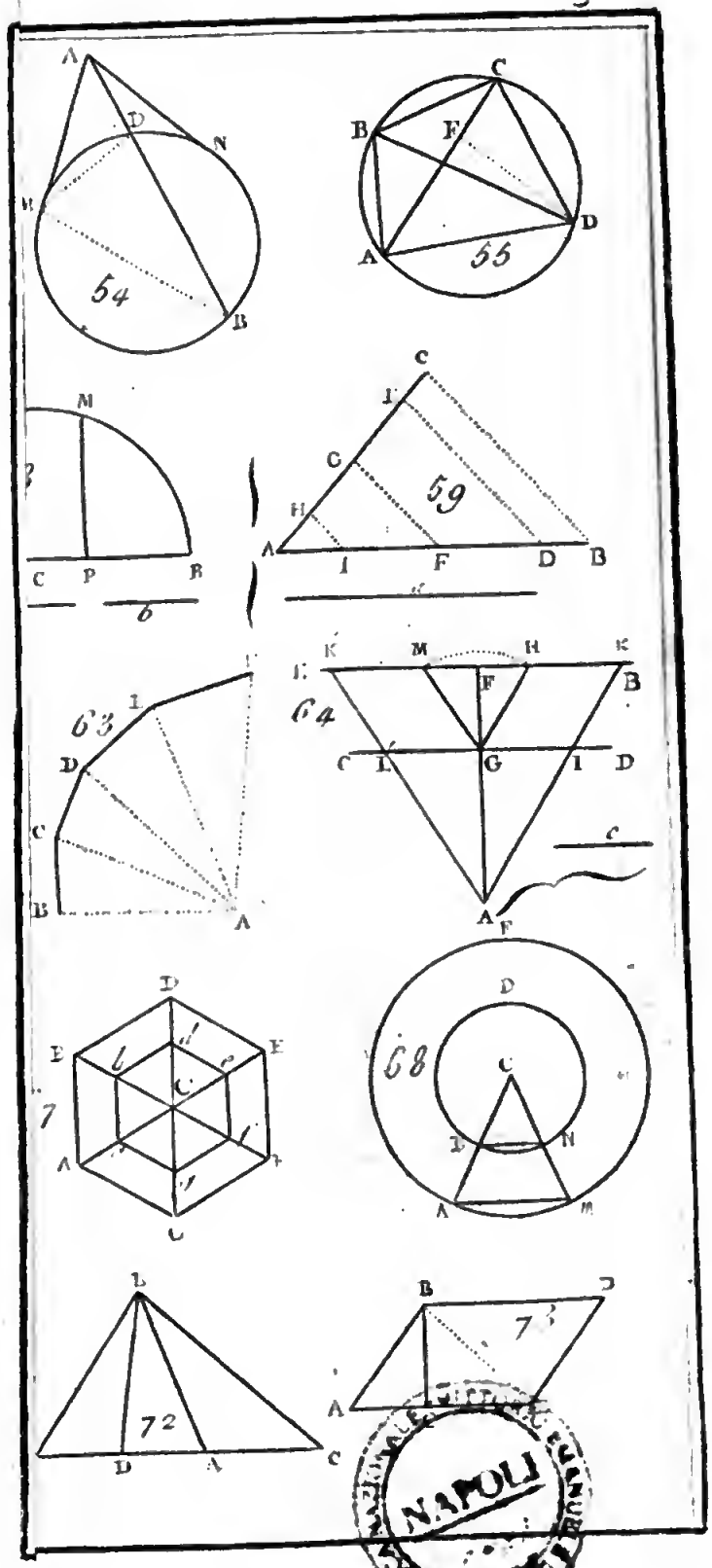
Fig 26



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google

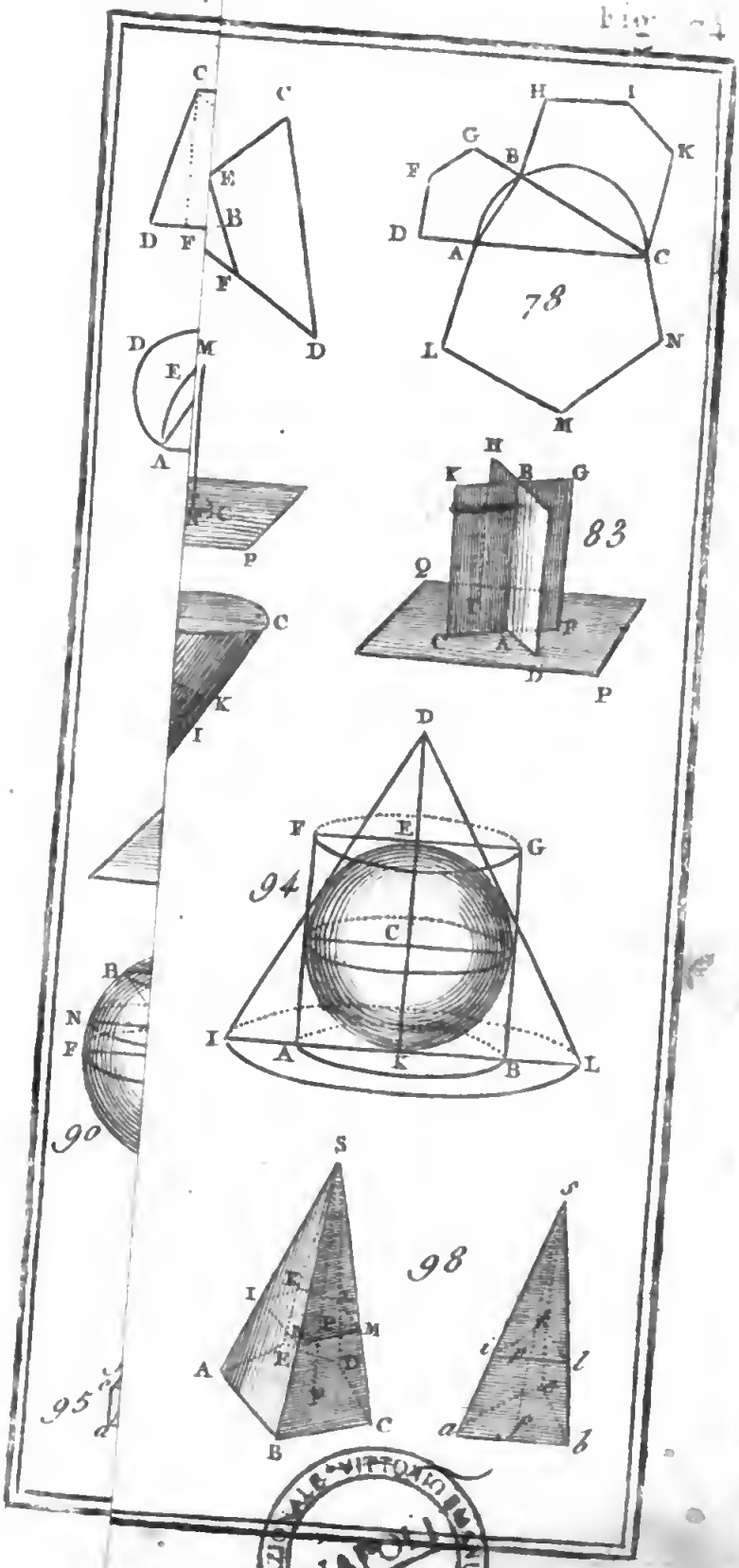
Fig. 51



NAPOLI

Digitized by Google

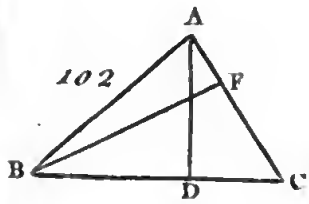
Pl. 4

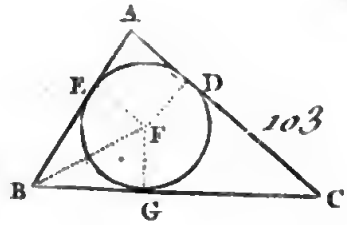


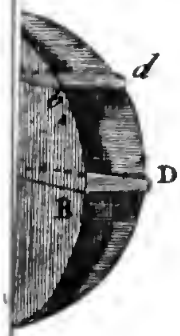
BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

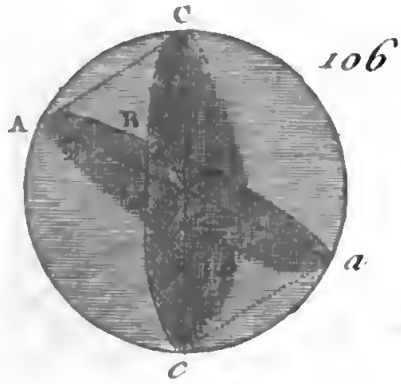
Digitized by Google

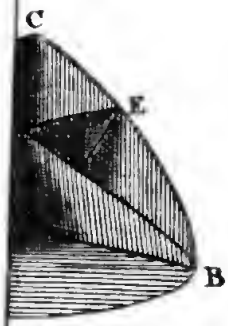
Fig. 99.

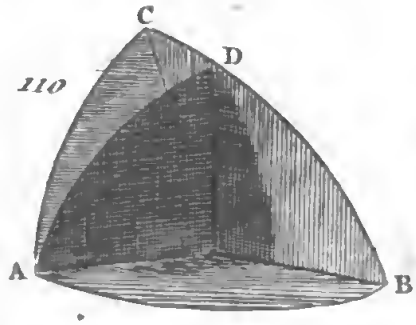


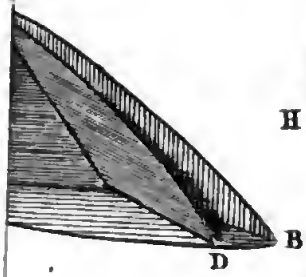


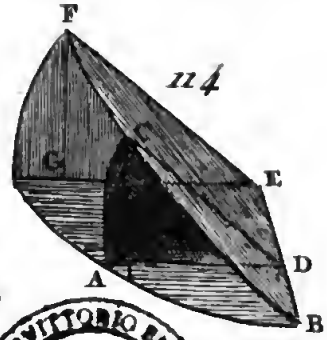












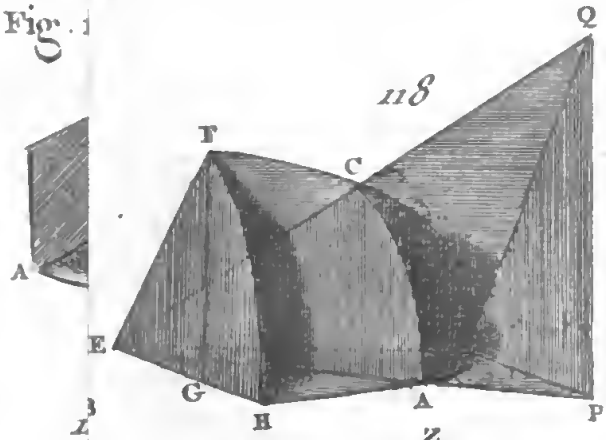
NAPOLI
NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III

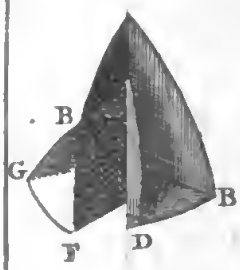
Digitized by Google

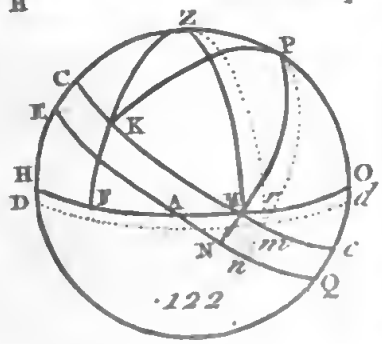
Fig. 115.

Fig. 1

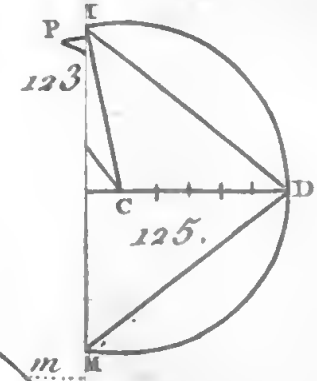
118



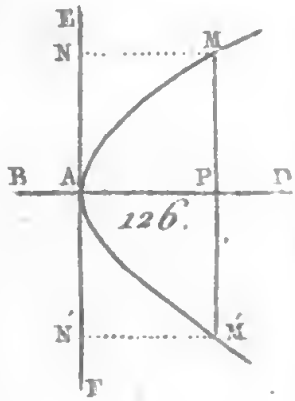




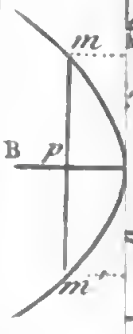
122



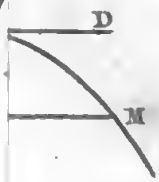
125.

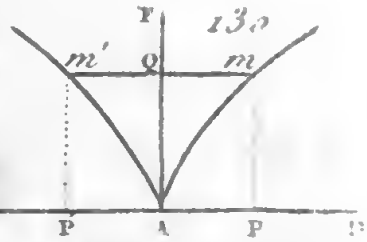


126.



129

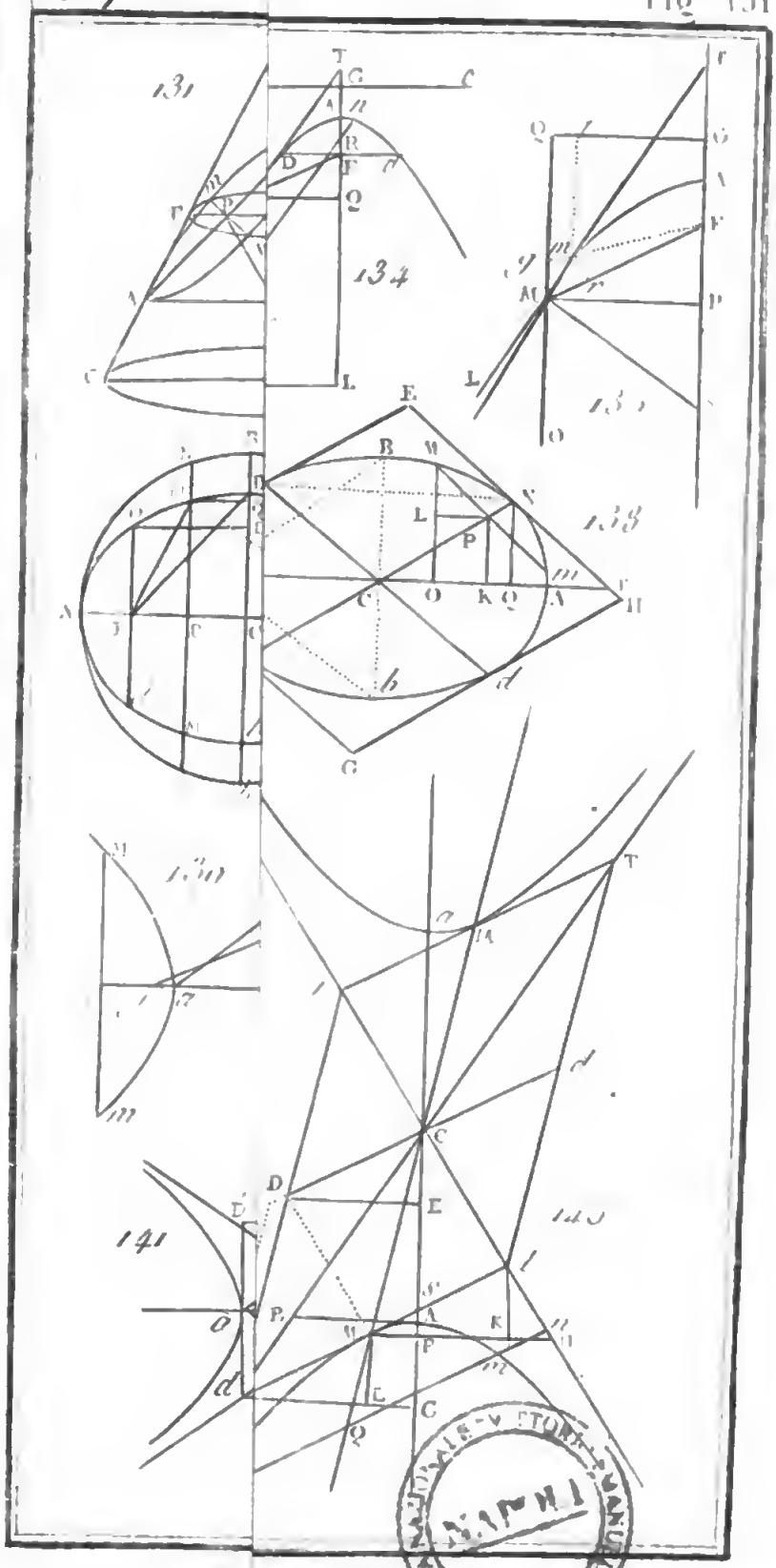




130

VITTORIO EMANUELE III · BIBLIOTECA NAZIONALE · NAPOLI

Digitized by Google

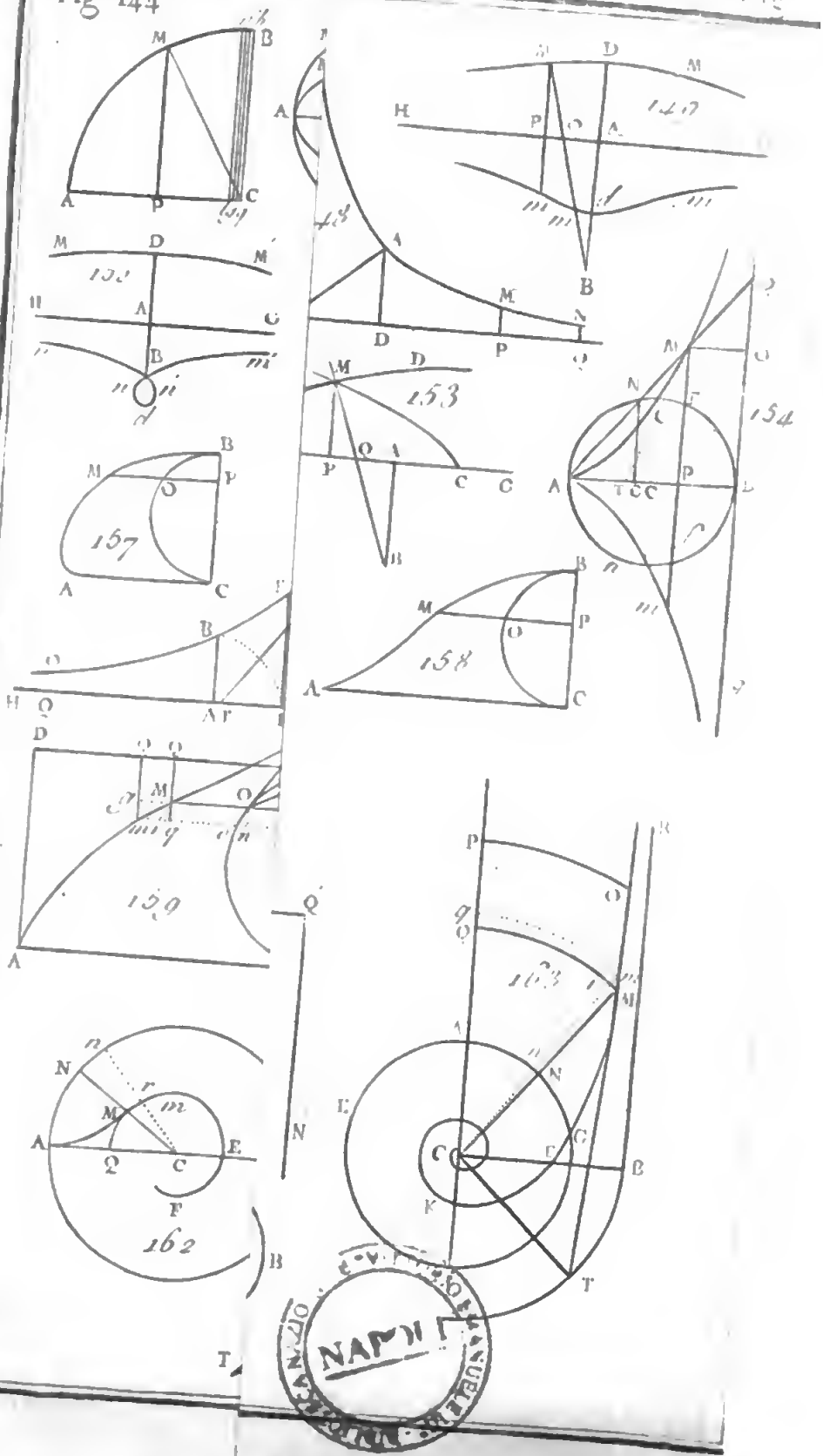


Google

Digitized by Google

Pl. 8

Fig. 144

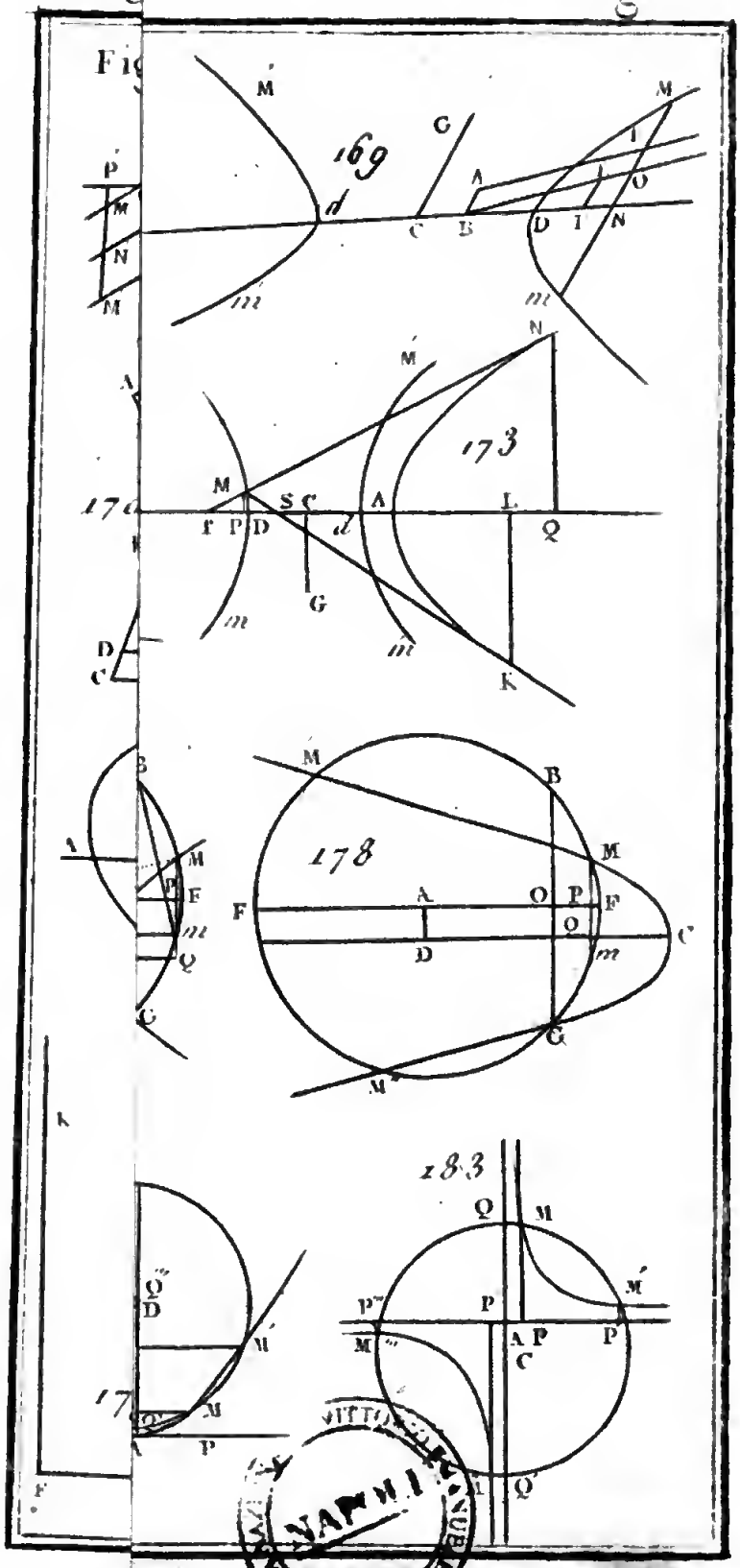


NAPOLI

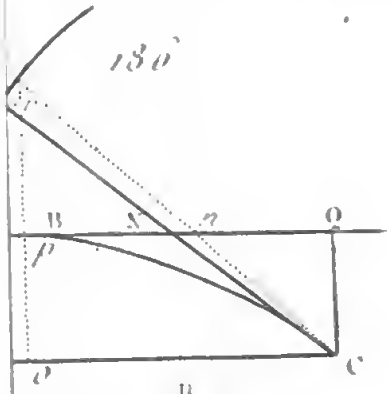
Digitized by Google

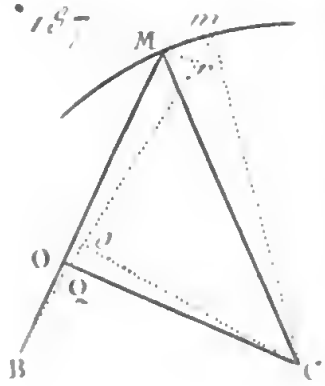
Digitized by Google

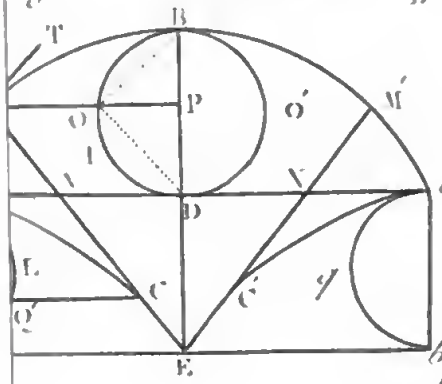
Pl. 3 Fig. 165

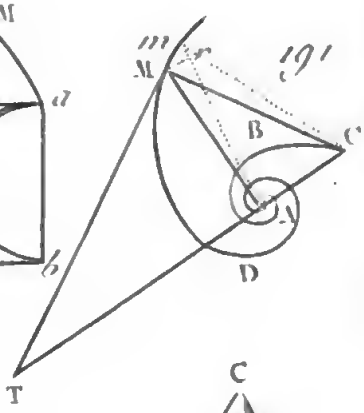


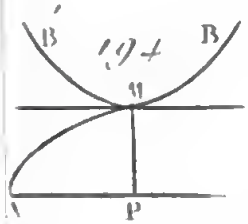
Digitized by Google

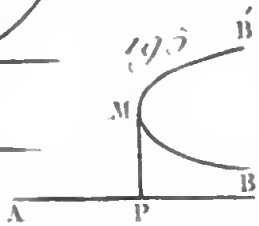

180
B
N
n
Q
p
C
o

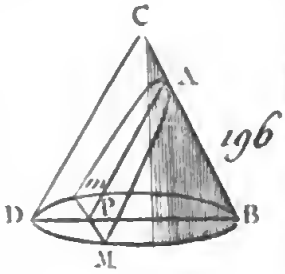

187
M
m
O
Q
B
C

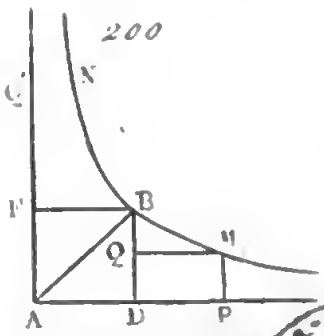

T
B
P
O
O'
M'
I
N
a
D
L
C
C'
Q'
E
b

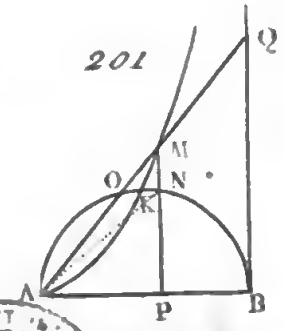

191
m
M
B
C
A
D
T


194
B'
B
M
A
P


195
B'
M
B
A
P


C
A
196
m
D
P
B
M

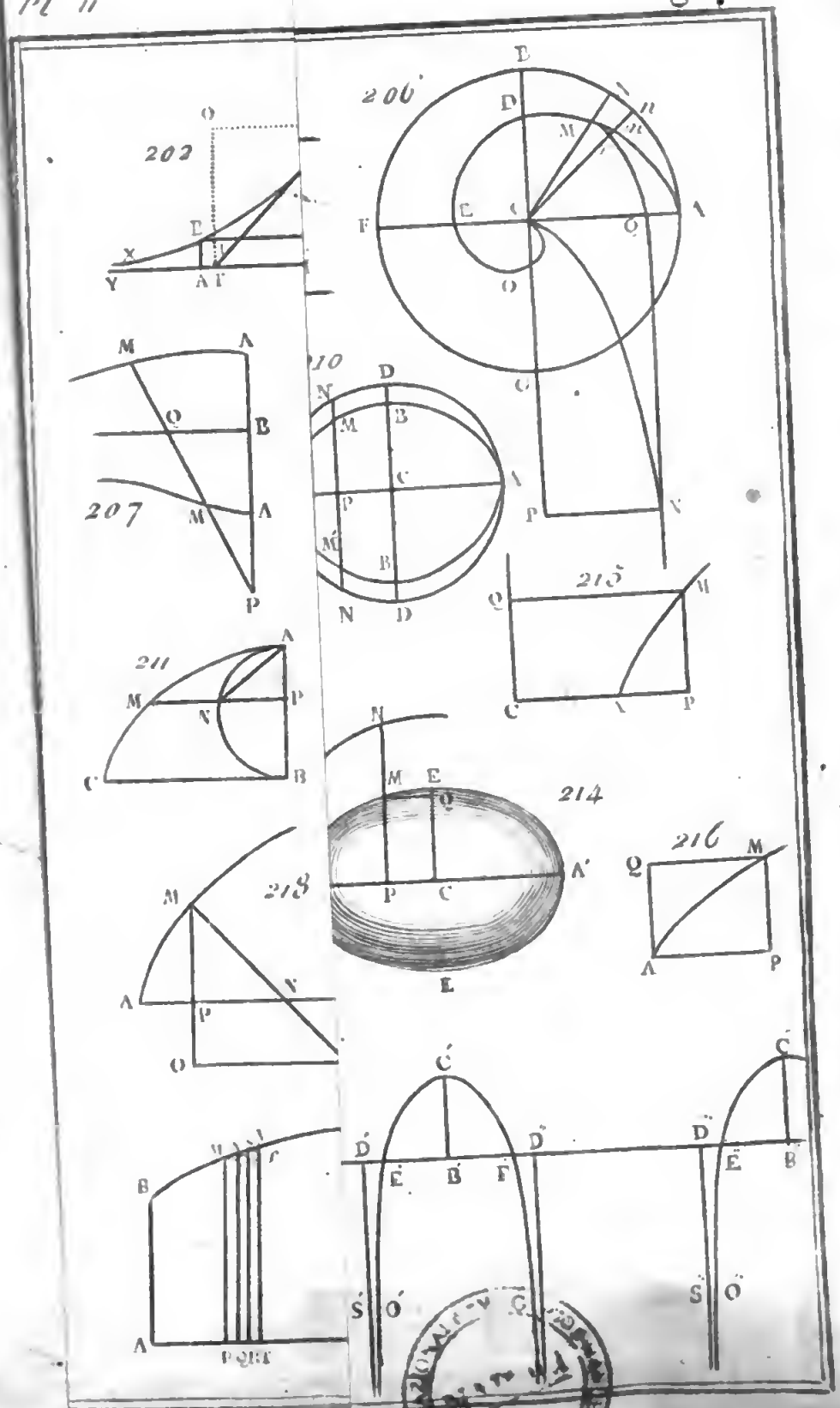

200
Q'
N
F
B
Q
M
A
D
P


201
Q
M
O
N
K
A
P
B

NAPOLI

Digitized by Google

Fig. 202



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google